Test pre prijímacie pohovory z matematiky

26. 4. 2024, 10:00 hod. *skupina B*

1. **(3b)** Ktoré z nasledovných tvrdení je/sú pravdivé?

a) $-\log_{\frac{1}{4}} 4 < \log_4 \frac{1}{4}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} > \log_4 \frac{1}{4}$

c) $-\log_4 4 < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: ***b)*** ***c)***

2. **(3b)** Ktoré z nasledovných výrazov sú väčšie ako 1?

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{-4}{3}}$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{-3}{4}}$

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: **a*)*** ***c)***

3. **(5b)** Nájdite definičný obor funkcie f.

$$f:\ y=\frac{x-2}{1-\sqrt{x^2-4x+4}}$$

Riešenie:	$D(f)=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$, alebo $D(f)=R-\{1,3\}$

4. **(3b)** Pre aké hodnoty m nasledujúca nerovnosť platí?

$$m^{\frac{3}{2}} < m^{\frac{-3}{2}}$$

Riešenie:	Nerovnosť platí pre: $0<m<1$

5. **(2b)** Pre akú hodnotu parametra $t \in R$ bude bod $A=[-5,8]$ ležať na priamke $p: x=3-4t;\ y=4+2t$?

Riešenie:	$t=2$

6. **(5b)** Ktorá z nasledujúcich parabol má vrchol v bode $A=[-1,3]$. Pre túto parabolu nájdite jej priesečníky s osami $\vec{x}$ a $\vec{y}$?

a) $p: y=2x^2+5x+6$

b) $p: y=x^2-3x-1$

c) $p: y=-x^2-2x+2$

Riešenie:	Správna parabola je možnosť **c)** Priesečník s osou $\vec{y}$ má súradnice $\left[0,\, 2\right]$. Priesečníky s osou $\vec{x}$ majú súradnice $\left[-1-\sqrt{3},\, 0\right]$ a $\left[-1+\sqrt{3},\, 0\right]$

7. **(4b)** Určte obor riešiteľnosti na množine $\mathbb{N}$ a na tomto obore riešte rovnicu

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!}-3\frac{(n+3)!}{(n+2)!}=-15\,.$$

Riešenie:	$OR: n\geq 4$ alebo $OR=\{n\in\mathbb{N}, n\geq 4\}$ Riešením rovnice je číslo: $n=6$

8. **(5b)** Určte obor riešiteľnosti a na tejto množine sčítajte zlomky a zjednodušte výsledný výraz do tvaru jedného zlomku, ktorého čitateľom je číslo.

$$\frac{3-2x}{4+x}+\frac{2+3x}{4-x}+\frac{x\,.\left(4x+7\right)}{x^2-16}$$

Riešenie:	$OR: x\neq 4,\quad x\neq -4$ ***alebo*** $OR=\mathbb{R}-\left\{-4,4\right\}$	Výraz po úprave: $\dfrac{-20}{x^2-16}$

9. **(6b)** Nájdite všetky reálne korene polynómu x^3-6x^2-x+30, ak viete, že jeden z jeho koreňov je $x=3$.

Riešenie:	Korene polynómu sú: $x=-2$, $x=3$, $x=5$

10. **(6b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a na tejto množine zjednodušte výraz do tvaru, ktorý bude obsahovať maximálne dva znaky (premenná / operátor / číslica).

$$\left(\frac{y}{y+x}-\frac{2xy}{y^2-x^2}+\frac{x}{y-x}\right)\left(\frac{5y}{y+x}+\frac{10xy}{y^2-x^2}+\frac{5x}{y-x}\right)$$

Riešenie:	$OR:\left\{a\neq -1, a\neq 0, a\neq \frac{1}{4}, a\neq \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right), a\neq \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right), a\neq 2\right\}$ ***alebo*** $OR=R-\left\{-1,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),2\right\}$	Výraz po úprave: $\frac{a+1}{a-2}$

11. **(7b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a nájdite všetky riešenia nerovnice:

$$\frac{3x+12}{x^2-6x-40}>1$$

Riešenie:	$OR: x\neq -4,\quad x\neq 10$ ***alebo*** $OR=\mathbb{R}-\{-4,10\}$	$K=(10,\ 13)$

12. **(7b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a nájdite všetky riešenia rovnice:

$$1+\frac{2x}{x+2}-\frac{x}{(-8-2x+x^2)}=\frac{2x-4}{x-4}$$

Riešenie:	$OR: x\neq -2,\quad x\neq 4$ ***alebo*** $OR=\mathbb{R}-\{-2,4\}$	$K=\{0,\ 11\}$

