7. prednáška

Mentálne modely logiky v kognitívnej vede

7.1 Úvodné poznámky

Postavenie logiky v kognitívnej vede je veľmi kontroverzné, je v protiklade s intuitívnym pohľadom na logiku, ako na *posvätný grál* kognitívnej vedy a umelej inteligencie. Logika nám slúži ako hlavný teoretický symbolický prostriedok na modelovanie usudzovania (Návrat, 2001; Russel, Norvig, 1995). Avšak na druhej strane, pri analýze ľudských schopností používať logiku na elementárnej úrovni (Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007), pozorujeme závažné nedostatky. Tieto experimentálne závery sú v kontradikcii s našou všeobecnou vierou, že človek je bytosť racionálna, ktorá uvážlivo používa zásady logiky pri vyvodzovaní nových poznatkov z daných predpokladov – poznatkov a viedli spolu s inými argumentmi ku vzniku koncepcie *ohraničenej racionality* (Cosmides, Tooby, 1992; Gigerenzer, Selten, 2001; Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007).

Cieľom tejto práce je prezentovať pohľad súčasnej kognitívnej vedy na tvorbu mentálneho *modelu* logiky. Kognitívna veda sa už niekoľko desaťročí zaoberá problémom, ako ľudia používajú jednoduché logické zákony a aké sa pritom vyskytujú chyby. Inovatívnosť kognitivistického pohľadu na túto zaujímavú problematiku (Johnson – Laird, 1983; Stenning, van Lambalgen, 2007) spočíva v tom, že sa navrhujú mentálne modely kognitívnych aktivít človeka pri riešení jednoduchých logických úloh. Požaduje sa, aby tieto modely boli schopné postihnúť nielen správne riešenia ale aj interpretovať chyby pri konštrukcii riešenia. Mentálny model má určitú zložitosť, ktorá je premenlivá pri aplikovaní na rôzne problémy (napr. na rôzne kategorické sylogizmy) (Johnson – Laird, 1983), pričom očakávame, že táto zložitosť modelu koreluje s výskytom chýb. Mentálne modely (alebo mentálne modelovanie) boli prvý krát postulované škótskym psychológom Kenneth Craikom v r. 1943, ktorý predpokladal, že ľudská myseľ obsahuje malé modely reality, pomocou ktorých sme schopný prijať - anticipovať udalosti, uvažovať a vysvetlovať. Model existuje v pracovnej pamäti a je tvorený ako výsledok komunikácie alebo predstavivosti. Základnou črtou mentálnych modelov je, že sú „izomorfné“ s objektom, ktorý reprezentujú (podobne, ako sú chemické molekulárne modely podobné molekulám). Podľa Johnson-Lairda, použitie mentálnych modelov v kognitívnej psychológii odstránilo jej deskriptívny charakter, bez snahy interpretovať pozorované výsledky. Existuje dve možnosti pre tvorbu mentálneho modelu logiky:

(1) *Syntaktický prístup*. Mentálny model je stotožnený s Gentzenovou prirodzenou dedukciou (Gentzen, 1935), ktorá obsahuje okolo tuctu pravidiel usudzovania vychádzajúcich z elementárnych zákonov logiky s jednoduchou a jasnou interpretáciou ich významu. Z množiny predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ použitím vyššie zmienených pravidiel prirodzenej dedukcie odvodíme záver ψ. Hovoríme, že tento záver logicky vyplýva z predpokladov (alebo, že existuje logický dôkaz formuly ψ z množiny predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$) , čo zapisujeme pomocou „relácie“ $\vdash$ takto: $\Phi \vdash \psi$. Syntaktický prístup k tvorbe mentálneho modelu logiky je vhodný pre ľudí, ktorí už absolvovali určité základné

vzdelanie z logiky a preto môžu suverénne používať prirodzenú dedukciu ku konštrukcii dôkazov zložitejších formúl.

(2) *Sémantický prístup.* Mentálny model je stotožnený s tvorbou *sémantického* modelu množiny predpokladov, Φ, spolu s tautologickým dôsledkom ψ, čo zapisujeme $\Phi \models \psi$. Sémantický prístup je založený na grafickej metóde nazývanej *sémantické tablá*. K ich konštrukcii potrebujeme poznať len elementárne základné pojmy sémantickej interpretácie logických spojok.

7.2 Syntax, sémantika a pragmatika výrokovej logiky

Jeden z prvých formálnych systémov v ľudskej histórii bol Euklidov axiomatický systém geometrie, ktorý sa stal vzorom pre rozvíjanie ďalších systémov hlavne v rámci matematiky, informatiky a logiky. V teórii formálnych systémov sa obvykle od seba striktne separujú tieto tri aspekty:

(1) *syntax* – spôsob konštrukcie jazyka (formúl) teórie,
(2) *sémantika* – významová interpretácia jazyka (jednotlivých formúl), a
(3) *pragmatika* – zmena sémantiky pri zmene prostredia/situácie v ktorej prebieha významová interpretácia formúl.

Pri špecifikácii formálneho systému vystupujú do popredia nasledujúce dve otázky: (1) Za akých podmienok je dôkaz formuly - vety korektný a (2) aké metódy môžu byť použité pri konštrukcii týchto dôkazov.

Veta (teorém, formula, výrok, zákon, argument, ...) je výrok o ktorom môže byť ukázané, že je pravdivý. V tejto súvislosti hovoríme o *dôkaze* vety, ktorý spočíva v postupnosti jednotlivých „medzikrokov“, ktoré sú odvodené buď z množiny jednoduchých postulátov, nazývaných *axiómy*, alebo z predchádzajúcich viet (pomocných viet, často nazývaných lemy) danej postupnosti. Komplikované dôkazy sú obvykle jasnejšie formulované, keď ich dôkaz je rozdelený na jednotlivé medzikroky, ktoré sú formulované ako samostatné vety. Tieto medzikroky - vety v postupnosti sú vytvárané pomocou *pravidiel odvodzovania* (*pravidiel usudzovania*), ktoré z niekoľkých pravdivých tvrdení - argumentov vytvorí nové pravdivé tvrdenie - argument.

