Riešenie cvičení z 3. kapitoly

Cvičenie 3.1. Prepíšte z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky:

(a) *Jano pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
p= Jano pôjde na výlet, *q= Fero pôjde na výlet*
(1) Použijeme formulu $(p \wedge q) =_{def} \neg(p \Rightarrow \neg q)$, ktorú môžeme dokázať pomocou de Morganovho vzťahu. Pretransformovaný výrok pomocou implikácie má potom formu: *Nie je pravda, že ak Jano pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet.*
(2) Negácia výroku sa vykoná pomocou $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$, negovaný výrok má formu: *Jano nepojde na výlet alebo Fero nepôjde na výlet*.

(b) *Eva pôjde na výlet alebo Viera nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
p= Eva pôjde na výlet, *¬q= Viera pôjde na výlet*
(1) $(p \vee \neg q) \equiv (\neg p \Rightarrow \neg q)$, potom pretransformovaná veta má túto formu, *ak Eva nepôjde na výlet, potom Viera nepôjde na výlet*.
(2) Negáciu vykonáme pomocou formule $\neg(p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge q)$, použitím tejto formuly dostaneme: *Eva nepôjde na výlet a Viera pôjde na výlet*.

(c) *Ak Viera pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
p= Viera pôjde na výlet, ¬q= Fero nepôjde na výlet.
(1) $(p \Rightarrow \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$, potom pretransformovaná veta má formu: *Viera nepôjde na výlet alebo Fero nepôjde na výlet.*
(2) $\neg(p \Rightarrow \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv (p \wedge q)$, potom negácia vety má formu: *Viera pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet.*

(d) *Ak Viera pôjde na výlet alebo Jano pôjde na výlet, potom Fero pôjde na výlet a* Eva *nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
p= Viera pôjde na výlet, q= Jano pôjde na výlet, r= Fero pôjde na výlet, s= Eva pôjde na výlet.
(1) Veta má tento tvar $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)$, implikáciu odstránime z formule takto $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s) \equiv \neg(p \vee q) \vee (r \wedge \neg s) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s)$, potom pretransformovaná veta má tvar: (*Viera nepôjde na výlet a Jano nepôjde na výlet*) alebo (*Fero pôjde na výlet a Eva nepôjde na výlet*)
(2) Inverzia implikácie sa vykoná pomocou formule $((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) \equiv (\neg(r \wedge \neg s) \Rightarrow \neg(p \vee q)) \equiv ((\neg r \vee s) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$, potom veta má formu: *Ak Fero nepôjde na výlet alebo Eva pôjde na výlet, potom Viera nepôjde na výlet a Jano nepôjde na výlet*

(e) *Viera na výlet pôjde a Eva na výlet nepôjde*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
p= Viera pôjde na výlet, ¬q= Eva nepôjde na výlet

(1) Veta má tento tvar: $(p \wedge \neg q)$, vyjadrenie tejto formuly pomocou implikácie a negácie má tvar $(p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(p \Rightarrow q)$. Transformovaná veta má tvar: *Nie je pravda, že ak Viera pôjde na výlet, potom Eva pôjde na výlet*.
(2) Negácia pôvodnej vety $\neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$, potom *ak Viera pôjde na výlet, potom Eva pôjde na výlet*.

Cvičenie 3.2. Negujte tieto výroky.
(a) *Budem sa prechádzať alebo budem si spievať*.
Použijeme $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$, potom: *Nebudem sa prechádzať a nebudem si spievať*

(b) *Jano nefandí Slovanu ani Interu*.
Použijeme $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee q)$, potom: *Jano fandí Slovanu alebo Interu.*

(c) *Ak je streda, potom máme schôdzu*.
Použijeme $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg q)$, potom: *Je streda a nemáme schôdzu.*

(d) *Ak sa budem moc učiť, tak pôjdem študovať na vysokú školu*.
Podobne sako v predchádzajúcom príklade: *budem sa moc učiť a nepôjdem študovať na vysokú školu.*

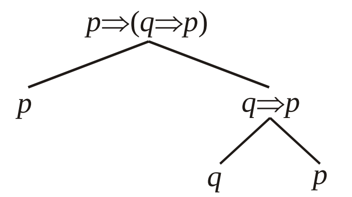
(e) *Ak sa budem moc učiť a budem mať trochu šťastia, potom urobím skúšku z logiky*.
Použijeme formulu $\neg(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \equiv \neg((\neg p \vee \neg q) \vee r) \equiv (p \wedge q \wedge \neg r)$, potom: B*udem sa moc učiť a budem mať trochu šťastia a nerobím skúšku z logiky* .