13. **(5b)** Na množine reálnych čísel nájdite všetky riešenia rovnice:

$$\log_{3x} 8x^2+8x-12=2$$

Riešenie:	*Pomocný výsledok :* $OR=\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}-1\right),\ \infty\right)=(0.8228,\ \infty)$ ***Boduje sa*** $K=\{2,\ 6\}$

14. **(5b)** Uveďte podmienky riešiteľnosti a nájdite všetky riešenia rovnice:

$$2\cos\left(x+\pi\right)=-1$$

Riešenie:	$OR=\mathbb{R}$	$K=\left\{x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z\right\}$ ***alebo*** $K=\left\{x=\dfrac{2}{3}\pi+2(k-1)\pi,\ \ x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z\right\}$

15. **(5b)** Ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $f:y=-\dfrac{(1+x)}{x^2-x-2}$ je/sú nepravdivé? Uveďte všetky (označením písmen a) – e)):

a) definičnou oblasťou je množina $D(f)=\mathbb{R}-\{-1;2\}$
b) funkcia nie je zdola ohraničená
c) inverzná funkcia je rastúca
d) funkcia je klesajúca na celom definičnom obore
e) oblasťou hodnôt je množina $H(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: **c), d),**

16. **(5b)** Nájdite priesečník/y kružnice danej stredom $S=[4,\ 2]$ s polomerom $r=2$ a priamkou p danou bodmi $A=[8,-7]$ a $B=[0,\ 5]$. Uveďte rovnicu kružnice v stredovom aj vo všeobecnom tvare a rovnicu priamky vo všeobecnom tvare.

Riešenie:	Kružnica vo všeobecnom tvare $k:\ x^2-8x+y^2-4y+16=0$. Kružnica v stredovom tvare $k:\ (x-4)^2+\left(y-2\right)^2=4$. Priamka vo všeobecnom tvare: $p:\ 3x+2y-10=0$ Priesečníky priamky p s kružnicou k sú bod/body: $[4,\ -1]$ a $[2,2]$.

17. **(7b)** Riešte systém rovníc na množine $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} +2x & -y & +3z & =7 \\ +x & -y & -2z & =1 \\ 2x & +2y & & =-2 \end{array}$$

Riešenie:	Riešením systému rovníc je: $K=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ [x,y,z]=[1,-2,1]\}$ **alebo** $K=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x=1,\ y=-2,\ z=1\}$

18. **(5b)** Zistite hodnotu prvého člena, diferenciu aritmetickej postupnosti a tiež súčet prvých piatich členov tejto aritmetickej postupnosti, ak platí:

$$2a_2 - a_4 = 3$$
$$3a_1 + a_3 = 24$$

Riešenie:	Prvý člen $a_1 = 5$ Diferencia $d = 2$ Súčet prvých piatich členov $\sum_{i=1}^{7} a_i = 45$

19. **(5b)** Vo výrokovej logike., ak použijete predikáty: Cx - x je človek Vx - x je vec, D - človek daruje človeku vec, $\exists$ - existuje, $\forall$ každý/všetko, nájdite správny preklad výroku: $(\exists x)\{C(x) \wedge (\forall y)[C(y) \rightarrow (\exists z)(V(z) \wedge D(xyz))]\}$

a) Niekto dal niekomu niečo
b) Niekto nedal niekmu niečo
c) Každý dal niekomu niečo
d) Niekto dal každému niečo

Riešenie:	Vypíš zoznam tvrdení podľa zadania príkladu: ***d)***

20. **(7b)** Napíšte negáciu nasledujúceho zloženého výroku použitím pravidiel pre negácie elementárnych výrokov tak, aby výsledok obsahoval len A, B, C a operátory $\wedge$, $\vee$, $\neg$

$$\neg\big(A \vee (\neg B \vee C)\big) \Leftrightarrow (A \wedge C)$$

Zistite pravdivostnú hodnotu tejto negácie, ak výroky A a B sú nepravdivé a výrok C je pravdivý.

Riešenie:	Negácia zloženého výroku má tvar: $(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg A \wedge \neg C)$ *Akceptované sú aj iné logicky správne vyjadrenia negácie* Pravdivostná hodnota negácie ak A a B sú nepravdivé a výrok C je pravdivý je: ***nepravda***