7. kapitola

Predikátová logika I – úvod do predikátovej logiky a sémantické tablá

7.1 Intuitívny prechod od výrokovej logiky k predikátovej logike

Výroková logika nie je schopná postihnúť všetky možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú charakterizované ako „logicky korektné“. Táto skutočnosť bude ilustrovaná dvoma príkladmi, pomocou ktorých naznačíme možnosti intuitívneho zovšeobecnenia výrokovej logiky smerom k predikátovej logiky pomocou zavedenia predikátov a kvantifikátorov.

Príklad 7.1. Skúmajme túto schému usudzovania známu zo stredoveku

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sokrates je človek}\\ \text{Každý človek je smrteľný}\end{array}}{\text{Sokrates je smrteľný}} \qquad (7.1)$$

kde prvé dve vety sú východiskové predpoklady (premisy) usudzovania a tretia veta je záver usudzovania. Aj keď intuitívne cítime, že tento výrok je logicky korektný, pomocou výrokovej logiky nie sme schopní preveriť jeho správnosť. Prvá a tretia veta má charakter výroku (veta oznamovacia o ktorej sa má zmysel pýtať na jej pravdivosť alebo nepravdivosť). Problém je s druhou vetou, ktorá obsahuje slovo „každý“, s ktorým si vo výrokovej logiky nevieme poradiť. Nemôže byť jednoducho ignorované, takto modifikovaná druhá veta má podstatne iný význam ako mala v pôvodnom tvare. Z tohto jednoduchého pozorovania môžeme vyvodiť záver, že výroková logika nepokrýva všetky situácie a možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú podstatne bohatšie, ako možnosti výrokovej logiky. Jedna z možností ako prekonať túto ohraničenosť výrokovej logiky je jej zovšeobecnenie na predikátovú logiku, ktorá je schopná postihnúť aj procesy usudzovania podobné vyššie uvedenému príkladu.

Upriamime našu pozornosť na druhú vetu z príkladu (7.1), ktorá obsahuje slovo „každý“, pod ktorým rozumieme každú ľudskú bytosť. Táto veta je implikácia, podľa ktorej, ak každé indivíduum je „človek“, potom toto indivíduum je „smrteľné“. Označme písmenom C vlastnosť – predikát byť človekom a písmenom S vlastnosť – predikát byť smrteľný. Potom (7.1) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sokrates je } C\\ \text{Každý kto je C je } S\end{array}}{\text{Sokrates je } S} \qquad (7.2)$$

Vidíme, že aj táto čiastočná formalizácia usudzovania (7.1) ešte nie je moc nápomocná k riešeniu problému jej korektnosti. Zásadný prepis (7.1) spočíva v tom, že zavedieme konštanty vyskytujúce sa v predikátoch, t.j. označenie $C(s)$ pre prvú vetu „Sokrates je človek“ a označenie $S(s)$ pre „Sokrates je smrteľný“, kde symbol s je konštantou daného predikátu, ktorá označuje indivíduum Sokrates. Potom pomocou tohto nového označenia už môžeme prepísať druhú vetu „Každý kto je človek je smrteľný“ z (7.1) do tvaru, ktorý už naznačuje určité súvislosti medzi prvou a treťou vetou. Výraz „každý“ z druhej vety nahradíme symbolom reprezentujúcim „každý objekt“, budeme ho označovať $\forall$ a nazývať *univerzálny kvantifikátor*. Každý kvantifikátor musí byť doprevádzaný nejakým argumentom (premennou) x, symbol $\forall x$ čítame ako „pre každé x“ . Pomocou tohto formalizmu druhá veta z (7.1) je prepísaná do tvaru: $(\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x))$, potom schéma (7.1) má tento tvar

$$\begin{array}{l} C(s) \\ \underline{(\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x))} \\ S(s) \end{array} \tag{7.3}$$

Zopakujeme si použitú terminológiu: vlastnosti alebo relácie medzi objektmi sa nazývajú *predikáty*, objekty, ktoré sú jednoznačne určené (napr. osoba Milan) sa nazývajú *konštanty*, objekty, ktoré majú všeobecný charakter sa nazývajú argumenty.

Výraz $\forall x(C(x) \Rightarrow S(x))$ môžeme jednoducho interpretovať ako konjunkciu implikácií pre rôzne osoby (konštanty), napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned} (\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x)) &\equiv (C(m) \Rightarrow S(m)) \wedge (C(j) \Rightarrow S(j)) \wedge (C(r) \Rightarrow S(r)) \wedge \ldots \\ &\equiv \bigwedge_{x \in U} (C(x) \Rightarrow S(x)) \end{aligned} \tag{7.4}$$

kde U je množina objektov – osôb. Ak akceptujeme interpretáciu (7.4) nového symbolu $\forall x$, potom už môžeme pokladať za tautológiu nasledujúcu implikáciu (ako jednoduchý dôsledok zákona výrokovej logiky $p \wedge q \wedge r \wedge \ldots \Rightarrow p$)

$$(\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x)) \Rightarrow (C(m) \Rightarrow S(m)) \tag{7.5}$$

To znamená, že zo všeobecného výroku $(\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x))$ vyplýva aj jeho *konkretizácia* pre konštantu m (pre Milana). Pomocou tohto vzťahu môžeme upraviť schému usudzovania (7.3) takto

$$\begin{array}{l} \underline{C(m)} \\ (\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x)) \\ \underline{(\forall x)(C(x) \Rightarrow S(x)) \Rightarrow (C(m) \Rightarrow S(m))} \\ S(m) \end{array} \tag{7.6}$$

Túto rozšírenú schému usudzovania môžeme upraviť pomocou pravidla modus ponens (2.1), ktorá je integrálnou súčasťou systému odvodzovania vo výrokovej logike. Aplikovaním (2.1) na druhý a tretí riadok (7.6) dostaneme platnosť implikácie $C(m) \Rightarrow S(m)$, potom (7.6) má túto zjednodušenú podobu

$$\begin{array}{l} C(m) \\ \underline{C(m) \Rightarrow S(m)} \\ S(m) \end{array} \tag{7.7}$$

tvaru klasického modus ponens pravidla (2.1) a z ktorého vyplýva platnosť $S(m)$. Týmto sme vlastne dokázali korektnosť usudzovania pôvodnej verbálne formulovanej schémy usudzovania (7.1). Musíme však zdôrazniť, že k tomu, aby sme dokázali korektnosť tejto schémy používajúcej väzbu „každý“ museli sme opustiť rámec výrokovej logiky a zaviesť predikáty a symbol $\forall x$, čím sme sa dostali z domény výrokovej logiky do domény tzv. predikátovej logiky.

Príklad 7.2. Budeme pokračovať v našom intuitívnom zovšeobecňovaní výrokovej logiky. Študujme ďalšiu schému usudzovania s novým slovom „niektorý“

$$\begin{array}{l} \text{Fido je študent} \\ \underline{\text{Fido má index}\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \text{Niektorý objekt je študent a má index} \end{array} \tag{7.8}$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, v rámci výrokovej logiky táto intuitívne korektná schéma usudzovania nemôže byť študovaná. Budeme formalizovať túto schému podobným spôsobom, ako v predchádzajúcom ilustratívnom príklade. Zavedieme nový symbol nazývaný *existenčný kvantifikátor* $\exists x$, ktorý čítame ako „existuje také *x*“. Potom schéma (7.8) má tvar

$$\begin{array}{l} S(f) \\ \underline{I(f)\qquad\qquad} \\ (\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big) \end{array} \tag{7.9}$$

