Cvičenia

Cvičenie 7.1. Ako je špecifikovaný mentálny model v kognitívnej vede?

Riešenie. Mentálne modely (alebo mentálne modelovanie) boli prvý krát postulované škótskym psychológom Kenneth Craikom v r. 1943, ktorý predpokladal, že ľudská myseľ obsahuje malé modely reality, pomocou ktorých sme schopný prijať - anticipovať udalosti, uvažovať a vysvetlovať. Model existuje v pracovnej pamäti a je tvorený ako výsledok komunikácie alebo predstavivosti. Základnou črtou mentálnych modelov je, že sú „izomorfné“ s objektom, ktorý reprezentujú (podobne, ako sú chemické molekulárne modely podobné molekulám). O rozpracovanie mentálnych modelov v kognitívnej vede sa zaslúžil hlavne v 80-tych rokoch minulého storočia Johnson-Laird, ukázal efektívnosť tohto prístupu na širokej triede problémov kognitívnej vedy k modelovaniu kognitívnych procesov s tým, že požadoval aj ich interpretačnú a predikčnú silu. Podľa Johnson-Lairda, použitie mentálnych modelov v kognitívnej psychológii odstránilo jej deskriptívny charakter, bez snahy interpretovať pozorované výsledky.

Cvičenie 7.2. Ako je špecifikovaný syntaktický prístup k tvorbe mentálneho modelu usudzovania?

Riešenie. Mentálny model je stotožnený s Gentzenovou prirodzenou dedukciou, ktorá obsahuje okolo tuctu pravidiel usudzovania vychádzajúcich z elementárnych zákonov logiky s jednoduchou a jasnou interpretáciou ich významu. Z množiny predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ použitím vyššie zmienených pravidiel prirodzenej dedukcie odvodíme záver ψ. Hovoríme, že tento záver ***logicky vyplýva*** z predpokladov (alebo, že existuje logický dôkaz formuly ψ z množiny predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$), čo zapisujeme pomocou „relácie“ $\vdash$ takto: $\Phi \vdash \psi$. Syntaktický prístup k tvorbe mentálneho modelu logiky je vhodný pre ľudí, ktorí už absolvovali určité základné vzdelanie z logiky a preto môžu suverénne používať prirodzenú dedukciu ku konštrukcii dôkazov zložitejších formúl.

Cvičenie 7.3 Ako je špecifikovaný sémantický prístup k tvorbe mentálneho modelu usudzovania?

Riešenie. Mentálny model je stotožnený s tvorbou *sémantického* modelu množiny predpokladov, Φ, spolu s tautologickým dôsledkom ψ, čo zapisujeme $\Phi \vDash \psi$. Sémantický prístup je založený na grafickej metóde nazývanej *sémantické tablá.* K ich konštrukcii potrebujeme poznať len elementárne základné pojmy sémantickej interpretácie logických spojok.

Cvičenie 7.4. Ako je špecifikovaný jazyk výrokovej logiky (syntax výrokovej logiky)?

Riešenie. Jazyk výrokovej logiky je tvorený formulami výrokovej logiky, ktoré sú definované pomocou množiny atomických výrokových premenných $\{p, q, ..., p', q', ...\}$ a množiny logických spojok $\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\neg\}$. Formuly výrokovej logiky, ktoré tvoria jazyk L, sú rekurentne definované ako minimálna množina, ktorá vyhovuje týmto vlastnostiam

(1) $\{p,q,\ldots,p',q',\ldots\}\subseteq L$,

(2) ak $(\varphi\in L)$, potom $(\neg\varphi)\in L$,

(3) ak $(\varphi,\psi\in L)$, potom $(\varphi\wedge\psi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\Rightarrow\psi),(\varphi\equiv\psi)\in L$.

Cvičenie 7.5. Ako sú špecifikované pravdivostné hodnoty formúl jazyka výrokovej logiky (sémantika výrokovej logiky) ?

Riešenie. Sémantika výrokovej logiky sa zaoberá pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej atomických výrokov. Formuly (elementy jazyka L výrokovej logiky) majú pravdivostný význam, ktorý je špecifikovaný takto: symbol ´1´ reprezentuje pravdivostnú hodnotu ´pravda´ a symbol ´0´ reprezentuje pravdivostnú hodnotu ´nepravda´.

