Riešenie cvičení z 8. kapitoly

Cičenie 8.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:
(a) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$

1.	$\forall x\, \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t)$	E∀ na 1.
3.	$\varphi(a)$	substitúcia premennej $a = t$
4.	$\exists x\, \varphi(x)$	I∃ na 3.
Ť.	$\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$	deaktivácia pomocného predpokladu

(b) $\neg\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\exists x\, \neg\varphi(x)\right)$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\forall x\, \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$	I∀.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus tollens na 1. a 2.
4.	$\neg\varphi(a)$	substitúcia premennej t = a
5.	$\exists x \neg\varphi(x)$	I∃
6.	$\neg\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \exists x \neg\varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

$\Leftarrow$

1.	$\exists x\, \neg\varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\exists x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\varphi(a)$	E∃
3.	$\neg\varphi(a)$	modus ponens na 1. a 2.
4.	$\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)$	E∀
5.	$\neg\forall x \varphi(x)$	modus tollens na 3. a 4.
6.	$\exists x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

(c) $\neg\left(\exists x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \neg\varphi(x)\right)$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\exists x\, \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$	I∃.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus tollens na 1. a 2.
4.	$\forall x \neg\varphi(x)$	I∃
5.	$\neg\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x \neg\, \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

$\Rightarrow$

1.	$\forall x \neg\varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\forall x\neg\varphi(x)\Rightarrow\neg\varphi(t)$	E$\forall$.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus polens na 1. a 2.
4.	$\exists x\varphi(x)\Rightarrow\varphi(t)$	I$\exists$
5.	$\neg\exists x\,\varphi(x)$	modus tollens na 3. a 4.
6.	$\forall x\,\neg\varphi(x)\Rightarrow\neg\exists x\,\varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

Poznámka: Formulu (c) možno aj priamo odvodiť z formuly (b) vhodnou substitúciou.

(d) $(\forall x\,\varphi(x))\Rightarrow\varphi(t)$

Táto formula priamo vyplýva z definície univerzálneho kvantifikátora a z tautológie $p\wedge q\Rightarrow p$

(e) $\varphi(a)\Rightarrow(\exists y\,\varphi(y))$

Táto formula priamo vyplýva z definície existenčného kvantifikátora a z tautológe $p\wedge q\Rightarrow p$

Cvičenie 8.2. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte distributívne zákony formuly kvantifikátorov (7.25)

(a) $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\equiv(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

$\Rightarrow$

1. $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(t)\wedge Q(t)$ E$\forall$ na 1.
3. $P(t)$ E$\wedge$ na 2.
4. $Q(t)$ E$\wedge$ na 2.
5. $(\forall x)P(x)$ I$\forall$ na 3.
6. $(\forall x)Q(x)$ I$\forall$ na 4.
7. $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$ I$\wedge$ na 5. a 6.
8. $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$ deakt. pomoc. predpokladu 1.

$\Leftarrow$

1. $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $(\forall x)P(x)$ E$\wedge$ na 1.
3. $(\forall x)Q(x)$ E$\wedge$ na 1.
4. $P(t)$ E$\forall$ na 2.
5. $Q(t)$ E$\forall$ na 3.
6. $P(t)\wedge Q(t)$ I$\wedge$ na 4. a 5.
7. $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ I$\forall$ na 6.
8. $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ deakt. pomoc. predpokladu 1.

(b) $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)\Rightarrow(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$

1. $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $(\forall x)\,P(x)$ 2. $(\forall x)\,Q(x)$ E$\vee$
3. $P(t)$ 3. $Q(t)$ E$\forall$
4. $P(t)\vee Q(t)$ I$\vee$
5. $\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ I$\forall$
6. $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)\Rightarrow(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ deakt. pomoc. predpokladu

(c) $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\equiv(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$

$\Rightarrow$
1. $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(a)\vee Q(a)$ E$\exists$
3. $P(a)$ 3. $Q(a)$
4. $(\exists x)\,P(x)$ 4. $(\exists x)\,Q(x)$
5. $(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$
6. $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$