Výraz $(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať (podobne ako v (7.4)) ako disjunkciu konjunktívnych výrokov pre rôzne osoby, napr. Fido, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned} (\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big) &\equiv \big(S(f)\wedge I(f)\big)\vee\big(S(j)\wedge I(j)\big)\vee\big(S(r)\wedge I(r)\big)\vee\ldots \\ &\equiv \bigvee_{x\in U}\big(S(x)\wedge I(x)\big) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Z tejto interpretácie existenčného kvantifikátora a zo zákona výrokovej logiky $p\Rightarrow p\vee q\vee r\vee\ldots$ vyplýva implikácia

$$\big(S(m)\wedge I(m)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big) \tag{7.11}$$

Prvé dva riadky (7.9) sú v rámci výrokovej logiky interpretované ako ich spoločná konjunkcia

$$\begin{array}{l} S(m) \\ \underline{I(m)\qquad\quad} \\ S(m)\wedge I(m) \end{array} \tag{7.12}$$

Spojením (7.11) a (7.12) dostaneme

$$\begin{array}{l} S(f) \\ I(f) \\ S(f)\wedge I(f) \\ \underline{\big(S(f)\wedge I(f)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)} \\ ? \end{array} \tag{7.13}$$

Aplikovaním štandardného modus ponens na tretí a štvrtý riadok dospejeme k dôležitému medzivýsledku pre verikáciu (7.9)

$$\begin{array}{l} S(f)\wedge I(f) \\ \underline{\big(S(f)\wedge I(f)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)} \\ (\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big) \end{array} \tag{7.14}$$

Ak tento výsledok dosadíme do (7.13) dostaneme (7.9), čo bolo našim cieľom verifikovať.

7.2 Formálne základy predikátovej logiky

Výrazové prostriedky klasickej výrokovej logiky sú veľmi obmedzené a nie sú schopné postihnúť všetky možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú charakterizované ako „logicky korektné“. Jeden zo spôsobov ako zovšeobecniť výrokovú logiku je rozšírenie výrokovej logiky na predikátovú logiku pomocou je zavedenie dvoch kvantifikátorov (univerzálneho a existenčného). ***Univerzálny kvantifikátor*** je definovaný takto

$$(\forall x)P(x) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{x\in U} P(x) \equiv P(a)\wedge P(b)\wedge ...\wedge P(u) & (pre\, U \neq \emptyset) \\ 1 & (pre\, U = \emptyset) \end{cases} \tag{7.15}$$

kde x je indivíduová premenná z univerza $U = \{a,b,...,u\}$. Formula $(\forall x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý pre každé indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „pre každý objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P“, alebo zjednodušene, „pre každý objekt x platí $P(x)$. Ilustračný príklad univerzálneho kvantifikátora nech je výrok „každý študent má index“, ktorý môžeme vyjadriť takto

$$\begin{aligned}(\forall x)Mať\_index(x) &=_{def} \bigwedge_{x\in U} Mať\_index(x) \\ &\equiv Mať\_index(Fero)\wedge Mať\_index(Jano)\wedge ...\wedge Mať\_index(Jana)\end{aligned}$$

Množina – univerzum U vztiahnutá k tomuto kvantifikátoru má tvar

$$U = \{Fero, Jano, ..., Jana\}$$

obsahuje všetkých študentov.

Podobným spôsobom môžeme zaviesť aj ***existenčný kvantifikátor***[1]

$$(\exists x)P(x) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{x\in U} P(x) \equiv P(a)\vee P(b)\vee ...\vee P(u) & (U \neq \emptyset) \\ 0 & (U = \emptyset) \end{cases} \tag{7.16}$$

Formula $(\exists x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý aspoň pre jedno indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „aspoň pre jeden objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P“, alebo zjednodušene, „pre niektoré x plati P(x)“. Jednoduchý ilustračný príklad existenčného kvantifikátora je výrok „niektorí študenti vedia po anglický“

$$\begin{aligned}(\exists x)Vedieť\_anglicky(x) &=_{def} \bigvee_{x\in U} Vedieť\_anglicky(x) \\ &\equiv Vedieť\_anglicky(Fero)\vee ...\vee Vedieť\_anglicky(Jana)\end{aligned}$$

Medzi univerzálnym a existenčným kvantifikátorom existujú vzťahy, ktoré sa dájú jednoducho odvodiť použitím De Morganových vzťahov

$$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x) \tag{7.17a}$$

$$\neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x) \tag{7.17b}$$

Pomocou týchto dvoch formúl ľahko sa dokáže vlastnosť, že vybraný kvantifikátor sa môže vyjadriť pomocou druhého kvantifikátora

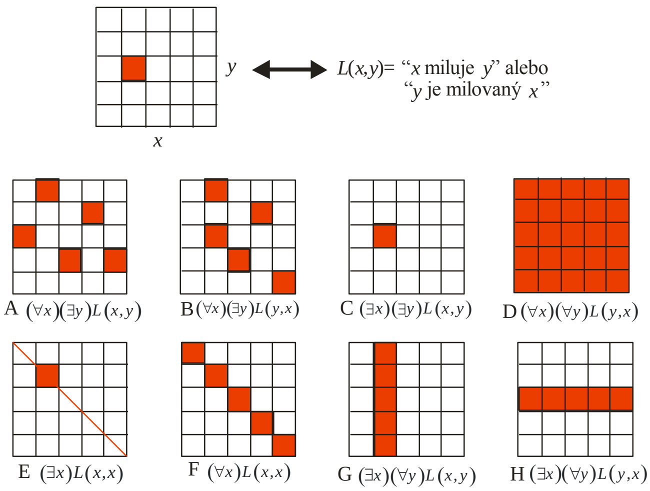
$$(\forall x)P(x) \equiv_{def} \neg(\exists x)\neg P(x) \tag{7.17c}$$

alebo

$$(\exists x)P(x) \equiv_{def} \neg(\forall x)\neg P(x) \tag{7.17d}$$

To znamená, že je postačujúce definovať len jeden kvantifikátor, potom druhý je určený buď (7.17c) alebo (7.17d). Význam kvantifikátorov ∀ a ∃ je znázornený na obr. 7.1.

[1] Táto definícia univerzálneho a existenčného kvantifikátora je formálne korektná len pre konečné univerzá. Avšak, pre nekonečné univerzá, táto definícia kvantifikátorov je nekorektná. Autor sa domnieva, že výhodnosť týchto dvoch „nekorektných“ definícií kvantifikátorov je tak veľká, že ospravedlňuje aj tento „teoretický lapsus“ v logike zameranej pre informatikov, kde nekonečné univerzá snáď ani neexistujú.



Obrázok 7.1. Ilustratívne znázornenie významu binárneho predikátu $L(x,y)$, ktorý sa interpretuje ako "x miluje y" alebo "y je milovaný x", kde x a y sú osoby z množiny U obsahujúcej päť elementov. Význam jednotlivých diagramov je tento: (A) "*Každý je niekým milovaný*", $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$, žiadny stĺpec nie je prázdny; (B) "*každý je niekým milovaný*", $(\forall x)(\exists y)L(y,x)$, žiadny riadok nie je prázdny; (C) "*niekto je niekým milovaný*", $(\exists x)(\exists y)L(y,x)$, $(\exists x)(\exists y)L(x,y)$, jedno políčko je obsadené; (D) "*každý miluje každého*", $(\forall x)(\forall y)L(y,x)$ alebo $(\forall x)(\forall y)L(x,y)$, každý riadok a stĺpec sú plne obsadené; (E) "*niekto je milovaný sebou samým*", $(\exists x)L(x,x)$, aspoň jedno políčko na hlavnej diagonále je obsadené; (F) "*každý miluje sám seba samého*", $(\forall x)L(x,x)$, všetky políčka na diagonále sú obsadené; (G) "*niekto miluje každého*", $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, existuje úplne zaplnený stĺpec; (H) "*každý miluje niekoho*", $(\exists x)(\forall y)L(y,x)$, existuje úplne zaplnený riadok.