Tabuľková metóda pre výpočet pravdivostných hodnôt formúl
$\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$ a $\varphi_2=(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$

τ	p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$	$\varphi_2=(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$
τ_1	0	0	0	0	1	1
τ_2	0	1	1	0	0	1
τ_3	1	0	1	0	0	1
τ_4	1	1	1	1	1	1

Formula φ sa nazýva *tautológia* (alebo *zákon*, čo vyjadríme $\models\varphi$), ak pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi)=1$

$$(\models\varphi)=_{def}\forall(\tau)\big(val_\tau(\varphi)=1\big)$$

V tabuľke formula φ_2 je tautológia, je pravdivá pre všetky možné interpretácie τ_i, i = 1, 2, 3, 4. V opačnom prípade, ak pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi)=0$, formula sa nazýva *kontradikcia*. Ak existuje aspoň jedna interpretácia τ taká, že $val_\tau(\varphi)=1$, potom formula φ je *splniteľná* (to znamená, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnosti, čo zapisujeme $\models\varphi$). V tab. 1 formula φ_1 je splniteľná pre dve interpretácie τ_1 a τ_4. Môžeme teda povedať, že všetky formuly, ktoré nie sú kontradikcie sú splniteľné a tautológie sú také splniteľné formuly, ktoré sú pre všetky možné interpretácie τ pravdivé. ***Model*** $M(\varphi)=\{\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\ldots,\boldsymbol{\tau}_n\}$ formuly φ je tvorený množinou interpretácií τ , pre ktoré je formula pravdivá, $(\forall\boldsymbol{\tau}\in M(\varphi))\big(val_\tau(\varphi)=1\big)$.

Tautológie majú vo výrokovej logike mimoriadne postavenie *zákonov* logiky, tieto formule sú vždy pravdivé pre ľubovoľné pravdivostné hodnoty premenných. Niektoré tautológie sa často používajú nielen v samotnej výrokovej logike, ale aj v bežnom usudzovaní a sú obvykle označované aj vlastným menom. Väčšinou ide o tautológie tvaru ekvivalencie, ktoré umožňujú nahradzovať jedny formuly inými bez straty vlastnosti ich tautologičnosti.

Cvičenie 7.6. Ako je špecifikovaná teória ?

Riešenie. Ľubovoľná neprázdna množina formúl, $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$, sa nazýva *teória* výrokovej logiky. Ak pre teóriu Φ existuje taká interpretácia τ, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé, $val_\tau(\varphi_i)=1$, pre $i=1,2,\ldots,n$, potom množina takýchto interpretácií τ sa nazýva *model teórie* $M(\Phi)$. Teória Φ sa nazýva *konzistentná*, ak má neprázdny model, $M(\Phi)\neq\emptyset$.

Nech

$$\Phi=\{\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q),\varphi_2=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p),\varphi_3=(\neg p\wedge\neg q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\}$$

chceme zistiť, či táto teória má model. Pomocou tabuľkovej metódy určíme pravdivostné hodnoty týchto formúl pre všetky možné interpretácie, p

$\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$

1	2	3	4	5
P	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$3\Rightarrow 4$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$\varphi_2=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

1	2	3	4	5
p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$3\wedge 4$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$\varphi_3=(\neg p\wedge\neg q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$3\wedge 4$	$p\Rightarrow q$	$5\Rightarrow 6$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Z týchto tabuliek vyplýva, že existujú dve interpretácie premenných, $\tau_1=(p/0,q/0)$ a $\tau_4=(p/1,q/1)$, pre ktoré všetky formuly z Φ sú pravdivé, t.j. interpretácie τ_1 a τ_4 sú modelom teórie Φ, $M(T)=\{\tau_1,\tau_4\}$. Tiež môžeme povedať, že teória Φ je konzistentná, čo vyplýva priamo zo skutočnosti, že má model.

Cvičenie 7.7. Ako je definovaný pojem tautologický dôsledeok teórie?