$\Leftarrow$
1. $(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $(\exists x)\,P(x)$ 2. $(\exists x)\,Q(x)$
3. $P(a)$ 2. $Q(b)$
4. $P(a)\vee Q(b)\Rightarrow\big(P(a)\vee Q(a)\big)\vee\big(P(b)\vee Q(b)\big)$
5. $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$
6. $\big((\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ deakt. pomoc. predpokladu

(d) $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$

1. $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(a)\wedge Q(a)$
3. $P(a)$
4. $Q(a)$
5. $(\exists x)\,P(x)$
6. $(\exists x)\,Q(x)$
7. $(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$
8. $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$ deakt. pomoc. predpokladu

(e) $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)\right)$

1. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(t)\Rightarrow Q(t)\equiv\left(\neg P(t)\vee Q(t)\right)$
3. $\neg P(t)$ 3. $Q(t)$
4. $\exists x\neg P(x)\equiv\neg\forall xP(x)$ 4. $(\forall x)Q$
5. $\neg\forall xP(x)\vee(\forall x)Q$
6. $(\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)$
7. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)\right)$

(f) $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)\right)$

1. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(t)\Rightarrow Q(t)\equiv\left(\neg P(t)\vee Q(t)\right)$
3. $\neg P(t)$ 3. $Q(t)$
4. $\forall x\neg P(x)\equiv\neg\exists xP(x)$ 4. $(\exists x)Q$
5. $\neg\exists xP(x)\vee(\exists x)Q(x)\equiv\exists xP(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)$
6. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)\right)$ deakt. pomoc. predpokladu

Cvičenie 8.3. Riešte tieto sylogizmy:
(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?
$\varphi_1: \forall x\left(st(x)\Rightarrow mat(x)\right)\Rightarrow\left(st(t)\Rightarrow mat(t)\right)$
$\varphi_2: \forall x\left(mat(x)\Rightarrow\neg analf(x)\right)\Rightarrow\left(mat(t)\Rightarrow\neg analf(t)\right)$
použitím hypotetického sylogizmu $(p\Rightarrow q)\Rightarrow\left((q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)\right)$
dostaneme
$\left(st(t)\Rightarrow\neg analf(t)\right)$ pre ľubovoľné indivíduum *t*, čiže platí aj
$\boxed{\forall x\left(st(x)\Rightarrow\neg analf(x)\right)}$
Záver zo sylogizmu je: „každý študent nie je analfabet“.

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?
$\varphi_1: \exists x\left(st(x)\wedge kom(x)\right)\Rightarrow\left(st(a)\wedge kom(a)\right)$
$\varphi_2: \exists x\left(kom(x)\wedge mat(x)\right)\Rightarrow\left(kom(b)\wedge mat(b)\right)$
Vo všeobecnosti platí $a\neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$\varphi_1: \forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a)\right)$

$\varphi_2: \exists x\left(analf(x) \wedge vce(x)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge vce(a)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} analf(a) \\ vce(a) \end{array}\right\} eliminácia\ pravej\ strany\ \varphi_2$$

$\neg st(a)$

$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \boxed{\exists x\left(vce(x) \wedge \neg st(x)\right)}$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje analfabet): „niektorý včelár nie je študent“.

(d)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$

$\varphi_2: \forall x\left(chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a)\right)$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí $fyz(a)$ a $astr(a)$. Použitím $fyz(a)$ a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg chem(a)$. To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$\boxed{astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\ astr(x) \wedge \neg chem(x)}$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú chemici“.

(e)
niektorí fyzici sú astronómovia
niektorí astrológovia sú astronómovia

?