7.2.1. Jazyk predikátovej logiky (syntax)

Ako už bolo naznačené v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, jazyk predikátovej logiky bude bohatší ako jazyk výrokovej logiky, bude obsahovať vyjadrovacie prostriedky, pomocou ktorých sme schopní rozlišovať jednotlivé objekty (indivídua), ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Konštrukcia formúl výrokovej logiky na základe definícií 1.2 a 1.3 bude rozšírená o predikáty a kvantifikátory.

Definícia 7.1. Symboly jazyka predikátovej logiky sú

(1) množina indivíduových premenných $\mathcal{U}=\{x,y,...,x_1,x_2,...\}$;

(2) množina indivíduových konštánt $\mathcal{C}=\{a,b,...,a_1,b_2,...\}$;

(3) množina predikátových symbolov (predikátov) $\mathcal{P}=\{P,Q,...,P_1,P_2,...\}$;

(4) množina logických symbolov $\mathcal{L}=\{\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\forall,\exists\}$;

(5) množina pomocných symbolov $\mathcal{B}=\{(,)\}$.

V predikátovej logike premenné reprezentujú objekty z univerza U – ktoré obsahuje indivíduá. Preto predikátovák logika musí obsahovať formálne prostriedky k špecifikácii týchto vlastností – relácie – predikáty. Syntax formúl predikátovej logiky je určený touto definíciou:

Definícia 7.2. Jazyk predikátovej logiky je definovaný nad množinami z definície 7.1 takto:

Termy:

(1) Indivíduové premenné a indivíduové konštanty sú termy;

(2) žiadne iné symboly nie sú termy.

Atomické formuly:

(1) Ak P je n-miestny predikátový symbol, t_1, t_2, ..., t_n sú termy, potom výraz $P(t_1,t_2, ...,t_n)$ je atomická formula;

(2) žiadne iné symboly nie sú atomické formuly.

Formuly:

(1) Každá atomická formula je formula;

(2) ak φ a ψ sú formule, x je premenná, potom výrazy $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ sú formuly.

(3) Žiadne iné symboly nie sú formuly.

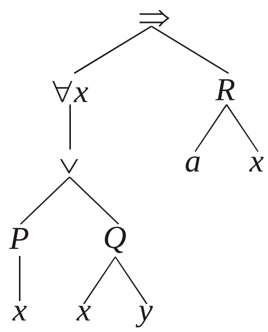
Základnou entitou jazyka predikátovej logiky je *formula* (označovaná malými gréckymi písmenami), ktorej spôsob konštrukcie je určený definíciou 7.2 rekurentného charakteru.

Príklad 7.3. Študujme tieto dva reťazce symbolov

$$\alpha = ((\forall)(P(x) \vee Q(x,b))) \Rightarrow R(a,b)$$

$$\beta = ((\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))) \Rightarrow R(a,x)$$

kde P je unárny predikát, Q a R sú binárne predikáty, a a b sú konštanty, x a y sú premenné. Reťazec α nie je formula, pretože symbol $\forall$ nie je nasledovaný symbolom premennej. Reťazec β je korektná formula. Táto skutočnosť môže byť verifikovaná pomocou konštrukcie syntaktického stromu tejto formule, ktorý je znázornený na obr. 7.2.



Obrázok 7.2. Syntaktický strom formuly $((\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))) \Rightarrow R(a,x)$. Ku každému podstromu sú priradené podformuly, čo sú také časti danej formuly, ktoré sú taktiež syntakticky korektné formuly. Tak napríklad, pre túto formulu množina podformúl obsahuje tieto formuly: {x, y, a, $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(a,x)$, $P(x) \vee Q(x,y)$, $(\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))$, $((\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))) \Rightarrow R(a,x)$ }.

Príklad 7.4. Zapíšte pomocou jazyka predikátovej logiky tieto výroky prirodzeného jazyka:

(1) Každý riaditeľ má aspoň jedného podriadeného zamestnanca.

Riešenie: $(\forall x)\ (R(x) \Rightarrow (\exists y) P(x,y))$, kde $R(x)$ znamená, že indivíduum x je riaditeľ, $P(x,y)$ znamená, že indivíduum y je podriadením indivídua x.

(2) Neexistuje taký človek, ktorý by sa každému páčil.

Riešenie: $\neg(\exists x)\,(\forall y)\ P(x,y)$, kde $P(x,y)$ znamená, že indivíduum x sa páči indivíduu y.

(3) Nie je pravda, že každý člen vedenia podniku je aj majiteľom podnikových akcií.
Riešenie: $\neg(\forall x)\left(V(x)\Rightarrow A(x)\right)$, kde $V(x)$ znamená, že indivíduum x je člen vedenia podniku a $A(x)$ znamená, že indivíduum x je majiteľom podnikových akcií.

(4) Postupnosť $\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ má limitu a: Pre každé $\varepsilon>0$ existuje také n_0 , že pre každé $n>n_0$ platí $|a-a_n|<\varepsilon$.
Riešenie: $\forall(\varepsilon>0)\exists(n_0)\forall(n>n_0)\left(|a-a_n|<\varepsilon\right)$.

(5) Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 minimum: existuje také $\varepsilon>0$, že pre každé $x\in U_\varepsilon(x_0)=\{x\,|\,x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\}$ platí $f(x)\geq f(x_0)$. (Množina $U_\varepsilon(x_0)$ je ε-okolie bodu x_0).
Riešenie: $\exists(\varepsilon>0)\forall\left(x\in U_\varepsilon(x_0)\right)\left(f(x)\geq f(x_0)\right)$.

(6) V každom meste je radnica , v niektorých mestách radnica nie je.
Riešenie: $\left((\forall x)\left(M(x)\Rightarrow R(x)\right)\right)\vee\left((\exists x)\left(M(x)\wedge\neg R(x)\right)\right)$, kde $M(x)$ znamená, že indivíduum x je mesto, symbol $R(x)$ znamená, že indivíduum x má radnicu.

7.2.2. Pravdivostné hodnotenie formúl predikátovej logiky (sémantika)

Problém pravdivostného hodnotenia formúl predikátovej modálnej logiky je podstatne zložitejší proces ako vo výrokovej logike. K tomu, aby sme toto hodnotenie korektne realizovali, musíme poznať tzv. interpretáciu konštánt a predikátových symbolov. Pre lepšie pochopenie tohto nového problému budeme študovať ilustračný príklad.

Príklad 7.7. Majme formulu $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y)\right)$, kde P je unárny predikát a Q je binárny predikát. Uvažujme tieto dve rôzne interpretácie:

(1) Interpretácia $\mathcal{I}_1$. Indivíduá sú ľudia. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je učiteľ" a predikát $Q(x,y)$ reprezentuje vlastnosť objekt y je žiakom objektu x. Potom študovaná formula má význam „každý učiteľ má aspoň jedného žiaka, pravdivostná hodnota tejto formuly je pravda.
(2) Interpretácia $\mathcal{I}_2$. Indivíduá sú prirodzené čísla. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je prvočíslo", predikát $Q(x,y)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je deliteľný objektom y, pričom $y\neq x$. Pre každé x pre ktoré platí predikát $P(x)$ neexistuje také iné prvočíslo y, ktoré by bolo deliteľom čísla x. Pri tejto voľbe objektov a predikátov, význam formule je „pre každé prvočíslo x existuje také iné prvočíslo y, ktoré je deliteľom x", čo je evidentne nepravdivý výraz.

Z toho jednoduchého príkladu vyplýva, že pravdivostná hodnota predikátovej formuly je určená interpretáciou $\mathcal{I}$ premenných, konštánt a predikátov. Na rozdiel od výrokovej logiky, kde je postačujúce špecifikovať len pravdivostné hodnoty výrokových premenných a nemusíme špecifikovať ich význam, v predikátovej logike pri určovaní pravdivostnej hodnoty musíme v rámci danej interpretácie $\mathcal{I}$ špecifikovať význam tak premenných a konštánt, ako aj predikátov.

V rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ predikát P chápeme ako zobrazenie, ktoré je definované nad karteziánskymi produktmi množiny indivíduí (univerzom) $\mathcal{U}$. Potom pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ n-miestny predikát P je interpretovaný ako zobrazenie (pozri obr. 7.3)

$$P:\mathcal{U}^n \rightarrow \{0,1\} \tag{7.18}$$

ktoré usporiadanej n-tici indivíduí $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathcal{U}^n$ priradí binárnu pravdivostnú hodnotu 0/1. To znamená, že predikát môžeme chápať ako špeciálny typ výroku, ktorý je definovaný nad kartézianským produktom univerza $\mathcal{U}^n$ a ktorý má pravdivostnú hodnotuy 0/1. V prípade, že $n = 0$, potom bezargumentový predikát P interpretujeme ako jednoduchú výrokovú premennú.

Príklad 7.6. Uvažujme univerzum $\mathcal{U}=\{Ján, Jozef, Viera, Eva, Maja\}$, pričom rodičia *Ján* a *Viera* majú deti *Jozefa* a *Evu, Maja* je ich známa, nie je v príbuzenskom vzťahu s ostatnými objektmi. Ternárny (n=3) predikát $P(x,y,z)$ je pravdivý, ak indivíduum x má otca y a matku z). V našom prípade, potom pre predikát P platia tieto ilustračné príklady: $P(Jozef, Ján, Viera)=1$, $P(Ján, Jozef, Viera)=0$, $P(Eva, Ján, Viera)=1$, $P(Eva, Eva, Maja)=0$.

Pravdivostná hodnota formuly s univerzálnym kvantifikátorom $(\forall x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ vždy pravdivý. Podobne, formula s existenčným kvantifikátorom $(\exists x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ pravdivý aspoň pre jeden objekt. Potom formula $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y))$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát – podformula $P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y)$ je vždy pravdivá. Táto podmienka je splnená podľa príkladu 7.6 napríklad vtedy, ak jednotlivé výrazy z formule interpretujeme pomocou $\mathcal{I}_1$ (kde univerzum je množina ľudí), predikát $P(x)$ je pravdivý, ak x je učiteľ a predikát $Q(x,y)$ pravdivý vtedy, ak y je žiakom x. Pre alternatívnu interpretáciu $\mathcal{I}_2$ (kde univerzum je množina prvočísel) formula $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y))$ je nepravdivá.

Ako budeme počítať pravdivostnú hodnotu formule pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$? V predchádzajúcom texte už tento proces ohodnotenia formule pravdivostnou hodnotou už bol naznačený pre jednoduchú predikátovú formulu. Vo všeobecnosti, tento proces ohodnotenia pravdivostnou hodnotou obsahuje tieto kroky:

(1) Nech formula φ má tvar $\varphi=P(t_1,t_2,...,t_n)$, kde P je n–miestný predikát s termami t_1, t_2, ..., t_n. Súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je vyhodnotenie tejto formula pravdivostnou hodnotou.

(2) Ak φ a ψ sú formuly, ich pravdivostné vyhodnotené bolo vykonané v predchádzajúcom kroku pre interpretáciu $\mathcal{I}$ (t. j. poznáme $\mathcal{I}\vDash\varphi$ a $\mathcal{I}\vDash\psi$), potom nové formuly majú pravdivostné hodnoty určené takto:

- formula $\mathcal{I} \vDash \neg\varphi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \vDash \varphi$ je nepravdivé (t. j. $(\mathcal{I} \nvDash \varphi) =_{def} \neg(\mathcal{I} \vDash \varphi)$ je pravdivé),
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \wedge \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \vDash \varphi$ a $\mathcal{I} \vDash \psi$,
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \vee \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \vDash \varphi$ alebo $\mathcal{I} \vDash \psi$,
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \Rightarrow \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \nvDash \varphi$ alebo $\mathcal{I} \vDash \psi$,
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \equiv \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak ekvivalencia $(\mathcal{I} \vDash \varphi) \equiv (\mathcal{I} \vDash \psi)$ je pravdivá.

(3) Formula $(\forall x)\,\varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá pre každé $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

(4) Formula $(\exists x)\,\varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá aspoň pre jedno $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

Ak na základe predchádzajúcich krokov 1-4 formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je pravdivá, potom to zapíšeme takto $\mathcal{I} \vDash \varphi$, v opačnom prípade, ak je formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je nepravdivá, potom $\mathcal{I} \nvDash \varphi$.

Definícia 7.3.
(1) Formula φ sa nazýva ***splniteľná*** v interpretácii $\mathcal{I}$ vtedy a len vtedy, ak je v tejto interpretácii pravdivá, $\mathcal{I} \vDash \varphi$.
(2) Formula φ sa nazýva ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak je splniteľná pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \vDash \varphi$, čo zapisujeme $\vDash \varphi$, alebo $(\vDash \varphi) =_{def} (\forall \mathcal{I})(\mathcal{I} \vDash \varphi)$.

Príklad 7.7. Verifikujete, či formula (sentencia) $\alpha = ((\forall x)\,P(x)) \vee (\neg(\forall x)\,P(x))$ je tautológia. Musíme ukázať, že táto formula je pravdivá pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$. Pre zvolenú interpretáciu $\mathcal{I}$ je formula $\beta = (\forall x)\,P(x)$ buď pravdivá alebo nepravdivá, potom však disjunkcia $\beta \vee \neg\beta$ je pravdivá. Dokazovaná formula je vlastne verziou známej tautológie výrokovej logiky $p \vee \neg p$, substitúciou $p/(\forall x)P(x)$ dostaneme verifikovanú sentenciu predikátovej logiky. Týmto jednoduchým spôsobom môžeme zostrojiť mnoho tautológii predikátovej logiky, že do známych tautológií výrokovej logiky zavedieme vhodnú substitúciu sentencie. Tak napríklad použitím tautológie $p \Rightarrow p$ dostaneme napr. túto tautológiu predikátovej logiky $(\forall x\ )P(x) \Rightarrow (\forall x)\,P(x)$.

Základné tautológie predikátovej logiky sú tieto:
1. Eliminácia univerzálenho kvantifikátora (konkretizácia)

$$((\forall x)\,P(x)) \Rightarrow P(t) \tag{7.19a}$$

kde $t \in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza U.
2. Eliminácia existenčného kvantifikátora (konkretizácia)

$$\left(\left(\exists x\ \right)P\left(x\right)\right)\Rightarrow P\left(a\right) \tag{7.19b}$$

kde $a\in U$ je dané konštantné indivíduum z univerza *U*.

3. Zavedenie existenčného kvantifikátora (generalizácia)

$$P\left(a\right)\Rightarrow\left(\left(\exists x\right)P\left(x\right)\right) \tag{7.19c}$$

kde $a\in U$ je dané konštantné indivíduum z univerza *U*.

4. Zavedenie univerzálneho kvantifikátora (generalizácia)

$$P\left(t\right)\Rightarrow\left(\left(\forall x\right)P\left(x\right)\right) \tag{7.19d}$$

kde $t\in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza *U*.

5. Zmena univerzálneho kvantifikátora na existenčný kvantifikátor

$$\left(\forall x\right)P\left(x\right)\Rightarrow\left(\exists x\right)P\left(x\right) \tag{7.19e}$$

Dôkazy týchto tautológií sú pomerne jednoduché a sú vždy založené na vhodnej formule výrokovej logiky. Obráťme našu pozornosť na dôkaz formuly (7.19a). Použijeme formulu (7.15) podľa ktorej formula $\left(\forall x\right)P\left(x\right)$ je konjunkcia predikátov *P* pre všetky objekty z univerza $\mathcal{U}$

$$\left(\forall x\right)P\left(x\right)\equiv P\left(a\right)\wedge P\left(b\right)\wedge\ldots\equiv\bigwedge_{x\in U}P\left(x\right) \tag{7.20}$$

Ak použijeme tautológiu výrokovej logiky $p\wedge q\Rightarrow p$, potom pre pravú stranu (7.20) platí

$$\left(\forall x\right)P\left(x\right)\equiv P\left(a\right)\wedge P\left(b\right)\wedge\ldots\Rightarrow P\left(t\right) \tag{7.21}$$

kde $t\in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza *U*. Ak odstránime prostredný člen v (7.21) dostaneme dokazovanú formulu (7.19a).