Metódy dôkazu logiky sú dôležité nielen pre tvorbu korektných dôkazov v samotnej logike, ale aj v matematike a v informatike. V teoretickej informatike sa napr. študujú rôzne metódy verifikácie korektnosti programu, alebo či operačný systém je bezpečný. V umelej inteligencii pri odvodzovaní nových faktov z danej databázy poznatkov (množiny výrokových formúl, ktorá sa vo výrokovej logike nazýva teória) je dôležité mať zabezpečené, aby daná databáza bola konzistentná (korektná), teda aby z nej súčasne nevyplýval nejaký výrok a taktiež aj jeho negácia. Môžeme teda konštatovať, že zvládnutie metód matematického dôkazu je dôležité tak v samotnej logike, ako aj v matematike a v informatike.

Na záver tejto úvodnej kapitoly uvedieme ešte niekoľko poznámok k pragmatike formálneho systému logiky. Obvykle sa toto hľadisko vôbec nespomína pri špecifikácii logiky, verí sa, že logika je rigidný formálny systém, kde nemôže nastať zmena sémantickej interpretácie pri zmene prostredia (napr. sociálneho). Medzi logikmi existuje pevná viera, ktorá pochádza už od starovekých gréckych logikov, že logika je len jedna a používanie jej zákonov nezávisí od prostredia v ktorom užívateľ vykonáva usudzovania a pod.

Oblasť pragmatiky logiky bola otvorená v psychológii ruským neuropsychológom z prvej polovice minulého storočia Alexandrom R. Luriom (1979), ktorý v 30. rokoch vykonal so svojimi spolupracovníkmi expedíciu do stredoázijských oblastí vtedajšieho Ruska, kde skúmali kultúrnu závislosť používania jednoduchých logických zákonov. Miestnemu negramotnému obyvateľovi najprv vysvetlili vstupnú premisu úlohy, že každé zviera, ktoré žije za polárnym kruhom má bielu farbu kožušiny, potom nasledovala konkrétna otázka, akú farbu kožuchu má ľadový medveď, ktorý žije za polárnym kruhom, čo formálne môžeme vyjadriť pomocou schémy

$$\begin{array}{|l} \textit{každé zviera žijúce za polárnym kruhom má bielu farbu kožušiny} \\ \textit{ľadový medveď žije za polárnym kruhom} \\ \hline \quad ? \end{array}$$

Väčšina negramotných respondentov odpovedala, že nevie, pretože nikdy neboli za polárnym kruhom. Odpoveď gramotných respondentov (hlavne tých, čo absolvovali vzdelanie v ruskom jazyku) na túto otázku bola diametrálne odlišná, odpovedali, že polárny medveď má biely kožuch

$$\begin{array}{|l} \textit{každé zviera žijúce za polárnym kruhom má bielu farbu kožušiny} \\ \textit{ľadový medveď žije za polárnym kruhom} \\ \hline \textit{ľadový medveď má bielu farbu kožušiny} \end{array}$$

A. Luria z týchto a podobných pozorovaní vyvodzoval, že existuje *kultúrna závislosť* pri používaní schém usudzovania logiky, že ich používanie je závislé od vzdelania respondentov a pod. Tieto experimenty sú neobyčajne zaujímavé a boli v podstate zreprodukované aj v iných oblastiach (napr. v Afrike a v Pacifiku). Žiaľ, existuje aj ich veľmi tvrdá kritika, že sa nejedná o žiadnu kultúrnu závislosť používania elementárnych schém usudzovania, ale beží o problém komunikácie medzi negramotným respondentom a riešiteľom, medzi ktorými existuje veľká kultúrna bariéra, pričom je vôbec otázne, či respondenti správne pochopili položenú otázku. Gramotní respondenti, ktorí zvládli v škole základné trívium (čítanie, písanie a počítanie) obvykle v ruskom jazyku, zrejme už podstatne lepšie chápu riešený problém a sú schopní použiť pravidlo modus ponens na konštrukciu správnej odpovede – riešenia.

7.3 Špecifikácia jazyka výrokovej logiky (syntax)

Jazyk L výrokovej logiky je tvorený formulami výrokovej logiky, ktoré sú definované pomocou množiny atomických výrokových premenných $\{p,q,...,p',q',...\}$ a množiny logických spojok $\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\neg\}$.

Formuly výrokovej logiky, ktoré tvoria jazyk L, sú rekurentne definované ako minimálna množina, ktorá vyhovuje týmto vlastnostiam

(1) $\{p,q,...,p',q',...\} \subseteq L$,

(2) ak $(\varphi \in L)$, potom $(\neg\varphi) \in L$,

(3) ak $(\varphi,\psi \in L)$, potom $(\varphi \wedge \psi),(\varphi \vee \psi),(\varphi \Rightarrow \psi),(\varphi \equiv \psi) \in L$.

7.4 Špecifikácia významu výrokovej logiky (sémantiky)

Ďalší pojem dôležitý pre výrokovú logiku je *sémantika*. Pojem pochádza z teórie prirodzených jazykov, kde sémantika špecifikuje význam danej vety (ktorá má tiež aj svoju syntax). Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej atomických výrokov. Formuly (elementy jazyka *L* výrokovej logiky) majú pravdivostný význam, ktorý je špecifikovaný takto: symbol ´1´ reprezentuje pravdivostnú hodnotu ´pravda´ a symbol ´0´ reprezentuje pravdivostnú hodnotu ´nepravda´.

