

Cvičenia

Cvičenie 1.1. Ktoré elementy patria do množiny:

(a) $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 1)\}, \{-1, 1\},$

(b) $\{x; (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 3x + 2 = 0)\}, \{1, 2\}$

(c) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 12)\},$ (kde \mathbb{N} je množina nezáporných celých čísel),
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

(d) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 < 100)\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(e) $\{x; (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 = 2)\}, \emptyset$

Cvičenie 1.2. Vyjadrite tieto množiny pomocou predikátu (pozri (2.1b)):

(a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12\},$

$A = \{x \in \mathbb{N}; P(x)\},$ kde $P(x) = \exists k ((x = 3k) \wedge (x \leq 12))$

(b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$

$A = \{x \in \mathbb{Z}; P(x)\},$ kde $P(x) = (|x| \leq 3),$ \mathbb{Z} je množina celých čísel.

(c) $A = \{m, n, o, p\}$

$A = \{x \in \mathcal{A}; P(x)\},$ kde $P(x) = \exists (k \in \mathcal{A}) ((x = k) \wedge ((k = m) \vee (k = n) \vee (k = o) \vee (k = p))),$

$\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}.$

Cvičenie 1.3. Zistite, či množiny z každej dvojice sú navzájom rovné:

(a) $A = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\},$

ak vynecháme v množine A elementy, ktoré sa opakujú, potom $A = B.$

(b) $A = \{\{1\}\}, B = \{1, \{1\}\},$

Množina A má jeden element, množina B má dva elementy, čiže $A \neq B.$

(c) $A = \emptyset, B = \{\emptyset\},$

Množina A je prázdna, množina B má jeden element, čiže $A \neq B.$

Cvičenie 1.4. Nech $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$, $D = \{4, 6, 8\}$. Zistite, ktoré množiny sú podmnožiny ktorých množín.
 $B \subset A$, $C \subset A$, $C \subset D$.

Cvičenie 1.5. Pre každú množinu A určite, či platí $2 \in A$:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$;
 $2 \notin A$.

(b) $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists(n \in \mathbb{N})(x = n^2)\}$
 množina A obsahuje kvadráty celých čísel, pretože 2 nie je kvadrátom celého čísla potom $2 \notin A$.

(c) $A = \{2, \{2\}\}$;
 $2 \in A$

(d) $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$,
 $2 \notin A$

(e) $A = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
 $2 \notin A$

Cvičenie 1.6. Pre každý príklad z cvičenia 2.5 rozhodnite, či element $\{2\}$ je elementom množiny A .

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$;
 $\{2\} \notin A$.

(b) $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists(n \in \mathbb{N})(x = n^2)\}$
 množina A obsahuje kvadráty celých čísel, pretože 2 nie je kvadrátom celého čísla potom $2 \notin A$, a aj keby 2 patrilo do A , množina obsahujúca 2, teda $\{2\}$ určite do A nepatrí.

(c) $A = \{2, \{2\}\}$;
 $\{2\} \in A$

(d) $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$,
 $\{2\} \in A$

(e) $A = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
 $\{2\} \in A$

Cvičenie 1.7. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a) $0 \in \emptyset$, nepravdivý
- (b) $\emptyset \in \{0\}$, nepravdivý
- (c) $\{0\} \subset \emptyset$, nepravdivý
- (d) $\emptyset \subset \{0\}$, pravdivý
- (e) $\{0\} \in \{0\}$, nepravdivý
- (f) $\{0\} \subset \{0\}$, pravdivý (závisí od interpretácie symbolu \subset)
- (g) $\{0\} \subseteq \{0\}$, pravdivý.

Cvičenie 1.8. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

- (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, pravdivý,
- (b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý,
- (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$, nepravdivý,
- (d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, pravdivý,
- (e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý,
- (f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý.

Cvičenie 1.9. Nech $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, dokážte $A \subseteq C$.

Priamy dôsledok zákona hypotetického sylogizmu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \equiv (\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \Rightarrow x \in C))$$

$$\Rightarrow \forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in C) \equiv (A \subseteq C)$$

Cvičenie 1.10. Nájdite také dve množiny A a B , aby platilo $A \in B$ alebo $A \subseteq B$.