(f) *Dám ti facku, ak ma oklameš.*
Tento výrok musíme chápať ako implikáciu *ak ma oklameš, potom ti dám facku*, podobne ako v príkladoch (c) a (d): *ak ma oklameš a nedám ti facku.*

(g) *Ak bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto, potom pôjdeme na výlet a budeme sa kúpať.*
Použijeme $\neg((p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)) \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \equiv \neg((\neg p \vee \neg q) \vee (r \wedge s)) =$
$(\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(r \wedge s)) \equiv ((p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \equiv ((p \wedge q) \wedge (r \Rightarrow \neg s))$, potom: *bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto a ak pôjdeme na výlet, tak sa nebudeme kúpať.*

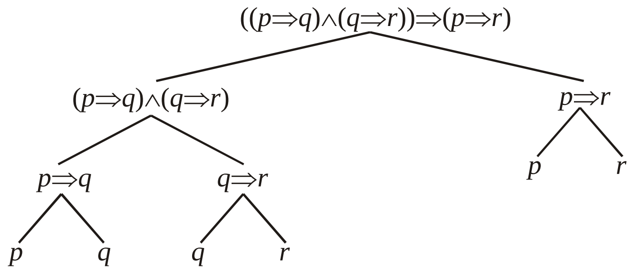
Cvičenie 3.3. Zostrojte syntaktické stromy formúl, zostrojte podformuly daných formúl:

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$



podformuly sú určené pomocou vrcholov podstromov, dostaneme $\{p, q, q \Rightarrow p, p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\}$.

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$



$$\{p, q, r, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \Rightarrow r, (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r), ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$$

Syntaktické stromy ostatných formúl sa zostroja podobným postupom, nebude ich tu uvádzať.

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

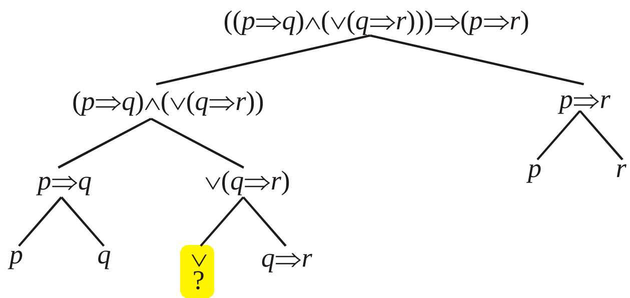
(e) $p \wedge \neg(\neg q \Rightarrow p)$

(f) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$

Cvičenie 3.4. Prečo uvedené výrazy nie sú formuly výrokovej logiky?

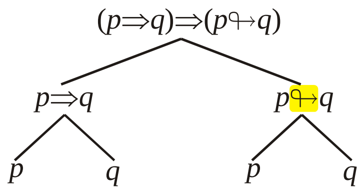
(a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\vee(q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Táto formula obsahuje nekorektnú postupnosť konjunkcie a disjunkcie



(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \nleftrightarrow q)$.

Táto formula obsahuje nepovolený znak $\nleftrightarrow$, ktorý nepatrí medzi logické spojky výrokovej logiky.



Cvičenie 3.5. Preverte pomocou tabuľkovej metódy, ktoré formuly z cvičenia 1.3 sú tautológie, kontradikcie a splniteľné.

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, t. j. formula $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ je tautológia.

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	4∧5	7⇒4
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, preto formula $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ je tautológia.

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, preto formula $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ je tautológia.

(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

1	2	3	4	5	6
p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee q$	$4 \Rightarrow 5$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Pretože posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, formula $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ je tautológia.

(e) $p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow p)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Pretože posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, formula $p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow p)$ je tautológia.

(f) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Pretože posledný stĺpec obsahuje tak 1 ako aj 0, formula $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$ je splniteľná.

Cvičenie 3.6. Použitím tabuľkovej metódy určite pre ktoré interpretácie premenných τ sú výrokové formuly pravdivé:

(a) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$,

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\neg r \Rightarrow p$	$((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Interpretácie premenných *p, q* a *r* sú: $\tau_1 = (0,0,1), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,0,1), \tau_4 = (1,1,1)$

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow \neg r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Interpretácie premenných *p, q* a *r* sú: $\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (0,1,1)$, $\tau_5 = (1,0,0), \tau_6 = (1,0,1), \tau_7 = (1,1,0)$.