(1) *Konjunkcia* $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá vtedy a len vtedy (vtt) ak obe jej komponenty sú pravdivé, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\alpha \wedge \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 1 \text{ a } val(\beta) = 1$$

$$val(\alpha \wedge \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 0 \text{ alebo } val(\beta) = 0$$

(2) *Disjunkcia* $\alpha \vee \beta$ je pravdivá vtt, ak aspoň jedna jej komponenta je pravdivá, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\alpha \vee \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 1 \text{ alebo } val(\beta) = 1$$

$$val(\alpha \vee \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 0 \text{ a } val(\beta) = 0$$

(3) *Implikácia* $\alpha \Rightarrow \beta$ je pravdivá vtt, ak prvá jej komponenta (α) je nepravdivá alebo druhá komponenta (β) je pravdivá, v opačnom prípade (prvá komponenta je pravdivá a druhá komponenta je nepravdivá) je nepravdivá

$$val(\alpha \Rightarrow \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 0 \text{ alebo } val(\beta) = 1$$

$$val(\alpha \Rightarrow \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 1 \text{ a } val(\beta) = 0$$

(4) *Ekvivalencia* $\alpha \equiv \beta$ je pravdivá vtedy vtt, ak obe komponenty majú rovnakú pravdivostnú hodnotu, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\alpha \equiv \beta) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = val(\beta)$$

$$val(\alpha \equiv \beta) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) \neq val(\beta)$$

(5) *Negácia* $\neg\alpha$ je pravdivá vtt, ak jej komponenta je nepravdivá, v opačnom prípade je nepravdivá

$$val(\neg\alpha) = 1 \text{ vtt } val(\alpha) = 0$$

$$val(\neg\alpha) = 0 \text{ vtt } val(\alpha) = 1$$

Pri tejto príležitosti je vhodné spomenúť psychológov B. Inhelderovú a J. Piageta, ktorí dôvodia (Inhelder, Piaget, 1964), že už deti vo veku 10 rokov zvládajú zásady sémantického prístupu k výrokovej logike. Sú schopné korektne reprodukovať tabuľku pravdivostných hodnôt pre disjunkciu, konjunkciu a negáciu. Problémy so sémantickou interpretáciou implikácie pretrvávajú až do dospelosti, správna interpretácia vyžaduje základné logické vzdelanie. Z týchto dôvodov sémantický prístup k tvorbe mentálneho modelu logiky je vhodný pre „laikov v logike“, ktorí sú schopní správne zreprodukovať pravdivostné tabuľky logických spojok a nemusia mať žiadne iné špeciálne vedomosti z logiky. Teraz len toľko, interpretácia implikácie je silne textovo závislá, v niektorých extrémnych prípadoch v prirodzenom jazyku sa interpretuje ako konjunkcia, čo môže spôsobovať v iných prípadoch určité problémy s korektnou sémantickou interpretáciou implikácie. Preto jediné možné riešenie tohto problému vidíme v tom, že už malým deťom by sa malo „drilom“ zafixovať, že implikácia $p \Rightarrow q$ je pravdivá práve vtedy, ak p je nepravdivé alebo q je pravdivé a taktiež, že implikácia $p \Rightarrow q$ je nepravdivá práve vtedy, ak p je pravdivé a q je nepravdivé (tieto dve skutočnosti je možné vyjadriť Aristotelovou dikciou, že pravda implikuje len pravdu a nepravda implikuje čokoľvek, čiže výrok $1 \Rightarrow 0$ musí byť nepravdivý). Pravdivostnú hodnotu formuly φ môžeme jednoducho určiť pomocou tabuľkovej metódy (pozri tabuľku 1), kde postupne počítame pravdivostné hodnoty jej podformúl, ktoré v ďalších krokoch využívame pre konštrukciu pravdivostných hodnôt „podformúl“, ktoré obsahujú predchádzajúce podformuly ako svoju časť.

Formula φ sa nazýva *tautológia* (alebo *zákon*, čo vyjadríme $\models \varphi$), ak pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi)=1$

$$(\models \varphi) =_{def} \forall(\tau)\left(val_\tau(\varphi)=1\right)$$

V tab. 1 formula φ_2 je tautológia, je pravdivá pre všetky možné interpretácie τ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. V opačnom prípade, ak pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi)=0$, formula sa nazýva *kontradikcia*. Ak existuje aspoň jedna interpretácia τ taká, že $val_\tau(\varphi)=1$, potom formula φ je *splniteľná* (to znamená, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnosti, čo zapisujeme $\models \varphi$). V tab. 1 formula φ_1 je splniteľná pre dve interpretácie τ_1 a τ_4. Môžeme teda povedať, že všetky formuly, ktoré nie sú kontradikcie sú splniteľné a tautológie sú také splniteľné formuly, ktoré sú pre všetky možné interpretácie τ pravdivé.

Tabuľka 1. Tabuľková metóda pre výpočet pravdivostných hodnôt formúl $\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$ a $\varphi_2=(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$

τ	p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$	$\varphi_2=(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$
τ_1	0	0	0	0	1	1
τ_2	0	1	1	0	0	1
τ_3	1	0	1	0	0	1
τ_4	1	1	1	1	1	1

Tautológie majú vo výrokovej logike mimoriadne postavenie *zákonov* logiky, tieto formule sú vždy pravdivé pre ľubovoľné pravdivostné hodnoty premenných. Niektoré tautológie sa často používajú nielen v samotnej výrokovej logike, ale aj v bežnom usudzovaní a sú obvykle označované aj vlastným menom. Väčšinou ide o tautológie tvaru ekvivalencie, ktoré umožňujú nahradzovať jedny formuly inými bez straty vlastnosti ich tautologičnosti.