Riešenie. Formula φ sa nazýva *tautologický dôsledok teórie* Φ (čo označíme $\Phi\vDash\varphi$) práve vtedy, ak každý model teórie Φ je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá). Nech φ je tautologickým dôsledkom teórie Φ, potom pre každý model – interpretáciu τ platí: $val_\tau(\varphi)=val_\tau(\varphi_i)=1$, pre $i=1,2,\ldots,n$.

Príklad**.** Nech teória Φ je definovaná rovnako ako v predchádzajúcom príklade, má dva modely určené interpretáciami premenných $\tau_1=(p/0,q/0)$ a $\tau_4=(p/1,q/1)$. Uvažujme formulu φ v tvare $p \wedge q$, potom táto formula nie je tautologickým dôsledkom teórie Φ, pretože len pre model τ_2 je formula pravdivá, $val_{\tau_2}(\varphi)=1$, pre model τ_1 už nie je pravdivá, $val_{\tau_1}(\varphi)=0$.

Cvičenie 7.8. Pomocou prirodzenej dedukcie zostrojte záver z týchto dvoch predpokladov:

(1) Keď bude pršať, potom pôjdem do kina
(2) Keď bude pršať, potom pôjdem do kaviarne

Riešenie. V prvom kroku vykonáme formalizáciu týchto výrokov, zavedieme tri atomické výrokové premenné

p = ′bude pršať′, q = ′pôjdem do kina′, r = ′pôjdem do kaviarne′

Potom množina predpokladov má tvar $\Phi=\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, zaujíma nás, aký netriviálny dôsledok vyplýva z týchto predpokladov, $\Phi=\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$ Množinu predpokladov rozšírime o pomocný predpoklad (hovoríme, že je aktivovaný).

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad φ_1)
2.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad φ_2)
3.	p	(aktivácia pomocného predpokladu φ)
4.	q	(použitie pravidla 4 *modus ponens* na predpoklady 1 a 3)
5.	r	(použitie pravidla 4 *modus ponens* na predpoklady 2 a 3)
6.	$q \wedge r$	(introdukcia konjunkcie na dôsledky 4 a 5)
7.	$p \Rightarrow q \wedge r$	(deaktivácia pomocného predpokladu 3 pomocou dôsledku 6)

Záver, ktorý vyplýva z predpokladov je $p \Rightarrow q \wedge r$ = ′ak bude pršať pôjdem do kina a kaviarne′.

Cvičenie 7.9. Pomocou prirodzenej dedukcie zostrojte záver z týchto dvoch predpokladov:

(3) Keď bude pršať, potom pôjdem do kina
(4) Keď bude snežiť, potom pôjdem do kina

Riešenie. V prvom kroku vykonáme formalizáciu týchto výrokov, zavedieme tri atomické výrokové premenné

p = ′bude pršať′, q = ′pôjdem do kina′, r = ′bude snežiť′

Potom množina predpokladov má tvar $\Phi=\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\}$, zaujíma nás, aký netriviálny dôsledok vyplýva z týchto predpokladov, $\Phi=\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \vdash ?$ Množinu predpokladov rozšírime o pomocný predpoklad (hovoríme, že je aktivovaný).

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad φ_1)
2.	$r \Rightarrow q$	(2. predpoklad φ_2)
3.	$\neg q$	(aktivácia pomocného predpokladu φ)
4.	$\neg p$	(použitie pravidla *modus tollens* na predpoklady 1 a 3)
5.	$\neg r$	(použitie pravidla 4 *modus tollens* na predpoklady 2 a 3)
6.	$\neg p \wedge \neg r$	(introdukcia konjunkcie na dôsledky 4 a 5)
7.	$\neg(p \vee r)$	(použitie De Morganovho pravidla na 6)
8.	$\neg q \Rightarrow \neg(p \vee r)$	(deaktivácia pomocného predpokladu n3)
9.	$(p \vee r) \Rightarrow q$	(inverzia implikácie)

Záver, ktorý vyplýva z predpokladov je $\Phi = \{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \vdash p \vee r \Rightarrow q$

Cvičenie 7.10. Ako sú definovanbé sémantické tablá?