- (a) $B = \{A\}$, potom $A \in B$,
- (b) $A = \{a\}, B = \{a, b\}$, potom $A \subseteq B$.

Cvičenie 1.11. Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a) $\{a\}$, 1,
- (b) $\{\{a\}\}$, 1,
- (c) $\{a, \{a\}\}$, 2,
- (d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, 3.

Cvičenie 1.12. Aká je mohutnosť týchto množín:

- (a) \emptyset , 0
- (b) $\{\emptyset\}$, 1
- (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 2
- (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, 3.

Cvičenie 1.13. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre

- (a) $A = \{a\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$,
- (b) $A = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,
- (c) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Cvičenie 1.14. Dokážte alebo vyvráťte implikáciu $(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A = B)$.

$$(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow \underbrace{(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))}_{\equiv (A \subseteq B)} \wedge \underbrace{(\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A))}_{\equiv (B \subseteq A)} \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \equiv (A = B)$$

kde bola použitá formula (2.21a).

Cvičenie 1.15. Určite, ktorá z množín nie je potenčná množina

- (a) \emptyset , nie je potenčná množina, v tomto špeciálnom prípade potenčnou množinou je $\{\emptyset\}$,
- (b) $\{\emptyset, \{a\}\}$, potenčná množina,

(c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$, nie je potenčná množina, pretože táto množina má len tri elementy a taktiež neexistuje množina $A = \{\emptyset, a\}$.

(d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, potenčná množina.

Cvičenie 1.16. Nech $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, zostrojte

(a) $A \times B$,

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

(b) $B \times A$.

$$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

Cvičenie 1.17. Aký význam má karteziánsky súčin $A \times B$, kde A je množina prednášok, ktoré poskytuje Ústav aplikovanej informatiky a B je množina pedagógov Fakulty informatiky?

Usporiadaná dvojica $(x, \xi) \in A \times B$ sa interpretuje ako priradenie, ktorý predmet ÚAI prednáša ktorý pedagóg FI.

Cvičenie 1.18. Aký je význam karteziánskeho súčinu $A \times B \times C$, kde A je množina všetkých leteckých spoločností, B a C sú množiny letísk na svete.

Usporiadaná trojica $(a, \alpha, \hat{\beta}) \in A \times B \times C$ sa interpretuje ako priradenie, že letecká spoločnosť a má letovú linku, ktorá štartuje v α a pristáva na $\hat{\beta}$.

Cvičenie 1.19. Nech A je množina študentov FIIT, ktorí sú z Bratislavy a B je množina študentov FIIT, ktorí jazdia na fakultu autom. Popíšte študentov, ktorí patria do množiny

(a) $A \cap B$, obsahuje študentov z Bratislavy, ktorí jazdia na fakultu autom,

(b) $A \cup B$, obsahuje študentov z Bratislavy alebo študentov, ktorí jazdia na fakultu autom,

(c) $A - B$, obsahuje študentov v Bratislavy, ktorý nejazdia na fakultu autom,

(d) $B - A$, obsahuje študentov, ktorí jazdia na fakultu autom a ktorí nie sú z Bratislavy.

Cvičenie 1.20. Nech A je množina prvkov na našej fakulte a B je množina študentov navštevujúcich diskretnú matematiku. Vyjadrite pomocou množín A a B tvrdenia:

(a) Množina prvkov, ktorí navštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $A \cap B$,

(b) Množina prvkov, ktorí nenavštevujú prednášku z diskretnej matematiky $A \cap \bar{B}$,

(c) Množina študentov, ktorý sú buď prváci alebo navštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $A \cup B$

(d) Množina študentov, ktorí nie sú prváci alebo nenavštevujú prednášku z diskretnej matematiky, $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Cvičenie 1.21. Nech A a B sú množiny, dokážte

(a) $(A \cap B) \subseteq A$,

1.	$x \in A \cap B$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	dôsledok predpokladu
3.	$(x \in A)$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in A)$	deaktivácia predpokladu