Pri dôkazu (7.19b) si musíme uvedomiť , že ak disjunkcia $p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_c$ je pravdivá, potom musí existovať aspoň jeden taký pravdivý výrok $a\in\left\{p_1,p_2,\ldots,p_c\right\}$, že implikácia $p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_c\Rightarrow a$ je pravdivá (nie je tautológia, ale len v danom špeciálnom prípade pravdivá) , t. j. platí

$$\left(\bigvee_{x\in U}p\left(x\right)\Rightarrow p\left(a\right)\right)=\left(\left(\exists x\right)p\left(x\right)\Rightarrow p\left(a\right)\right) \tag{7.22}$$

Čo bolo potrebné dokázať.

Pri dôkaze (7.19c) budeme používať tautológiu výrokovej logiky $p\Rightarrow p\vee q$, potom platí

$$P\left(a\right)\Rightarrow P\left(a\right)\vee P\left(b\right)\vee\ldots\equiv\left(\exists x\right)P\left(x\right) \tag{7.23}$$

čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz (7.19d) je založený na pravdivej formule výrokovej logiky $t\Rightarrow p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_c$, kde $t=p_i$, pre i = 1,2,...,c (podobne, ako v dôkaze (7.19b), tato formula nie je tautológia, ale len v danom špeciálnom prípade pravdivá). Potom

$$\left(p\left(t\right)\Rightarrow\text{í}_{x\in U}\ p\left(x\right)\right)=\left(p\left(t\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)p\left(x\right)\right) \tag{7.24}$$

Čo bolo potrebné dokázať.

Tautológia (7.19e) vyplýva z (7.19a-b) a zákona výrokovej logiky hypotetického sylogizmu $\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\left(q\Rightarrow r\right)\Rightarrow\left(p\Rightarrow r\right)$.

V prvej kapitole bol zavedený pojem duálnej výrokovej formuly $\tilde{\varphi}$ vzhľadom k výrokovej formuly φ, ktorá obsahuje jen logické spojky negácie, konjunkcie a disjunkcie (t. j. logické spojky implikácie boli odstránené ekvivalenciou $\left(p\Rightarrow q\right)\equiv_{def}\left(\neg p\vee q\right)$). Poznamenjme, že táto duálna formula $\tilde{\varphi}$ bola vytvorená z formuly φ tak, že konjunkcie a disjunkcie boli vzájomne zamenené. Teraz obrátime našu pozornosť na vytvorenie duálnej formuly predikátovej logiky.

Definícia 7.4.
Nech φ je formula predikátovej logiky, ktorá je zostrojená nad množinou logických symbolov $\{\neg,\wedge,\vee,\forall,\exists,0,1\}$. Hovoríme, že formula $\tilde{\varphi}$ je ***duálna*** vzhľadom k formule φ práve vtedy, ak vznikla z φ zámenou spojok konjunkcie a disjunkcie, existenčných a univerzálnych kvantifikátorov a a pravdivostných konštánt, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\exists \leftrightarrow \forall$ a $0 \leftrightarrow 1$.

Príklad 7.8. Použitím definície 7.4 zostrojte duálnu formulu k formule predikátovej logiky $\varphi = (\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\exists x)\, p(x) \Rightarrow (\exists x) q(x))$. V prvom kroku odstránime z formuly spojku implikácie, dostaneme $\varphi = \neg(\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)) \vee (\neg(\exists x)\, p(x) \vee (\exists x) q(x))$, potom duálna formula má tvar $\tilde{\varphi} = \neg(\exists x)(\neg p(x) \wedge q(x)) \wedge (\neg(\forall x)\, p(x) \wedge (\forall x) q(x))$, alebo zjednodušovacích úpravách dostaneme konečný tvar duálnej formuly

$$\tilde{\varphi} = (\forall x)(p(x) \vee \neg q(x)) \wedge ((\exists x)\neg p(x) \wedge (\forall x) q(x))$$

Duálne predikátové formuly budú používané v konštrukcii sémantických tabiel v predikátovej logike, ich inverziou zostrojíme diagramy prirodzenej dedukcie.

7.2.3 Vybrané zákony predikátovej logiky

Distributívne zákony kvantifikátorov:

- $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$ (7.25a)
- $(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ (7.25b)
- $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)$ (7.25c)
- $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x)$ (7.25d)
- $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\forall x)\, Q(x))$ (7.25e)
- $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x)\, Q(x))$ (7.25f)

Dôkaz tautologickosti týchto formúl je ponechaná čitateľovi ako cvičenie (pozri príklad 7.9).

7.2.4 *Odvodzovanie formúl predikátovej logiky, logický dôkaz*

Axiomatický systém predikátovej logiky je rozšírením axiomatického systému výrokovej logiky, ktorý bol prezentovaný v kapitole 2.2 a ktorý sa zaoberal odvodzovaním formúl výrokovej logiky.

Pravidlá logického dôkazu (2.1.-3) sú rozšírené o ďalšie štvrté pravidlo:

(4) ***Pravidlo zovšeobecnenia***. Ak je pravdivá formula $\varphi(x)$ pre každé *x*, pričom táto premenná sa vyskytuje len ako voľná premenná v každej časti celkového dôkazu, potom ju môžeme zovšeobecniť do tvaru s univerzálnym kvantifikátorom

$$\frac{\varphi(t)}{\forall x\, \varphi(x)} \qquad (7.26)$$

Axiómy výrokovej logiky (1.7a-j) sú rozšírené o ďalšie, ktoré obsahujú univerzálny kvantifikátor $\forall$:

$$\boldsymbol{Ax_{11}}.\ \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t) \tag{7.27a}$$

$$\boldsymbol{Ax_{12}}.\ \forall x\, \big(\varphi \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow \big(\varphi \Rightarrow \forall x\, \psi(x)\big) \tag{7.27b}$$

Definovaný axiomatický systém predikátovej logiky neobsahuje existenčný kvantifikátor $\exists$. Môže byť dodefinovaný do nášho systému ako „metasymbol" k označeniu zložených formúl špeciálneho tvaru

$$\exists x\, \varphi(x) =_{def} \neg\forall x \neg\varphi(x) \tag{7.28}$$

Na záver pristúpime k modifikácii definície 2.3, ktorá definuje pojmy dôsledok a dôkaz pre výrokovú logiku.

Definícia 7.3.

(1) *Formula φ je **bezprostredným dôsledkom** množiny formúl Φ, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formule z Φ.*

(2) *Formula φ je **logickým dôsledkom (dokázateľná)** množiny formúl Φ (čo označíme $\Phi \vdash \varphi$), ak $\varphi \in \Phi$ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(3) ***Dôkazom (logickým)*** formuly φ *z množiny Φ je každá konečná postupnosť formúl $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, pričom $\varphi = \varphi_n$ a každá formula z tejto postupnosti je buď bezprostredným dôsledkom niektorých formúl z Φ* alebo formúl z $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}$.