$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$

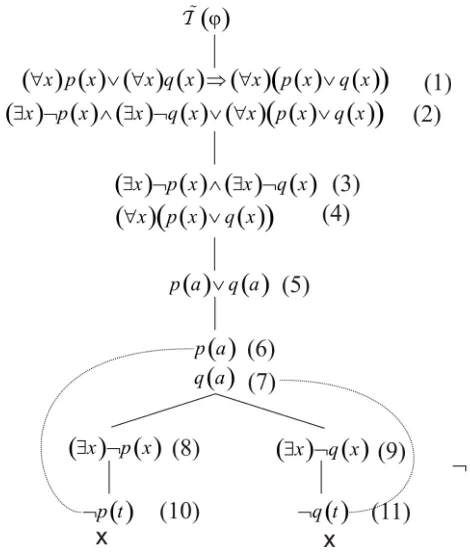
$\varphi_2: \exists x\left(astrolog(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(astrolog(b) \wedge astr(b)\right)$

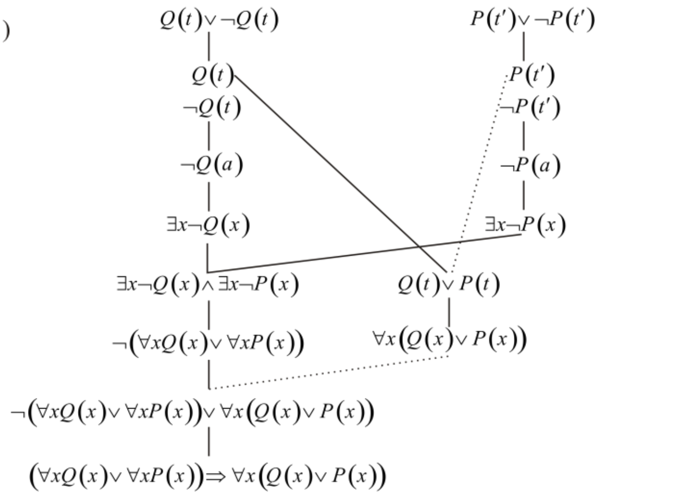
Sylogizmus nemá platný záver.

Cvičenie 8.4. Pomocou duálnych sémantických tabiel dokážte tautologickosť formúl a potom vykonajte pomocou inverzného table ich odvodenie pomocou prirodzenej dedukcie.

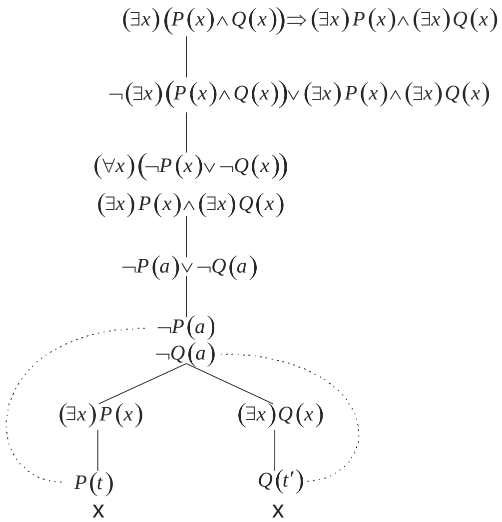
(a) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\left(P(x) \vee Q(x)\right)$

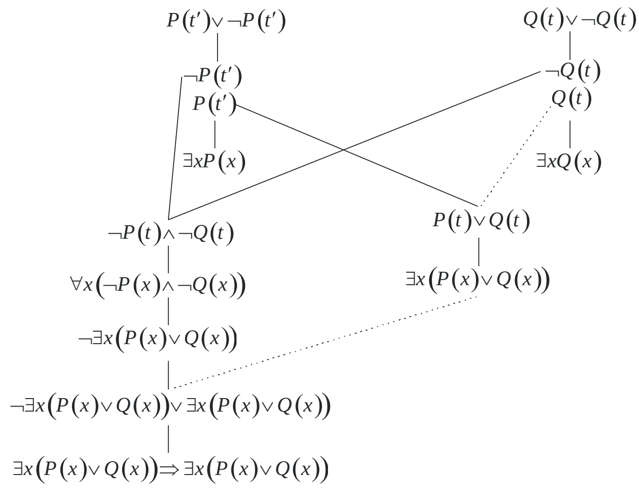
Dôkaz tautologičnosti tejto formuly bol už vykonaný v príklade 5.13, obr. 5.8, preto pristúpime priamo k dôkazu tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie založenom na duálnom sémantickom table.