(b) $(A \cap B) \subseteq B$,

1.	$x \in A \cap B$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	dôsledok predpokladu
3.	$(x \in B)$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in B)$	deaktivácia predpokladu

(c) $A \subseteq (A \cup B)$,

1.	$(x \in A)$	predpoklad
2.	$(x \in A) \vee (x \in B)$	dôsledok 1
3.	$(x \in A) \Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$	deaktivácia predpokladu

(d) $B \subseteq (A \cup B)$,

1.	$(x \in B)$	predpoklad
2.	$(x \in B) \vee (x \in A)$	dôsledok 1
3.	$(x \in B) \Rightarrow ((x \in B) \vee (x \in A))$	deaktivácia predpokladu

(e) $A - B \subseteq A$,

1.	$x \in (A - B)$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \notin B)$	dôsledok 1
3.	$(x \in A)$	dôsledok 2
4.	$(x \in (A - B)) \Rightarrow (x \in A)$	deaktivácia predpokladu

(f) $A \cap (B - A) = \emptyset$.

1.	$x \in (A \cap (B - A))$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in (B - A))$	dôsledok 1
3.	$x \in A$	dôsledok 2
4.	$x \in (B - A)$	dôsledok 2
5.	$x \in B$	dôsledok 4
6.	$x \notin A$	dôsledok 4
7.	$(x \in A) \wedge (x \notin A)$	dôsledok 3 a 6 (kontradikcia, potom $x \in \emptyset$)

Cvičenie 1.22. Nech A, B a C sú množiny, dokážte $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

1.	$x \in ((A - C) - (B - C))$	predpoklad
2.	$(x \in (A - C)) \wedge (x \notin (B - C))$	dôsledok 1
3.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in (B - C))$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)$	dôsledok 3
5.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$	dôsledok 4
6.	$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee \underbrace{\left(x \in A \wedge \underbrace{x \notin C \wedge x \in C}_0 \right)}_0$	distribut. zákon na 5
7.	$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B)$	dôsledok 6
8.	$x \in ((A - B) - C)$	dôsledok 7

Cvičenie 1.23. Čo môžeme povedať o množinách A a B , ak platí

- (a) $A \cup B = A$, platí ak $B \subseteq A$
- (b) $A \cap B = A$, platí ak $A \subseteq B$
- (c) $A - B = A$, $A \cap B = \emptyset$
- (d) $A \cap B = B \cap A$, platí pre každé množiny A a B
- (e) $A - B = B - A$, platí ak $A = B$.

Cvičenie 1.24. Nech A, B a C sú množiny, zistite, či sú pravdivé implikácie:

- (a) $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$, neplatí

$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2, 3\}$, potom $A \cup C = B \cup C = \{1, 2, 3\}$, avšak $A \neq B$

(b) $(A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$, neplatí

$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{2\}$, potom $A \cap C = B \cap C = \{2\}$, avšak $A \neq B$

Cvičenie 1.25. Nech A a B sú množiny, dokážte vlastnosť $(A \subseteq B) \Rightarrow (\bar{B} \subseteq \bar{A})$.

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \forall x (x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{B} \subseteq \bar{A}$$

Cvičenie 1.26. Nech $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$, pre $i=1, 2, \dots, n$. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{1\}$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{1, 2, \dots, n\}$

Cvičenie 1.27. Nech A_i je množina bitových reťazcov, ktorých dĺžka nie je väčšia ako i , pre $i=1, 2, \dots, n$. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_1$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_n$.

Cvičenie 1.28. Dokážte pomocou matematickej indukcie vzťahy

(a) $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$

Jednoducho sa dokáže pomocou De Morganovej vety, predpokladajme, že máme dokázať

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2) \cup A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \bar{A}_3 = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap \bar{A}_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

Tento jednoduchý postup sa ľahko zovšeobecní pre každé $n > 3$.

(b) $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = \overline{(A_1 \cap A_2) \cap A_3} = \overline{(A_1 \cap A_2)} \cup \bar{A}_3 = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cup \bar{A}_3 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$$

Tento jednoduchý postup sa ľahko zovšeobecní pre každé $n > 3$.