Veta 7.5 (o dedukcii). *Nech Φ je množina formúl a φ, ψ sú nejaké dve formule, potom $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ platí vtedy a len vtedy (vtt) ak $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$*

$$(\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi)\ vtt\ (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \tag{7.29}$$

Dôkaz tejto vety je úplne analogický dôkazu podobnej vety (2.3) o dedukcii vo výrokovej logike, preto ho už na tomto mieste nebudeme opakovať. Poznamenajme, že veta o dedukcii umožňuje podstatné skrátenie dôkazov formúl predikátovej logiky. Výhodnosť tejto vety spočíva v tom, že ak postupujeme len podľa pravidiel logického dôkazu (2.1-3) a (7.2), musíme striktne dokázať každú formulu postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ v príslušných predchádzajúcich krokoch dôkazu. Ak použijeme vetu 7.5 o dedukcii ako nové pravidlo dôkazu, môžeme použiť ad-hoc dve formuly φ a ψ , ak sa nám ich už podarilo dokázať v predchádzajúcej úvahách.

V kapitole 2.3 bola dokázaná Postova veta (2.5) o úplnosti, ktorá má pre výrokovú logiku fundamentálny význam a hovorí o tom, že dokázateľná formula je tautológia a naopak, čo formálne môžeme zapísať ako $(\models \varphi)\ vtt\ (\vdash \varphi)$. Podobnú vetu pre predikátovú logiku dokázal v r. 1930 Gödel.

Veta 7.6. Pre súbor formúl predikátovej logiky Φ a pre formulu φ platí

$$(\Phi \vdash \varphi)\ vtt\ (\Phi \models \varphi) \tag{7.30}$$

Dôkaz tejto vety je netriviálny, vyžaduje špeciálne znalosti z univerzálnej algebry a teórie modelov.

Na záver tejto kapitoly môžeme si položiť otázku, či formálny systém predikátovej logiky má podobné vlastnosti ako formálny systém výrokovej logiky, t.j. kladieme si otázku, či je korektný, nerozporný, úplný a rozhodnuteľný. Na základe toho, čo bolo v tejto kapitole prezentované. môžeme uzavrieť, že predikátová logika má podobné vlastnosti ako výroková logika, je

- **korektná**,
- **nerozporná** a
- **úplná**.

Výroková logika bola taktiež charakterizovaná aj štvrtou vlastnosťou, a to, že je rozhodnuteľná. Musíme zdôrazniť, že v predikátovej logike neexistuje všeobecný algoritmus, ktorý by vždy rozhodol s absolútnou istotou, či daná formula predikátovej logiky je tautológia, kontradikcia, alebo len splniteľná. Ako bolo ukázané v podkapitole 7.2.2, proces rozhodnuteľnosti je silne závislý od vhodnej interpretácie $\mathcal{I}$, v rámci ktorej sa vlastne pravdivosť alebo nepravdivosť formuly študuje. Vo všeobecnosti platí, že predikátová logika je nerozhodnuteľná, ak obsahuje aspoň jednu dvojmiestnú reláciu Ako najjednoduchší protipríklad k tomuto tvrdeniu uvedieme predikátovú logiku obsahujúcu len unárne predikáty (t. j. predikáty s jedným argumentum), potom je rozhodnuteľná, napríklad pomocou metódy rezolventy alebo pomocou metódy sémantických tabiel. Preto sa niekedy hovorí, že predikátová logika je **polorozhodnuteľná** (angl. semidecidable). Táto dôležitá vlastnosť predikátovej logiky bola dokázaná americkým logikom A. Churchom v r. 1936, týmto dal definitívnu odpoveď na slávny trinásty Hilbertov problém rozhodnuteľnosti (nem. Entscheidungsproblem) pre predikátovú logiku. Tento Hilbertov problém bol študovaný vo všeobecnej rovine anglickým matematikom a logikom A. Turingom v r. 1931. Dokázal, že neexistuje univerzálny algoritmus, pomocou ktorého by sa dal vyriešiť každý problém rozhodnuteľnosti.

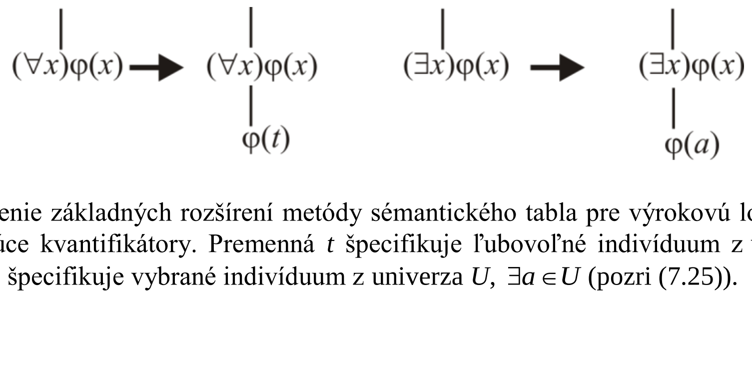
7.3 Sémantické tablá

Technika sémantických tabiel pre predikátovú logiku je jednoduchou modifikáciou sémantických tabiel z výrokovej logiky (pozri kapitolu 3 a obr. 3.1) o rozšírenia, ktoré zahŕňajú univerzálne a existenčné kvantifikátory. Pre jednoduchosť budeme študovať len také formuly predikátovej logiky, ktoré neobsahujú súčiny kvantifikátorov (napr. $(\exists x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)P(x,y)$). Tieto rozšírenia sú založené na nasledujúcich zákonoch predikátovej logiky

$$(\forall x)\varphi(x)\Rightarrow\varphi(t) \tag{7.31a}$$

$$(\exists x)\varphi(x)\Rightarrow\varphi(a) \tag{7.31b}$$

kde t je ľubovoľný objekt (indivíduum) z univerza U, a je daný konštantný objekt (indivíduum) z univerza U. , ktoré sú priamym dôsledkom zákonov (7.19a-b) (pozri obr. 7.4).

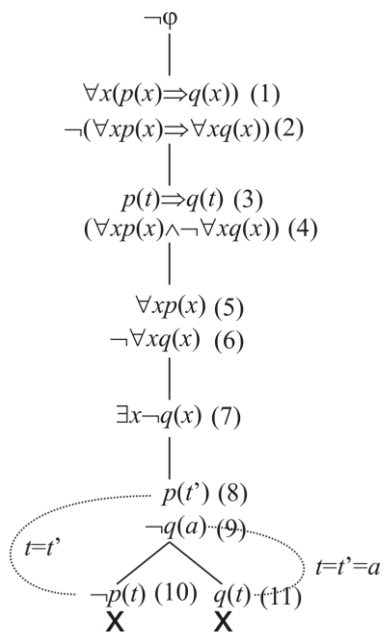


Obrázok 7.4. Doplnenie základných rozšírení metódy sémantického tabla pre výrokovú logiku (pozri obr. 3.1) o rozšírenia obsahujúce kvantifikátory. Premenná t špecifikuje ľubovoľné indivíduum z univerza U, $\forall t\in U$; podobne, konštanta a špecifikuje vybrané indivíduum z univerza U, $\exists a\in U$ (pozri (7.25)).

Príklad 7.9. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = \forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)\big)$ je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 7.3.

Jednotlivé formuly sémantickom table obr. 7.4 sú indexované a majú tento význam:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$, pozri obr. 3.1, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Na formulu (1) bola použitá schéma sme predĺženia z obr. 7.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a všeobecná indivíduová premenná *x* bola nahradená ľubovoľnou indivíduovov konštantou *t*, vznikla formula (3).
- Formula (4) vznikla aplikáciou ekvivalencie $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ na formulu (2).
- Formuly (5) a (6) vzikli predĺžením (4) podľa schémy z obr. 3.1, diagram B.
- Formula (7) vznikla z (6) ekvivalentným prepisom $\neg\forall x R(x) \equiv \exists x \neg R(x)$.
- Formula (8) vznikla z (5) použitím predĺženia z obr. 7.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduovú premennú *x* sme nahradili ľubovoľnou indivíduovov konštantou t'.
- Formula (9) vznikla z (7) aplikáciou predĺženia z obr. 7.3, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduovú premennú *x* sme nahradili vybranou indivíduovov konštantou *a*. Podobne, formula (10) vznikla z (8) odstránením univerzálneho kvantifikátora.
- Vzniklé sémantické tablo ma dve vetvy. Ľavá vetva je uzavretá, pretože môžeme vytvoriť kontradikciu tak, že položíme $t = t'$ (poznamenajme, že tieto konštanty sú ľubovolné). Pravá vetva je taktiež uzavretá, kontradikciu vytvoríme tak, že položíme $t = a$. Tieto dve podmienky sú realizovateľnú súčasne, čo môžeme napišať ako $t = t' = a$.