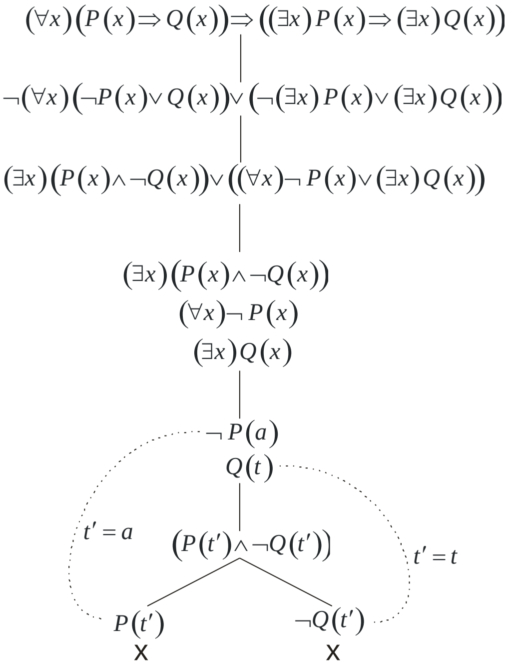


(b) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$

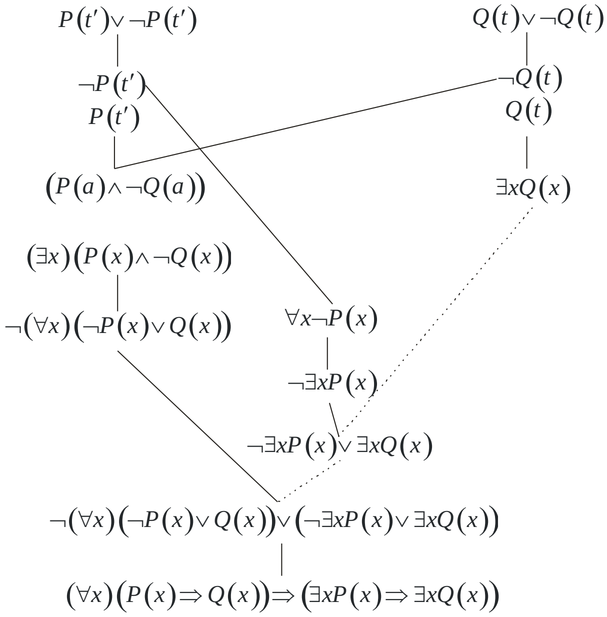




(c) $(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))\Rightarrow((\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x))$



$(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)\big)$
$\neg(\forall x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)\vee\big(\neg(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)\big)$
$(\exists x)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)\vee\big((\forall x)\neg P(x)\vee(\exists x)Q(x)\big)$
$(\exists x)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)$
$(\forall x)\neg P(x)$
$(\exists x)Q(x)$
$\neg P(a)$
$Q(t)$
$t'=a$
$\big(P(t')\wedge\neg Q(t')\big)$
$t'=t$
$P(t')$
$\neg Q(t')$
x
x



$P(t')\vee\neg P(t')$
$Q(t)\vee\neg Q(t)$
$\neg P(t')$
$P(t')$
$\neg Q(t)$
$Q(t)$
$\big(P(a)\wedge\neg Q(a)\big)$
$\exists x Q(x)$
$(\exists x)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)$
$\neg(\forall x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)$
$\forall x\neg P(x)$
$\neg\exists x P(x)$
$\neg\exists x P(x)\vee\exists x Q(x)$
$\neg(\forall x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)\vee\big(\neg\exists x P(x)\vee\exists x Q(x)\big)$
$(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big(\exists x P(x)\Rightarrow\exists x Q(x)\big)$