Cvičenie 3.7. Dokážte tieto ekvivalencie:
Poznámka. Pri riešení týchto príkladov použijeme tieto definičné identity

$(p \downarrow q) =_{def} \neg(p \vee q)$ (NOR logická spojka)

$(p \uparrow q) =_{def} \neg(p \wedge q)$ (NAND logická spojka)

Z týchto dvoch identít odvodíme negácie elementárnych premenných položením $p = q$

$\left(p \downarrow p\right) =_{def} \neg\left(p \vee p\right) = \neg p$

$\left(p \uparrow p\right) =_{def} \neg\left(p \wedge p\right) = \neg p$

(a) $(p \wedge q) \equiv \left(p \downarrow p\right) \downarrow \left(q \downarrow q\right)$

$$\left(\neg\left(p \vee q\right) = \left(p \downarrow q\right)\right) \to \left(\neg p \wedge \neg q = \left(p \downarrow q\right)\right) \to \left(p \wedge q = \left(\neg p \downarrow \neg q\right)\right)$$
$$\to p \wedge q = \left(\left(p \downarrow p\right) \downarrow \left(q \downarrow q\right)\right)$$

(b) $(p \vee q) \equiv \left(p \downarrow q\right) \downarrow \left(p \downarrow q\right)$

$$\left(\neg\left(p \vee q\right) = \left(p \downarrow q\right)\right) \to \left(\left(p \vee q\right) = \neg\left(p \downarrow q\right)\right) \to \left(\left(p \vee q\right) = \left(p \downarrow q\right) \downarrow \left(p \downarrow q\right)\right)$$

(c) $(p \wedge q) \equiv \left(p \uparrow q\right) \uparrow \left(p \uparrow q\right)$,

$$\left(\neg\left(p \wedge q\right) = \left(p \uparrow q\right)\right) \to \left(\neg p \vee \neg q = \left(p \uparrow q\right)\right) \to \left(p \vee q = \left(\neg p \uparrow \neg q\right)\right)$$
$$\to p \vee q = \left(\left(p \uparrow p\right) \uparrow \left(q \uparrow q\right)\right)$$

(d) $(p \vee q) \equiv \left(p \uparrow p\right) \uparrow \left(q \uparrow q\right)$

$$\left(\neg\left(p \wedge q\right) = \left(p \uparrow q\right)\right) \to \left(\left(p \wedge q\right) = \neg\left(p \uparrow q\right)\right) \to \left(\left(p \wedge q\right) = \left(p \uparrow q\right) \uparrow \left(p \uparrow q\right)\right)$$

Cvičenie 3.8. Pretransformujte do DNF a KNF výrokové formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$

DNF: $\left((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)\right) \equiv (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$

KNF: $\left((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)\right) \equiv \left((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)\right)$

(b) $\neg(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow p$

DNF: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p)$

KNF: $(p) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) $\left(((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p\right)$

DNF: $\left(p \wedge \neg q\right) \vee \left(p \wedge q\right) \vee \left(\neg p\right)$

KNF: $\left(p \vee p \vee \neg p\right) \wedge \left(p \vee \neg p \vee q\right) \wedge \left(p \vee \neg p \vee \neg q\right) \wedge \left(\neg p \vee q \vee \neg q\right) = 1$

Cvičenie 3.9. Zostrojte DNF a KNF Boolovej funkcie určenej tabuľkou

#	x_1	x_2	x_3	α
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1

7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

$$\varphi_{DNF} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$
$$\varphi_{KNF} = \left(x_1 + \bar{x}_2 + x_3\right)\cdot\left(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3\right)\cdot\left(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3\right)\cdot\left(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3\right)$$

Cvičenie 3.10. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčin dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \times\,\alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_4\ \beta_3\ \beta_2\ \beta_1 \end{array}$$

Tabuľka všetkých možných hodnôt argumentov a priradených výsledkov má tvar

#	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4	Interpretácia
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0×0=0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0×1=0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0×2=0
4	0	0	1	1	0	0	0	0	0×3=0
5	0	1	0	0	0	0	0	0	1×0=0
6	0	1	0	1	0	0	0	1	1×1=1
7	0	1	1	0	0	0	1	0	1×2=2
8	0	1	1	1	0	0	1	1	1×3=3
9	1	0	0	0	0	0	0	0	2×0=0
10	1	0	0	1	0	0	1	0	2×1=2
11	1	0	1	0	0	1	0	0	2×2=4
12	1	0	1	1	0	1	1	0	2×3=6
13	1	1	0	0	0	0	0	0	3×0=0
14	1	1	0	1	0	0	1	1	3×1=3
15	1	1	1	0	0	1	1	0	3×2=6
16	1	1	1	1	1	0	0	1	3×3=9

$$\beta_1 = (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)$$

$$\begin{aligned}\beta_2 = {} & (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 = {} & (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_4 = {} & (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee \\ & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)\end{aligned}$$