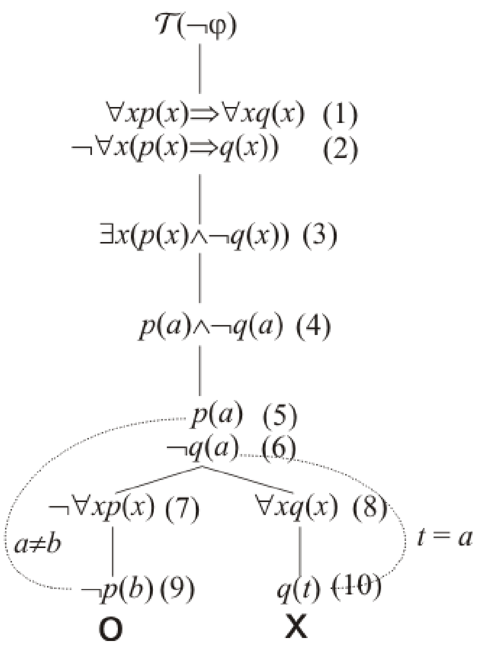


Obrázok 7.3. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\forall x)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)\, p(x) \Rightarrow (\forall x) q(x)\big)$. Pretože tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, formula φ je tautológia, čo bolo potrebné dokázať.

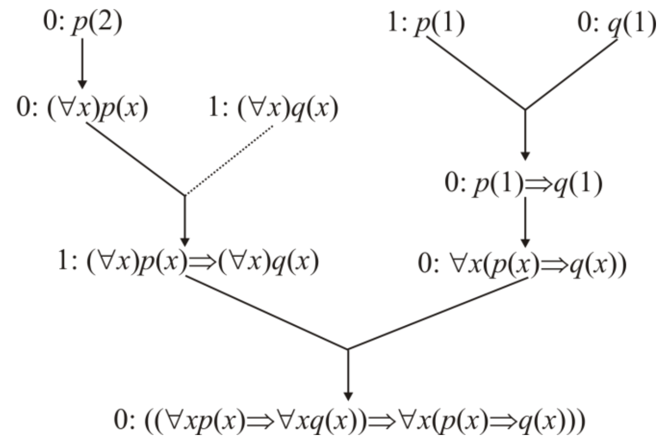
Príklad 7.10. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = (\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$ nie je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 7.4.

Podobne, ako v predchádzajúcom príklade, aj teraz prestúpime k podrobnej špecifikácii každého riadku sémantického tabla z obr. 7.4:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$, pozri obr. 3.1, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Formula (3) vznikla z (2) aplikáciou ekvivalencií $\neg(\forall x)R(x) \equiv (\exists x)\neg R(x)$ a $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$.
- Formula (4) vznikla z (3) použitím predĺženia z obr. 7.3, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduová premenná *x* bola nahradená danou indivíduovov konštantov *a*.
- Formuly (5) a (6) vznikli z (4) použitím predĺženia z obr. 3.1, diagram B.
- Formuly (7) a (8) vznikli z (1) použitím predĺženia z obr. 3.1, diagram C.
- Formula (9) vznikla z (7) použitím predĺženia z obr. 7.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduová premenná *x* bola nahradená danou indivíduovov konštantou *b*.
- Ľavá vetva sémantického tabla neprodukuje vo všeobecnosti kontradikciu (nie je uzavretá), potenciálna možnosť je tvorby pomocou (5) a (9) nemôže existovať, pretože vo všeobecnosti platí $a \neq b$.
- Pravá vetva je uzavretá, v tomto prípade vytvoríme kontradikciu podmienkou $t = a$.
- Sémantické tablo nie je uzavreté, preto formula φ nie je tautológia.



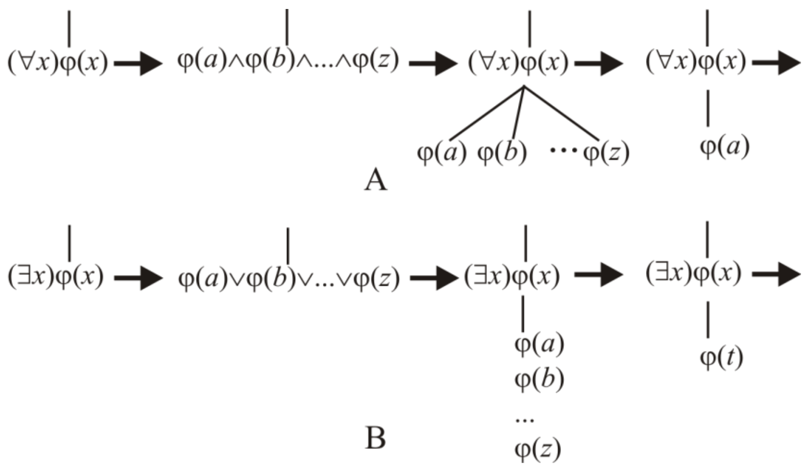
Obrázok 7.4. Sémantuické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ pre formulu $\varphi = (\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$. Tablo nie je uzavreté, preto formula φ nie je tautológia, je len splniteľná s interpretáciou zostrojiteľnou pomocou otvorenej vetvy.



Obrázok 7.5. Diagramatická falzifikácie tautologičnosti formuly $((\forall x)\,p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)) \Rightarrow (\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$ na základe počiatočných predpokladov $p(a)=1, \neg q(a)=1, \neg p(b)=1$, ktoré boli získané z ľavej vetvy sémantického tabla z obr. 7.6. Posledný riadok diagramatickej interpretácie znamená, že pre dané podmienky pravdivostná hodnota formuly je nepravda, t. j. formula nemôže byť tautológiou.

Poznamenajme, že otvorená ľavá vetva sémantického tabla môže byť použitá na konštrukciu takej interpretácie, pre ktorú je formula φ je nepravdivá, t. j. požiadavka tautologičnosti formuly φ je falzifikovaná. Z ľavej vetvy pre hodnoty predikátov p a q dostaneme tieto hodnoty: $p(a)=1, \neg q(a)=1, \neg p(b)=1$. Pre jednoduchosť položíme a = 1 a b = 2, potom $p(1)=1, \neg q(1)=1, \neg p(2)=1$. Z prvých dvoch podmienok odvodíme ich konjunkciu $p(1) \wedge \neg q(1)=1$, čo môžeme zovšeobecniť pomocou existenčného kvantifikátora $\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)) = \exists x \neg(p(x) \Rightarrow q(x)) = \neg\forall x(p(x) \Rightarrow q(x)) = 1$, Z tretej podmienky $\neg p(2)=1$ môžeme vyvodiť: $\exists x \neg p(x) = \neg\forall x p(x) = 1$. Tento výsledok môžeme pomocou disjunkcie rozšíriť, $\neg\forall x p(x) \vee \forall x q(x) = \forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x) = 1$. Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu pravdivostnej hodnoty formuly φ, $((\forall x)\,p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)) \Rightarrow (\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv (1 \Rightarrow 0) \equiv 0$. Tento dôležitý moment využitia sémantického table pre konštrukciu falzifikácie tautologičnosti danej formuly môžeme aj znázorniť diagramatický, pozri obr. 7.45.