Ľubovoľná neprázdna množina formúl, $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$, sa nazýva *teória* výrokovej logiky. Ak pre teóriu Φ existuje taká interpretácia τ, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé, $val_\tau(\varphi_i)=1$, pre $i=1,2,\ldots,n$, potom táto interpretácia τ sa nazýva *model teórie*. Teória Φ sa nazýva *konzistentná*, ak má model.

Tabuľka 2. Konštrukcia modelu pre tri formuly výrokovej logiky

$\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$

1	2	3	4	5
p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$3\Rightarrow 4$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$\varphi_2=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

1	2	3	4	5
p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$3\wedge 4$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$\varphi_3 = (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$3 \wedge 4$	$p \Rightarrow q$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Príklad 1. Nech

$$\Phi = \{\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), \varphi_2 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \varphi_3 = (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$$

chceme zistiť, či táto teória má model. Pomocou tabuľkovej metódy určíme pravdivostné hodnoty týchto formúl pre všetky možné interpretácie, pozri tab. 2.

Z týchto tabuliek vyplýva, že existujú dve interpretácie premenných, $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_4 = (p/1, q/1)$, pre ktoré všetky formuly z Φ sú pravdivé, t.j. interpretácie τ_1 a τ_4 sú modelom teórie Φ. Tiež môžeme povedať, že teória Φ je konzistentná, čo vyplýva priamo zo skutočnosti, že má model.

Formula φ sa nazýva *tautologický dôsledok teórie* Φ (čo označíme $\Phi \vDash \varphi$) práve vtedy, ak každý model teórie Φ je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v ňom pravdivá). Nech φ je tautologickým dôsledkom teórie Φ, potom pre každý model – interpretáciu τ platí: $val_\tau(\varphi) = val_\tau(\varphi_i) = 1$, pre $i = 1, 2, ..., n$.

Príklad 2. Nech teória Φ je definovaná rovnako ako v predchádzajúcom príklade, má dva modely určené interpretáciami premenných $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_4 = (p/1, q/1)$. Uvažujme formulu φ v tvare $p \wedge q$, potom táto formula nie je tautologickým dôsledkom teórie Φ, pretože len pre model τ_2 je formula pravdivá, $val_{\tau_2}(\varphi) = 1$, pre model τ_1 už nie je pravdivá, $val_{\tau_1}(\varphi) = 0$.

V predchádzajúcich kapitolách boli formulované dva nezávislé pojmy:

(1) V syntaktickom prístupe pojem logického dôsledku formuly ψ z množiny predpokladov Φ, čo formálne zapisujeme $\Phi \vdash \psi$.

(2) V sémantickom prístupe pojem tautologického dôsledku formuly ψ z teórie Φ, čo formálne zapisujeme $\Phi \vDash \psi$.

Aj keď sú tieto pojmy definované nezávislým spôsobom (syntaktickým a sémantickým), existuje medzi nimi tesná väzba. Podľa Postovej vety výrokovej logiky (Jirků, Vejnarová, 2000; Kvasnička, Pospíchal, 2006; Peregrin, 2004; Sochor, 2001; Švejdar, 2002) platí tvrdenie:

Pre ľubovoľnú formulu φ vzťah $\Phi \vdash \psi$ platí práve vtedy, ak $\Phi \vDash \psi$,

$$(\Phi \vDash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$$

Opačná implikácia

$$(\Phi \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vDash \psi)$$

je triviálna (ľahko skontrolujeme, že axiómy sú tautológie a použitie pravidla *modus ponens* z tautologických predpokladov poskytuje tautologický záver). Spojením týchto dvoch implikácií dostaneme ekvivalenciu medzi logickým a tautologickým vyplývaním.

$$(\Phi \models \psi) \equiv (\Phi \vdash \psi)$$

7.5 Teória dôkazu – prirodzená dedukcia (syntaktický prístup)

Klasický spôsob riešenia logického dôkazu vo výrokovej logike je Hilbertova axiomatická metóda (Gahér, 1998; Jirků, Vejnarová, 2000; Kvasnička, Pospíchal, 2006; Peregrin, 2004; Sochor, 2001; Švejdar, 2002), ktorá postuluje systém 10 axióm a jedného pravidla usudzovania. Aj keď je tento syntaktický prístup elegantný a v zásade jednoduchý, jeho použitie na dôkaz nových zákonov výrokovej logiky (ktoré nie sú obsiahnuté v množine axióm) v mnohých prípadoch je netriviálna záležitosť, ktorá obvykle vyžaduje množstvo „jemných“ trikov a postupov, aby sme dokázali aj pomerne jednoduché zákony výrokovej logiky (napr. $\vdash p \Rightarrow p$). Alternatívny prístup ku konštrukcii teórie dôkazu je Gentzenova prirodzená dedukcia z r. 1935 (Szabo, 1969), ktorá je založená na jednej triviálnej axióme (napr. $p \Rightarrow p$ alebo $p \vee \neg p$) a okolo tuctu pravidiel odvodzovania). Pravidlá usudzovania v prirodzenej dedukcii sú tvorené schémou (pozri tab. 3)

$$\left|\begin{array}{l} predpoklad_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ predpoklad_n \\ \hline záver \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \ldots\ldots \\ \varphi_n \\ \hline \psi \end{array}\right.$$

ktorá obsahuje *n predpokladov* $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ a jeden *záver* ψ. Táto schéma usudzovania je formalizovaná pomocou „relácie“ $\vdash$ *logického dôkazu* (alebo *vyplývania*)

$$\{predpoklad_1,...,predpoklad_n\} \vdash záver \quad \text{alebo} \quad \{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi \quad \text{alebo} \quad \Phi \vdash \varphi$$

Pomerne jednoduchými prostriedkami môžeme dokázať, že relácia „logického dôkazu – vyplývania) je ekvivalentná formulám

$$\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi \equiv \vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow (\Rightarrow ...(\varphi_n \Rightarrow \varphi)))$$

V oboch týchto formulách používame symbol $\vdash$ s prázdnou množinou predpokladov, $\Phi = \emptyset$, čo znamená, že formula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ (alebo $\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow (\Rightarrow ...(\varphi_n \Rightarrow \varphi)))$) je zákonom výrokovej logiky, ku ktorého konštrukcii nepotrebujeme žiadne predpoklady. Podľa ľavej formuly, konjunkcia predpokladov implikuje záver.