Riešenie. Sémantické tabla vizualizujú transformáciu formuly φ na ekvivalentný tvar

$$\varphi_{DNF} = (l_1 \wedge l_2 \wedge l_3 \wedge \ldots) \vee (l'_1 \wedge l'_2 \wedge l'_3 \wedge \ldots) \vee \ldots$$

ktorý obsahuje disjunkciu konjunktívnzch klauzúl. Platia tieto vlastnosti:

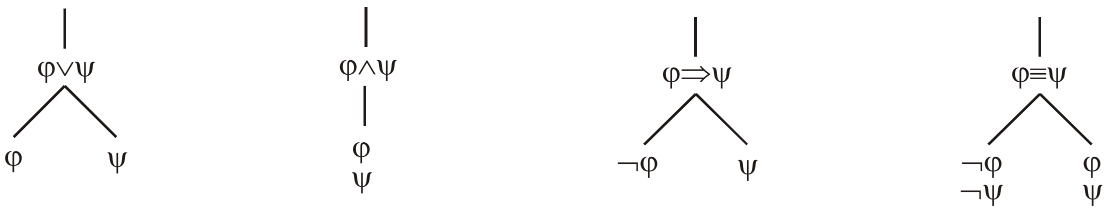
(1) Ku každej formule φ existuje ekvivalentná formula φ_{DNF}, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi = \varphi_{DNF}$.

(2) Formula φ je kontradikcia práve vtedy, keď φ_{DNF} pre každú klauzulu obsahuje dvojicu komplmentárnych literálov.

(3) Formula φ je tautológia práve vtedy, keď $(\neg\varphi)_{DNF}$ obsahuje pre každú klauzulu dvojicu komplmentárnych literálov.

(4) Ak formula $(\neg\varphi)_{DNF}$ má takú klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov, potom formula φ je splniteľná pre interpretáciu τ premenných, ktorá je špecifikovaná literálmi z tejto klauzuly.

Sématické tablo priradené formule φ je binárny strom $\mathcal{T}(\varphi)$, ktorý zostrojíme postupným predlžovaním jeho vetiev podľa formúl:



A (*disjunkcia*) *B* (*konjunkcia*) *C* (*implikácia*) *D* (*ekvivalencia*)

Proces konštrukcie sémantického tabla je ukončený vtedy, ak každá vetva tabla má všetky neatomické formuly už predĺžené na literály.

Vyššie uvedené vlastnosti DNF formúl platia pre sémantické tabla v tejto podobe:

(1) Formula φ je kontradikcia práve vtedy, keď sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ je uzavreté.

(2) Formula φ je tautológia práve vtedy, keď sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

(3) Formula φ je splniteľná práve vtedy, keď sémantické tablo $\mathcal{T}\left(\neg\varphi\right)$ je otvorené, pričom interpretáciu τ premenných, pre ktorú je formula φ pravdivá, môžeme zostrojiť pomocou vybranej otvorenej vetvy tabla..

Cvičenie 7.11. Prepíšte formulu $\psi = \left(p \equiv q\right) \wedge \left(\left(p \Rightarrow r\right) \Rightarrow r\right)$ do ekvivalentného DNF tvaru.

Riešenie.

