
VLADIMÍR KVASNIČKA
JIŘÍ POSPÍCHAL

Algebra a diskrétna matematika

Slovenská technická univerzita
v Bratislave
2008

© prof. Ing. Vladimír Kvasnička, DrSc., prof. RNDr. Jiří Pospíchal, DrSc.

Lektori: doc. RNDr. Ladislav Satko, CSc.
doc. RNDr. Michal Šabo, CSc.

Publikáciu podporilo združenie Gratex IT Inštitút

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo Vydavateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5.

Schválilo vedenie Fakulty informatiky a informačných technológií STU v Bratislave
dňa 25.4.2006, uznesenie číslo 12.1.2006/kd, pre študijný program Informatika a študijný program Počítačové
systémy a siete

OBSAH

PREDHOVOR.....	ix
1 METÓDY MATEMATICKÉHO DŔKAZU	1
1.1 VÝZNAM DŔKAZU V MATEMATIKE	1
1.2 PRAVIDLÁ USUDZOVANIA VO VÝROKOVEJ LOGIKE	4
1.3 PRAVIDLÁ USUDZOVANIA V PREDIKÁTOVEJ LOGIKE.....	11
1.4 METÓDY DŔKAZU VIET.....	15
1.5 MATEMATICKÁ INDUKCIA	19
ZHRNUTIE.....	22
KLÚČOVÉ POJMY	23
CVIČENIA	24
2 TEÓRIA MNOŽÍN I.....	29
2.1 DEFINÍCIA MNOŽINY	29
2.2 ENUMERÁCIA ELEMENTOV V KONEČNÝCH MNOŽINÁCH	37
2.3 KARTEZIÁNSKY SÚČIN MNOŽÍN	42
2.4 MNOŽINA AKO DÁTOVÁ ŠTRUKTÚRA V INFORMATIKE.....	46
ZHRNUTIE.....	47
KLÚČOVÉ POJMY	48
CVIČENIA	49
3 TEÓRIA MNOŽÍN II.....	53
3.1 RELÁCIE	53
3.2 RELÁCIA ČIASTOČNÉHO USPORIADANIA.....	62
3.3 FUNKCIE.....	66
ZHRNUTIE.....	72
KLÚČOVÉ POJMY	73
CVIČENIA	73
4 KOMBINATORIKA I	79
4.1 BINOMICKÉ KOEFICIENTY A PASCALOV TROJUHOLNÍK.....	79
4.2 PERMUTÁCIE A KOMBINÁCIE	88
ZHRNUTIE.....	94
KLÚČOVÉ POJMY	95
CVIČENIA	95
5 KOMBINATORIKA II.....	99
5.1 REKURENTNÉ VZŤAHY.....	99
5.2 METÓDA „ROZDELUJ A PANUJ“	108

5.3	PRINCÍP INKLÚZIE A EXKLÚZIE	113
	ZHRNUTIE	118
	KLÚČOVÉ POJMY	119
	CVIČENIA	120
6	ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY I.....	123
6.1	BINÁRNE OPERÁCIE	123
6.2	POLOGRUPY, MONOIDY A GRUPY	126
6.3	MORFIZMY	135
	ZHRNUTIE.....	138
	KLÚČOVÉ POJMY	139
	CVIČENIA	140
7	ALGEBRAICKÉ ŠTRUKTÚRY II	143
7.1	BOOLOVA ALGEBRA	143
7.2	VLASTNOSTI BOOLOVEJ ALGEBRY.....	146
7.3	BOOLOVE FUNKCIE.....	148
7.4	SPÍNACIE OBVODY	155
7.5	LOGICKÉ OBVODY	159
7.6	OPTIMALIZÁCIA LOGICKÝCH OBVODOV	163
	ZHRNUTIE.....	171
	KLÚČOVÉ POJMY	173
	CVIČENIA	173
8	MATICOVÁ ALGEBRA I	177
8.1	DEFINÍCIA MATICE	177
8.2	OPERÁCIE NAD MATICAMI	181
8.3	HODNOSŤ MATICE	189
8.4	INVERZNÁ MATICA	194
	ZHRNUTIE.....	197
	KLÚČOVÉ POJMY	198
	CVIČENIA	199
9	MATICOVÁ ALGEBRA II.....	205
9.1	SÚSTAVA LINEÁRNYCH ROVNÍC.....	205
9.2	DETERMINANTY	214
	ZHRNUTIE.....	223
	KLÚČOVÉ POJMY	224
	CVIČENIA	224
10	TEÓRIA GRAFOV I.....	227
10.1	ÚVODNÉ POZNÁMKY	227
10.2	NEKTORÉ ZÁKLADNÉ DEFINÍCIE.....	230
10.3	REPREZENTÁCIA GRAFOV A IZOMORFIZMUS	234
10.4	SÚVISLOSŤ V NEORIENTOVANÝCH GRAFOCH A EULEROVSKÉ ŤAHY	237
10.5	HAMILTONOVSKÉ CESTY A KRUŽNICE	244
	ZHRNUTIE.....	249
	KLÚČOVÉ POJMY	249