Naše úvahy zformalizujeme pomocou nasledujúceho sledu definícií:

(1) Formula φ sa nazýva *bezprostredným logickým dôsledkom* množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2,...,\varphi_n\}$ vtedy a len vtedy, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formuly z Φ.

(2) Formula φ sa nazýva *logický dôsledok* množiny formúl Φ (čo označíme $\Phi \vdash \varphi$ vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in \Phi$ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

(3) Konečná postupnosť formúl $\varphi_1, \varphi_2,...,\varphi_n$ sa nazýva ***dôkaz*** formuly φ z množiny Φ vtedy a len vtedy, ak $\varphi = \varphi_n$ a každá formula φ_i z tejto postupnosti je buď bezprostredným

logickým dôsledkom niektorých formúl z Φ alebo formúl $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}$.

Tabuľka 3. Pravidlá usudzovania prirodzenej dedukcie

#	Schéma usudzovania	Ekvivalentný zákon výrokovej logiky	Názov
1	$\dfrac{p}{p \vee q}$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	*adícia*
2	$\dfrac{p \wedge q}{p}$, $\dfrac{p \wedge q}{q}$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$, $(p \wedge q) \Rightarrow q$	*simplifikácia*
3	$\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	*introdukcia konjunkcie*
4	$\dfrac{p \quad p \Rightarrow q}{q}$	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	*modus ponens*
5	$\dfrac{\neg q \quad p \Rightarrow q}{\neg p}$	$\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$	*modus tollens*
6	$\dfrac{q}{p \Rightarrow q}$	$q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	*introdukcia implikácie*
7	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	*hypotetický sylogizmus*
8	$\dfrac{p \vee q \quad \neg p}{q}$, $\dfrac{p \vee q \quad \neg q}{p}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$	*eliminácia disjunkcie*
9	$\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg p \vee q}$, $\dfrac{\neg p \vee q}{p \Rightarrow q}$	$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	*disjunktívny sylogizmus*
10	$\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	*inverzia implikácie*
11	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad p \Rightarrow \neg q}{\neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	*reductio ad absurdum*
12	$\dfrac{\neg\neg p}{p}$, $\dfrac{p}{\neg\neg p}$	$\neg\neg p \equiv p$	*dvojitá negácia*

Príklad 3. Majme dva jednoduché výroky

(1) Keď bude pršať, potom pôjdem do kina

(2) Keď bude pršať, potom pôjdem do kaviarne

Aký záver z nich vyplýva?

V prvom kroku vykonáme formalizáciu týchto výrokov, zavedieme tri atomické výrokové premenné

p = ´bude pršať´, q = ´pôjdem do kina´, r = ´pôjdem do kaviarne´

Potom množina predpokladov má tvar $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, zaujíma nás, aký netriviálny dôsledok vyplýva z týchto predpokladov, $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$ Množinu predpokladov rozšírime o pomocný predpoklad (hovoríme, že je aktivovaný).

1.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad φ_1)
2.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad φ_2)
3.	p	(aktivácia pomocného predpokladu φ)
4.	q	(použitie pravidla 4 *modus ponens* na predpoklady 1 a 3)
5.	r	(použitie pravidla 4 *modus ponens* na predpoklady 2 a 3)
6.	$q \wedge r$	(introdukcia konjunkcie na dôsledky 4 a 5)
7.	$p \Rightarrow q \wedge r$	(deaktivácia pomocného predpokladu 3 pomocou dôsledku 6)

Záver, ktorý vyplýva z predpokladov je $p \Rightarrow q \wedge r$ = ´ak bude pršať pôjdem do kina a kaviarne´.

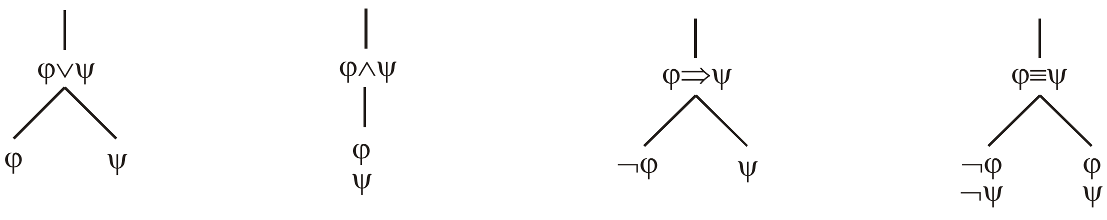
Na záver tejto kapitoly zosumarizujeme hlavné závery syntaktického prístupu pre logický dôkaz formúl výrokovej logiky:

(1) *Pôvodný Hilbertov formálny systém* logického dôkazu je pre kognitívnu vedu bezcenný, je veľmi zložitý na to, aby sa dal použiť ako mentálny model usudzovania.