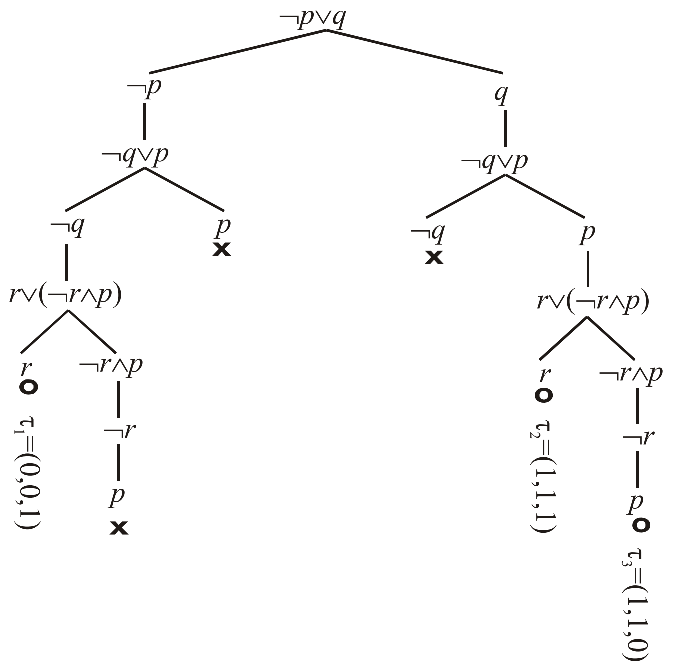
$$
\begin{aligned}
\psi' = \psi_{DNF} &= \underbrace{\left(\neg p \wedge \neg q \wedge r\right)}_{\square} \vee \underbrace{\left(\neg p \wedge p \wedge r\right)}_{\times} \vee \underbrace{\left(q \wedge \neg q \wedge r\right)}_{\times} \vee \underbrace{\left(q \wedge p \wedge r\right)}_{\square} \vee \\
&\quad \underbrace{\left(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p\right)}_{\times} \vee \underbrace{\left(\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p\right)}_{\times} \vee \underbrace{\left(q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p\right)}_{\times} \vee \\
&\quad \underbrace{\left(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p\right)}_{\square} \\
&= \underbrace{\left(\neg p \wedge \neg q \wedge r\right)}_{\tau_1 = (0,0,1)} \vee \underbrace{\left(q \wedge p \wedge r\right)}_{\tau_2 = (1,1,1)} \vee \underbrace{\left(q \wedge p \wedge \neg r\right)}_{\tau_3 = (1,1,0)}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v takto upravenej DNF formule existujú klauzuly, ktoré sú a-prori nepravdivé (obsahujú konjunkciu premennej a jej negácie), ktoré sú označené symbolom ´×´. Pre zostávajúce klauzule, ktoré sú označené symbolom ´□ ´ existuje vždy interpretácia τ, pre ktorú sú pravdivé (pozri obr. 2 a tab. 4).

Tabuľka pravdivostných hodnôt formuly $\psi = \left(p \equiv q\right) \wedge \left(r \vee \neg\left(r \vee \neg p\right)\right)$

#	P	q	r	$p \equiv q$	$r \vee \neg p$	$\neg(r \vee \neg p)$	$r \vee \neg(r \vee \neg p)$	ψ	
1	0	0	0	1	1	0	0	0	
2	0	0	1	1	1	0	1	1	τ_1=(0,0,1)
3	0	1	0	0	1	0	0	0	
4	0	1	1	0	1	0	1	0	
5	1	0	0	0	0	1	1	0	
6	1	0	1	0	1	0	1	0	
7	1	1	0	1	0	1	1	1	τ_3=(1,1,0)
8	1	1	1	1	1	0	1	1	τ_2=(1,1,1)

Sémantické tablo formuly ψ má tvar

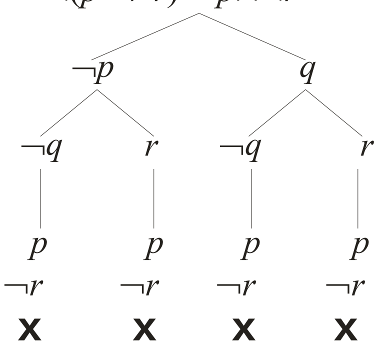


Vetvy tabla, ktoré sú označené symbolom × sa neuvažujú, pretože reprezentujú nepravdivé klauzuly. Vetvy označené symbolom □ reprezentujú klauzuly s pravdivou interpretáciou.

Cvičenie 7.12. Pomocou sémantického tabla verifikujte reláciu tautologického dôsledku $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models (p \Rightarrow r)$.

Riešenie. Vieme, že táto formula tautologického dôsledku je ekvivaltná tautológii $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, negácia tejto formuly má tvar $\neg\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$. Sémantické tablo pre túto negáciu má tvar

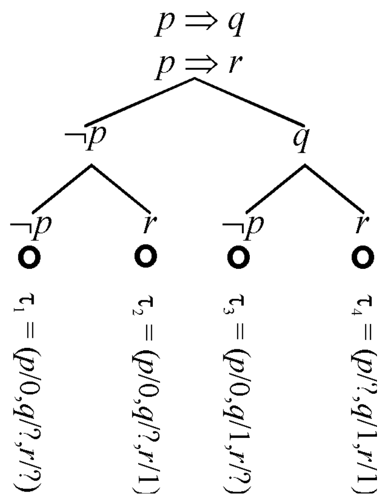
$$(p \Rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$$
$$(q \Rightarrow r) \equiv \neg q \vee r$$
$$\neg(p \Rightarrow r) \equiv p \wedge \neg r$$



Vidíme, že každá vetva je uzavretá, potom relácia tautologického dôsledku $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models (p \Rightarrow r)$ je platná.