CVIČENIA	250
11 TEÓRIA GRAFOV II.....	257
11.1 PROBLÉMY NAJKRATŠEJ CESTY	257
11.2 PLANÁRNE GRAFY	260
11.3 FARBENIE GRAFOV	264
ZHRNUTIE.....	271
KLÚČOVÉ POJMY	271
CVIČENIA	272
12 TEÓRIA GRAFOV III.....	277
12.1 STROMY AKO MODELY A ICH ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI	277
12.2 BINÁRNE PREHLADÁVACIE STROMY	282
12.3 ROZHODOVACIE STROMY	283
12.4 PREFIXOVÉ KÓDOVANIE	285
12.5 KOREŇOVÉ STROMY REPREZENTUJÚCE ALGEBRAICKÉ VÝRAZY	287
12.6 KOREŇOVÝ STROM AKO MODEL HRY.....	288
ZHRNUTIE.....	295
KLÚČOVÉ POJMY	296
CVIČENIA	296
13 TEÓRIA GRAFOV IV.....	301
13.1 SIETE A METÓDA KRITICKEJ CESTY	301
13.2 MAXIMÁLNY TOK V SIETI A MINIMÁLNY REZ	305
13.3 NÁJDENIE NAJMEŇŠEJ KOSTRY	308
13.4 PREHLADÁVANIE DO HLĚBKY (DEPTH-FIRST SEARCH, DFS).....	310
13.5 PREHLADÁVANIE DO ŠÍRKY (BREADTH-FIRST SEARCH, BFS)	319
ZHRNUTIE.....	322
KLÚČOVÉ POJMY	323
CVIČENIA	323
PRÍLOHA A – RIEŠENÉ PRÍKLADY	329
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 1.....	331
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 2.....	347
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 3.....	355
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 4.....	367
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 5.....	375
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 6.....	383
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 7.....	391
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 8.....	401
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 9.....	411
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 10.....	417
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 11.....	433
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 12.....	443
RIEŠENÉ CVIČENIA Z KAPITOLY 13.....	451

PRÍLOHA B – VZOROVÉ PÍSOMKY	463
1. KONTROLNÁ PÍSOMKA.....	465
2. KONTROLNÁ PÍSOMKA.....	467
3. KONTROLNÁ PÍSOMKA.....	470
ZÁVEREČNÁ PÍSOMKA	473
LITERATÚRA	479
REGISTER	481

PREDHovor

Cieľom tejto učebnice je poskytnúť študentom informatiky na Fakulte informatiky a informačných technológií STU ucelený text k prednáške „*Algebra a diskretná matematika*“. Diskretná matematika patrí medzi teoretické základy informatiky. Slúži nielen pre rozvoj matematicko-logických schopností študentov, ale aj ako teoretická príprava pre ďalšie „pokročilejšie“ informatické predmety. Pri koncipovaní obsahu tejto prednášky stáli sme pred neľahkou úlohou, čo zahrnúť do jej obsahu a čo nie. Pretože táto prednáška substituuje čiastočne aj bývalý predmet „*Lineárna algebra*“, zahrnuli sme z tejto oblasti do učebnice v rozsahu dvoch prednášok aj základy lineárnej algebry, teórie matíc a sústav lineárnych rovníc spolu s elementárnou teóriou determinantov.

Učebnica je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskeho štúdia, ktorí majú základné stredoškolské vedomosti z teórie množín, algebry a výrokovej logiky. V prednáške sme sa snažili čo najviac vyjsť v ústrety potrebám informatiky, preto aj oproti časti týkajúcej sa algebry je relatívne uprednostnená diskretná matematika. Cieľom učebnice je aj rozvinúť u študentov schopnosť rigorózneho matematického myslenia pri riešení a formulovaní problémov informatiky.

Prvá kapitola sa týka metód matematického dôkazu. Kapitoly 2 až 5 sú venované teórii množín a kombinatorike, v 6. a 7. kapitole sa venujeme grupám a boolovskej algebry. Kapitoly 8 až 9 sú venované maticiam, sústavám lineárnych rovníc a determinantom. Zvyšok učebnice sa v 10. až 13. kapitole venuje teórii grafov a základným algoritmom a aplikáciám teórie grafov.

Každá kapitola je sprevádzaná príkladmi, ktorých riešenie poskytne študentom schopnosť dobre sa orientovať v danej problematike. Chceme poďakovať mnohým našim študentom, ktorí nám pomohli nájsť veľa nepríjemných preklepov, nepresností a evidentných chýb, a tým prispeli k zvýšeniu kvality tejto učebnice. Taktiež sa musíme poďakovať nášmu zosnulému kolegovi prof. Ing. Norbertovi Frištackému, PhD., s ktorým sme sa často radili pri koncipovaní sylabu prednášky. Na jeho radu sme zaradili do prednášky Quinovu a McCluskeyho metódu optimalizácie Boolovej funkcie špecifikujúcej logický obvod. Až pri prednášaní tohto predmetu sme zistili, že táto „aplikačná“ časť diskkrétnej matematiky patrí medzi študentmi k najobľúbenejšej časti predmetu.

V slovenskej a českej odbornej spisbe existuje mnoho učebných textov diskkrétnej matematiky. Veríme, že aj tento text sa dôstojne zaradí medzi ne, ako moderná učebnica, ktorej vzorom pri jej písaní bola známa a ťažko prekonateľná Rosénova učebnica „*Discrete Mathematics and Its Applications*“ [14].

Na záver sa chceme poďakovať oponentom doc. RNDr. Ladislavovi Satkovi, PhD. (FEI STU) a doc. RNDr. Michalovi Šabovi, CSc. (FCHPT STU) za cenné pripomienky, ktorými prispeli k vylepšeniu tohto učebného textu.

V Bratislave, júl 2008

Vladimír Kvasnička a Jiří Pospíchal