(2) *Gentzenov systém prirodzenej dedukcie* (ktorý je formálne rovnocenný Hilbertovmu systému) nesie všetky znaky jednoduchosti a intuitívnosti, preto je vhodný ako *mentálny model logiky* pre tých, čo už absolvovali základné vzdelanie v logike.

7.6 Model výrokovej logiky – sémantické tablá (sémantický prístup)

V predchádzajúcej kapitole boli formulované základné princípy syntaktického prístupu k výrokovej logike. Cieľom tejto kapitoly bude ukázať realizáciu sémantického prístupu pomocou diagramatickej techniky nazývanej sémantické tablá (Smullyan, 1968). V rámci tejto metódy riešime reláciu $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \psi$ tak, že formulu $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \neg\psi$ rozkladáme postupne na podformuly, pričom tento rekurentný proces končíme vtedy, keď podformuly obsahujú len atomické premenné alebo ich negácie (tzv. *literály*), pozri obr. 1.



A (*disjunkcia*) *B* (*konjunkcia*) *C* (*implikácia*) *D* (*ekvivalencia*)

Obrázok 1. Tri základné rozklady pre tvorbu sémantického tabla. V prípade, že vytvorená podformula má tvar $\neg(\varphi \wedge \psi)$ alebo $\neg(\varphi \vee \psi)$, použijeme De Morganove vzťahy na ich ekvivalentný prepis na $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ resp. na $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, pre ktoré už existujú diagramatické rozklady. Diagram D reprezentuje rozklad pre ekvivalenciu, kde bola použitá definičná formula $(\varphi \equiv \psi) =_{def} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, pričom implikácie boli rozložené pomocou diagramu C a dve takto vzniknuté uzavreté vetvy boli odstránené ako nepodstatné.

Pomocou metódy sémantických tabiel budeme riešiť úlohu, či daná výroková formula ψ má model, t. j. či existuje aspoň jedna interpretácia τ taká, že $val_\tau(\psi) = 1$. Táto úloha je vo všeobecnosti riešiteľná pomocou tabuľkovej metódy (pozri tab. 2), avšak metóda sémantických tabiel predstavuje veľmi efektívnu alternatívu k tabuľkovej metóde, kde musíme vyšetrovať 2^n riadkov (ak formula ψ má n atomických výrokových premenných). Metóda sémantických tabiel je založená na postupnej diagramatickej transformácii formuly ψ do ekvivalentného DNF (Kvasnička, Pospíchal, 2006) tvaru ψ_{DNF} (disjunktívna normálna forma, ktorá obsahuje disjunkcie konjunkcií literálov).

Príklad 4. Prepíšeme formulu $\psi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ do ekvivalentného DNF tvaru

$$
\begin{aligned}
\psi' = \psi_{DNF} &= \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{\circ} \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge r)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q \wedge r)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r)}_{\circ} \vee \\
&\quad \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \\
&\quad \underbrace{(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\circ} \\
&= \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{\tau_1=(0,0,1)} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r)}_{\tau_2=(1,1,1)} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge \neg r)}_{\tau_3=(1,1,0)}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v takto upravenej DNF formule existujú klauzuly, ktoré sú a-prori nepravdivé (obsahujú konjunkciu premennej a jej negácie), ktoré sú označené symbolom ´×´. Pre zostávajúce klauzule, ktoré sú označené symbolom ´○´ existuje vždy interpretácia τ, pre ktorú sú pravdivé (pozri obr. 2 a tab. 4).

Tabuľka 4. Tabuľka pravdivostných hodnôt formuly $\psi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$

#	p	q	r	$p \equiv q$	$r \vee \neg p$	$\neg(r \vee \neg p)$	$r \vee \neg(r \vee \neg p)$	ψ	
1	0	0	0	1	1	0	0	0	
2	0	0	1	1	1	0	1	1	τ_1=(0,0,1)
3	0	1	0	0	1	0	0	0	
4	0	1	1	0	1	0	1	0	
5	1	0	0	0	0	1	1	0	
6	1	0	1	0	1	0	1	0	
7	1	1	0	1	0	1	1	1	τ_3=(1,1,0)
8	1	1	1	1	1	0	1	1	τ_2=(1,1,1)

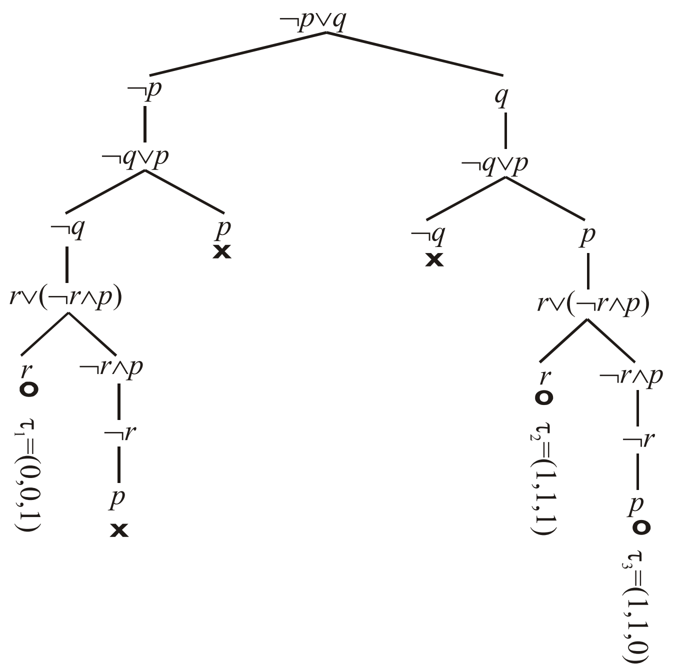
V príklade 4 bola formula $\psi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ prepísaná do DNF tvaru (Disjunktívna Normálna Forma, ktorá obsahuje disjunkcie konjuktívnych klauzúl). ***Jednotlivé klauzuly z DNF tvaru formuly sú jednoznačne identifikovateľné pomocou vetví sémantického tabla***. Poznamenajme, že v prípade, že nejaká vetva už na počiatku obsahuje dvojicu atomickej premennej a jej negácie, môže byť predčasne uzavretá, pretože ďalšie predlžovanie tejto väzby už nemôže zmeniť pravdivostnú hodnotu.