Cvičenie 7.12. Pomocou sémantického tabla zostrojte záver z teórie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, t. j. budeme riešiť reláciu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$.

Riešenie. Výsledky sú znázornené na nasledujúcom obrázku



Potom teória $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$ má štyri rôzne interpretácie – modely, pre ktoré sú predpoklady teórie pravdivé

$$\tau_1 = (p/0, q/?, r/?)$$
$$\tau_2 = (p/0, q/?, r/1)$$
$$\tau_3 = (p/0, q/1, r/?)$$
$$\tau_4 = (p/?, q/1, r/1)$$

kde symbol ′?′ znamená, že pravdivostná hodnota danej premennej nie je špecifikovaná (čiže môže byť ľubovoľná). Každému modelu priradíme riešenie, ktoré je pravdivé

$$\psi_1 = \neg p$$
$$\psi_2 = \neg p \wedge r$$
$$\psi_3 = \neg p \wedge q$$
$$\psi_4 = q \wedge r$$

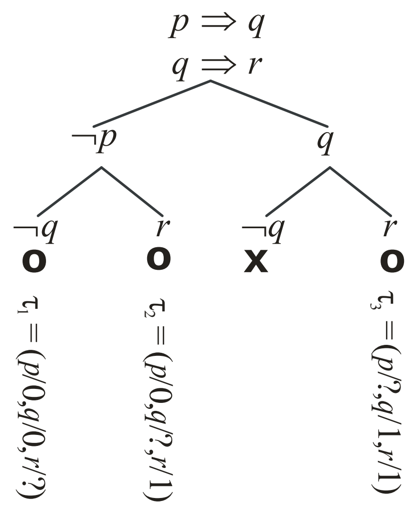
To znamená, že máme štyri riešenia relácie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$ v tvare $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \psi_i$, pre i = 1, 2, 3, 4. Tieto riešenia môžeme „skladať“ pomocou disjunkcie do nového riešenia, disjunkciou všetkých ψ_i dostaneme riešenie, ktoré je pravdivé pre všetky modely teórie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$\begin{aligned}\psi' &= \neg p \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r) \\ &\equiv \neg p \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r) \\ &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)\end{aligned}$$

Potom platí $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow q \wedge r)$. Poznamenajme, že toto riešenie je ľahko zostrojiteľné aj pomocou prirodzenej dedukcie. keď množina predpokladov je rozšírená o dodatočný predpoklad p, $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, p\} \vdash (q \wedge r)$.

Cvičenie 7.13. Pomocou sémantického tabla zostrojte riešenie, ktoré vyplýva z $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$, t. j. budeme riešiť reláciu $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash ?$.

Riešenie. Výsledky sú znázornené na nasledujúcom obrázku



Zo sémantického tabla vyplýva, že otvorené vetvy produkujú tri interpretácie (modely)

$$\tau_1 = (p/0, q/0, r/?)$$

$$\tau_2 = (p/0, q/?, r/1)$$

$$\tau_3 = (p/?, q/1, r/1)$$

Každému modelu môžeme pripísať riešenie, ktoré je pravdivé

$$\psi_1 = \neg p \wedge \neg q$$

$$\psi_2 = \neg p \wedge r$$

$$\psi_3 = q \wedge r$$

Ak tieto tri nezávislé riešenia spojíme pomocou disjunkcie

$$\psi = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv \left(\neg p \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{1} \right) \vee \left(r \wedge \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{1} \right) \equiv \neg p \vee r \equiv p \Rightarrow r$$

Týmto sme dokázali, že platí $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$, čo nie je nič iné, ako hypotetický sylogizmus.