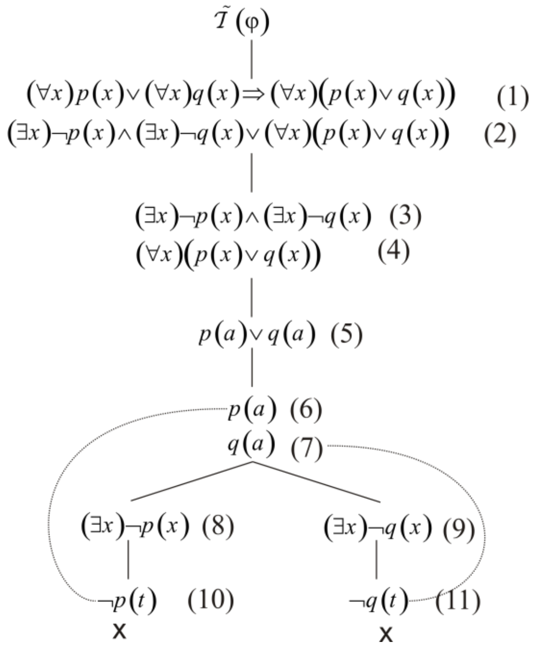
Tieto dva ilustračné príklady ukazujú na potenciálnu vhodnosť sémantických tabiel pre konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl predikátovej logiky, kde majú nezastúpiteľnú úlohu pre konštrukciu pravdivostných hodnôt, pretože v predikátovej logike je tabuľková metóda nepoužiteľná.



Obrázok 7.6. Predlžovanie duálneho sémantického tabla pre formulu, ktorá obsahuje univerzálny kvantifikátor (diagram A, kde a je vybraný konštantný objekt $a \in U$) a existenčný kvantifikátor (diagram B, kde t je ľubovoľný objekt $t \in U$).

V kapitole 3.2.2 boli študované duálne sémantické tablá vo výrokovej logike. Ako bolo ukázané v tejto kapitole, ich hlavná výhoda spočíva v tom, že v prípade, ak duálne sémantické tablo $\tilde{T}(\varphi)$ je uzavreté, potom formula φ je tautológia a inverziou duálneho tabla zostrojíme dôkaz tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie.

Príklad 7.13. Použitím duálneho sémantického tabla dokážte tautologickosť predikátovej formuly $\varphi = \left(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)\right) \Rightarrow \forall x\left(p(x) \vee q(x)\right)$, pozri obr. 7.6 a 7.7. V prvom kroku odstránime implikáciu, dostaneme $\varphi = \left(\exists x \neg p(x) \wedge \exists x \neg q(x)\right) \vee \forall x\left(p(x) \vee q(x)\right)$. Postupne odstraňujeme kvantifikátory pomocou pravidiel z obr. 7.7, na záver dostaneme že vytvorené duálne sémantické tablo je uzavreté, t. j. formula $\varphi = \left(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)\right) \Rightarrow \forall x\left(p(x) \vee q(x)\right)$ je tautológia.



Obrázok 7.7. Dôkaz pomocou duálneho tabla, že formula $\varphi = \left(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)\right) \Rightarrow \forall x\left(p(x) \vee q(x)\right)$ je tautológia.

Cvičenie

Cvičenie 7.1. Vety prepíšte pomocou jazyka predikátovej logiky, použite symboly uvedené v úlohách.
(a) Niekto má hudobný sluch (H) a niekto ho nemá.
(b) Niektoré dieťa (D) nemá rádo čokoládu (C)
(c) Nik, kto nezvládol zásady bezpečnosti práce (B), nemôže pracovať v laboratóriu (L).
(d) Nie každý talentovaný maliar (M) vystavuje svoje práce v národnej galérii (G).
(e) Len študenti (S) si môžu kupovať studené večere (V).
(f) Nie každá osoba (O), ktorá absolvovala drahý kurz lietania (K), je dobrý pilot(P).

Cvičenie 7.2. Vety prepíšte pomocou symbolov predikátov a konštánt.
(a) Karol videl Shakespearovu hru Hamlet.
(b) Karol videl nejakú hru od Shakespeara.
(c) Niekto videl Shakespearovu hru Hamlet
(d) Niekto videl hru od Shakespera.
(e) Nie každý videl hru od Shakespera.
(f) *Karol videl nejakú hru.*
(g) ***Shakespeare nenapísal hru Pygmalion.***

Cvičenie 7.3. Pre dané predikátové symboly P**,** Q a konštantné symboly a, b, pričom Q je binárny predikát a P je unárny predikát, funkcia f je binárna a funkcia s je unárna. Rozhodnite, ktoré výrazy sú formuly predikátovej logiky a nakreslite ich syntaktický strom.
(a) $Q\left(f(a),s(b)\right)$,
(b) $P\left(f\left(x,s(x)\right)\right)$,
(c) $\forall x\left(Q\left(f(x,a),b\right)\Rightarrow P\left(f(a,b)\right)\right)$
(d) $\left(\forall x\, P\left(f(x,b)\right)\Rightarrow\left(\exists y\, Q\left(f(y),P(y)\right)\right)\right)$.
(e) $\left(P(x)\wedge Q\left(f(x,y)\right)\Rightarrow\left(\exists y\left(P(y)\vee P\left(f(y)\right)\right)\right)\right)$.
(f) $\exists x\left(P\left(Q(x,y)\right)\Rightarrow Q(a,b)\right)$.
(g) $\exists x\left(P(x)\Rightarrow\left(\exists y\, Q(x,y)\right)\right)$.

Cvičenie 7.4. Napíšte všetky podformuly z cvičenia 7.3.

Cvičenie 7.5. Označte všetky premenné, ktoré sú viazané a všetky premenné, ktoré sú voľné. Ak v danej formule sa vyskytujú také premenné, ktoré sú súčasne viazané a aj voľne, prepíšte formulu do takého tvaru, aby daná premenná buď bola viazaná alebo voľna. Ktoré formule sú otvorené formule a ktoré sú sentencie?
(a) $\forall x\,\exists y\, Q(x,y)$
(b) $Q\left(f(a,b),y\right)\Rightarrow\left(\exists y\, P\left(s(y)\right)\right)$.
(c) $Q(a,b)\vee\left(\forall x\, Q(a,x)\right)$.
(d) $Q(x,y)\vee Q(y,x)$.

(e) $Q(a,b) \wedge (\exists x \, \exists y \, Q(x,y))$.

(f) $(\forall x \, Q(a,x)) \Rightarrow (\forall x \, \exists y \, Q(y,x))$.

Cvičenie 7.6. Napíšte všetky podformule z cvičenia 7.5.

Cvičenie 7.7. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.
(a) Vtáky sa množia vajcami.
(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Študenti nie vždy veľa študujú
(d) Žiadne schody nevedú do neba.
(e) Každá sa pokúša vyštudovať na vysokej škole.
(f) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
(g) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(h) Neexistuje dym bez ohňa.

Cvičenie 7.8. Pomocou sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formúl:

(a) $(\forall x \, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y \, \varphi(y))$

(b) $\neg(\forall x \, \varphi(x)) \equiv (\exists x \, \neg\varphi(x))$

Cvičenie 7.9. Dokážte tautologičnosť formúl

(a) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)$

(b) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$,

(c) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$

(d) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x) P(x) \Rightarrow (\forall x) Q(x))$

Literatúra

[1] D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hahnle, R., Posegga, J. (eds.): *Handbook of Tableau Methods*. Springer, Berlin 1999.

[2] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[3] Kvasnička V., Pospíchal, J.: Technika sémantických tabiel v logike. In *Umelá inteligencia a kognitívna veda*, II. Dieľ. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2010.

[4] Peregrin, J: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[5] Smullyan, R. M.: *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin 1968 (slovenský preklad *Logika prvého rádu*. ALFA, Bratislava, 1979).

[6] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[7] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[8] Zouhar, M.: Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory. Veda, Bratislava, 2008.