Význam sémantického tabla je založený na nasledujúcej vete:

Formula ψ je tautologickým dôsledkom formúl $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$, $\Phi\models\psi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo zostrojené pre formuly $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,\neg\psi\}$ obsahuje len uzavreté vetvy.

Táto veta nám umožňuje verifikovať či formula ψ je tautologickým dôsledkom teórie s modelom $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$. Podstatne zaujímavší problém je riešenie relácie $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}\models ?$, t. j. hľadáme taký záver ψ, ktorý je tautologickým dôsledkom teórie Φ. Riešenie ψ zostrojíme pomocou nasledujúceho postupu:

Zostrojíme sémantické tablo pre formuly z teórie $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$, pričom predpokladáme, že existuje aspoň jedna otvorená vetva tabla (t. j. teória Φ je konzistentná). Potom riešenie ψ, $\Phi\models\psi$, zostrojíme ako disjunkciu konjunkcií literálov pre vrcholy otvorených vetví.



Obrázok 2. Konštrukcia sémantického tabla pre formulu $\psi=(p\equiv q)\wedge(r\vee\neg(r\vee\neg p))$. Vetvy tabla, ktoré sú označené symbolom × sa neuvažujú, pretože reprezentujú nepravdivé klauzuly. Vetvy označené symbolom ○ reprezentujú klauzuly s pravdivou interpretáciou (pozri tab. 4).

Príklad 5. Pomocou sémantického tabla budeme verifikovať reláciu tautologického dôsledku $\{p\Rightarrow q,q\Rightarrow r\}\models(p\Rightarrow r)$. Pomocou sémantického tabla budeme študovať konjunkciu $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\wedge\neg(p\Rightarrow r)$, ak sa nám podarí ukázať, že príslušné sémantické tablo má všetky vetvy uzavreté, potom platí relácia $\{p\Rightarrow q,q\Rightarrow r\}\models(p\Rightarrow r)$, pozri obr. 3.

Príklad 6. Pomocou sémantického tabla budeme hľadať záver z teórie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, t. j. budeme riešiť reláciu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$. Výsledky sú znázornené na obr. 4, potom teória $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$ má štyri rôzne interpretácie – modely, pre ktoré sú predpoklady teórie pravdivé

$$\tau_1 = (p/0, q/?, r/?)$$
$$\tau_2 = (p/0, q/?, r/1)$$
$$\tau_3 = (p/0, q/1, r/?)$$
$$\tau_4 = (p/?, q/1, r/1)$$

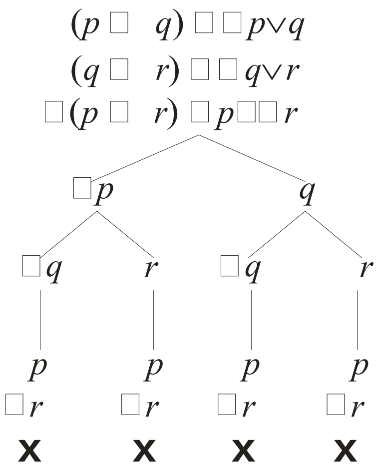
kde symbol ´?´ znamená, že pravdivostná hodnota danej premennej nie je špecifikovaná (čiže môže byť ľubovoľná). Každému modelu priradíme riešenie, ktoré je pravdivé

$$\psi_1 = \neg p$$
$$\psi_2 = \neg p \wedge r$$
$$\psi_3 = \neg p \wedge q$$
$$\psi_4 = q \wedge r$$

To znamená, že máme štyri riešenia relácie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash ?$ v tvare $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \psi_i$, pre i = 1, 2, 3, 4. Tieto riešenia môžeme „skladať“ pomocou disjunkcie do nového riešenia, disjunkciou všetkých ψ_i dostaneme riešenie, ktoré je pravdivé pre všetky modely teórie $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$\begin{aligned}\psi' &= \neg p \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r)\\ &\equiv \neg p \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r)\\ &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)\end{aligned}$$

Potom platí $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \models (p \Rightarrow q \wedge r)$. Poznamenajme, že toto riešenie je ľahko zostrojiteľné aj pomocou prirodzenej dedukcie. keď množina predpokladov je rozšírená o dodatočný predpoklad p, $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, p\} \vdash (q \wedge r)$.



Obrázok 3. Sémantické tablo pre $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$ (pozri príklad 5), kde každá vetva je uzavretá, potom relácia tautologického dôsledku $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow r)$ je platná.