Cvičenie 3.11. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčet dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\,\alpha_2 \\ \underline{\alpha_3\,\alpha_4} \\ \beta_1\,\beta_2\,\beta_3 \end{array}$$

Tabuľka všetkých možných hodnôt argumentov a priradených výsledkov má tvar

#	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	Interpretácia
1	0	0	0	0	0	0	0	0+0=1
2	0	0	0	1	0	0	1	0+1=1
3	0	0	1	0	0	1	0	0+2=2
4	0	0	1	1	0	1	1	0+3=3
5	0	1	0	0	0	0	1	1+0=1
6	0	1	0	1	0	1	0	1+1=2
7	0	1	1	0	0	1	1	1+2=3
8	0	1	1	1	1	0	0	1+3=4
9	1	0	0	0	0	1	0	2+0=2
10	1	0	0	1	0	1	1	2+1=3
11	1	0	1	0	1	0	0	2+2=4
12	1	0	1	1	1	0	1	2+3=5
13	1	1	0	0	0	1	1	3+0=3
14	1	1	0	1	1	0	0	3+1=4
15	1	1	1	0	1	0	1	3+2=5
16	1	1	1	1	1	1	0	3+3=6

$$\begin{aligned}
\beta_1 = &\left(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \\
&\left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \\
&\left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 = &\left(\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \\
&\left(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \left(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \\
&\left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \\
&\left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 = &\left(\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \left(\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \\
&\left(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \\
&\left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee \\
&\left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right)
\end{aligned}$$

Cvičenie 3.12. Zostrojte Boolovu funkciu $f\left(x,y,z\right)$ vo forme konjuktívnej a disjunktívnej normálnej formy

(a) $x=y=0, z=1,\; f_{DNF}\left(x,y,z\right)=\overline{x}\,\overline{y}\,z,\; f_{KNF}\left(x,y,z\right)=x+y+\overline{z}$.

(b) $x=0, y=1, z=0,\; f_{DNF}\left(x,y,z\right)=\overline{x}\,y\,\overline{z},\; f_{KNF}\left(x,y,z\right)=x+\overline{y}+z$.

(c) $y=z=1,\; f_{DNF}\left(x,y,z\right)=x\,y\,z+\overline{x}\,y\,z=\left(\underbrace{x+\overline{x}}_{1}\right)yz=yz,\; f_{KNF}\left(x,y,z\right)=\overline{y}+\overline{z}$.

Cvičenie 3.13. Zostrojte Boolovu funkciu $f\left(x,y,z\right)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným *x*, *y* a *z* (DNF forme), ktorá je ekvivalentná s funkciou $F\left(x,y,z\right)$.

(a) $F(x,y,z) = x + y + \overline{z}$,

$$F(x,y,z) = x + y + \overline{z} = x(y+\overline{y})(z+\overline{z}) + (x+\overline{x})y(z+\overline{z}) + (x+\overline{x})(y+\overline{y})\overline{z}$$
$$= x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z}$$
$$+ x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z}$$
$$+ x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$
$$= x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z$$

(b) $F(x,y,z) = x\overline{z}$

$$F(x,y,z) = x(y+\overline{y})\overline{z} = x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\ .$$

Cvičenie 3.14. Zostrojte duálne formuly k formulám
(a) $\varphi(p,q,r) = p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$$\varphi(p,q,r) = \neg\left(p \wedge (q \vee r)\right) \vee \left((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right)$$
$$\varphi(p,q,r) = \left(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)\right) \vee \left((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right)$$
$$\tilde{\varphi}(p,q,r) = \left(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)\right) \wedge \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)$$

(b) $\varphi(p,q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$$\varphi(p,q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$
$$\varphi(p,q) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$
$$\tilde{\varphi}(p,q) = (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$$

(c) $\varphi(p,q) = \neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$$\varphi(p,q) = \neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
$$\varphi(p,q) = \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)$$
$$\varphi(p,q) = (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$$
$$\tilde{\varphi}(p,q) = (p \vee \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)$$