Príklad 7. Pomocou sémantického tabla budeme hľadať riešenie, ktoré vyplýva z $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$, t. j. budeme riešiť reláciu $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash ?$. Výsledky sú znázornené na obr. 5

Zo sémantického tabla vyplýva, že otvorené vetvy produkujú tri interpretácie (modely)

$$\tau_1 = (p/0, q/0, r/?)$$
$$\tau_2 = (p/0, q/?, r/1)$$
$$\tau_3 = (p/?, q/1, r/1)$$

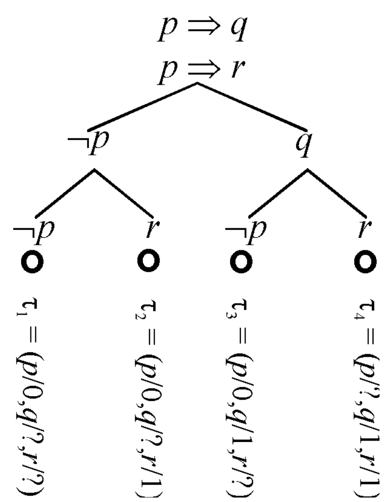
Každému modelu môžeme pripísať riešenie, ktoré je pravdivé

$$\psi_1 = \neg p \wedge \neg q$$
$$\psi_2 = \neg p \wedge r$$
$$\psi_3 = q \wedge r$$

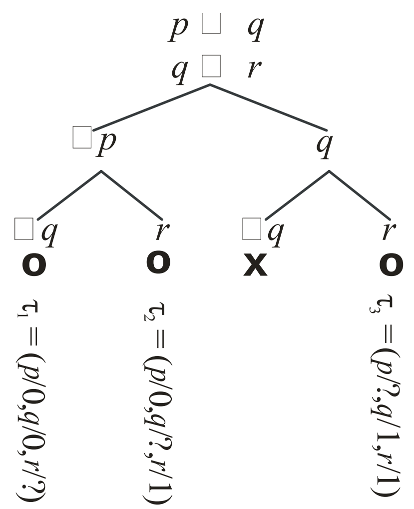
Ak tieto tri nezávislé riešenia spojíme pomocou disjunkcie

$$\psi = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv \left(\neg p \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{1} \right) \vee \left(r \wedge \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{1} \right) \equiv \neg p \vee r \equiv p \Rightarrow r$$

Týmto sme dokázali, že platí $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$, čo nie je nič iné, ako hypotetický sylogizmus.



Obrázok 4. Sémantické tablo pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$



Obrázok 5. Sémantické tablo pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$

Na záver môžeme konštatovať, že sémantické tablá poskytujú jednoduchý a efektívny prostriedok pre kontrolu vzťahu „tautologického vyplývania“, $\Phi \vDash \psi$, pričom nemusíme poznať relatívne zložitú syntaktickú teóriu dôkazu „logického vyplývania“ . Taktiež, sémantické tablo je vhodnou technikou na riešenie relácie tautologického vyplývania $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash ?$, pomocou „partikulárnych“ riešení pre jednotlivé otvorené vetvy dostaneme riešenie, ktoré je tautologickým dôsledkom teórie $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$.

7.7 Záver

Tvorba mentálneho modelu (mentálne modelovanie) patrí v kognitívnej vede medzi elementárne aktivity pri modelovaní kognitívnych aktivít. Koncepcia mentálneho modelovania poskytuje kognitívnej vede črty experimentálnej prírodovedy. Pomocou teoretického argumentačného aparátu (väčšinou prevzatého z umelej inteligencie) interpretuje experimentálne merania kognitívnej vedy (kognitívnej psychológie) spôsobom, ktorý silne pripomína vzťah medzi experimentom a teóriou v prírodovede. Mentálny model pre danú kognitívnu aktivitu vystupuje v úlohe jej teórie, pričom kritériom platnosti a efektívnosti danej teórie – mentálneho modelu, je súhlas jeho predikcií s experimentálnymi pozorovaniami, výsledkami pozorovaní kognitívnej psychológie. Požaduje sa, aby mentálne modely boli schopné postihnúť nielen správne riešenia ale aj interpretovať chyby pri konštrukcii riešenia. Tieto modely majú určitú zložitosť, ktorá je premenlivá pri aplikovaní na rôzne problémy (napr. na rôzne kategorické sylogizmy) (Johnson – Laird, 1983), pričom očakávame, že táto zložitosť modelu koreluje s výskytom chýb.

V tomto článku sme venovali pozornosť konštrukcii mentálnych modelov jednoduchej výrokovej logiky. K ich konštrukcii boli použité dva rôzne prístupy:

(1) ***Syntaktický prístup***, kde mentálny model je totožný s Gentzenovým systémom prirodzenej dedukcie, ktorý obsahuje okolo tuctu elementárnych pravidiel usudzovania, ktoré sú totožné so známymi zákonmi logiky (modus ponens a modus tollens, hypotetický sylogizmus, pravidlo inverzie implikácie a pod.). Tento mentálny model sa aplikuje užívateľmi, ktorí sú trénovaní vo formálnej logike aspoň na takej úrovni, že absolvovali základné logické vzdelanie na úrovni úvodu do výrokovej logiky.

(2) ***Sémantický prístup***, kde mentálny model je založený na sémantických tablách. Tento prístup požaduje od užívateľa len schopnosť korektne pravdivostne (sémanticky) interpretovať elementárne logické spojky, k čomu dochádza podľa Inhelderovej a Piageta u detí vo veku okolo 10 rokov. Môžeme teda konštatovať, že tento sémantický prístup ku konštrukcii mentálneho modelu logiky je aplikovaný užívateľmi, ktorí neabsolvovali tréning vo výrokovej logike, ktorých jedinou kognitívnou schopnosťou je korektne pravdivostne (sémanticky) interpretovať elementárne logické spojky. Samozrejme, v tomto prístupe neustále pretrvávajú problémy s korektnou interpretáciou implikácie, ktoré môžu byť zdrojom chýb (experimentálne pozorovaných) v usudzovaní.

Literatúra

Cosmides, L., Tooby, J. (1992). Cognitive adaptations for social exchange. In Barkow, J., Cosmides, L., Tooby, J. (eds.). *The adapted mind*. Oxford University Press, New York.

Gahér, F. (1998): *Logika pre každého*. IRIS, Bratislava.

Gigerenzer, G., Selten, R. (Eds.) (2001). *Bounded rationality: The adaptive toolbox*. MIT Press, Cambridge, (MA).

Inhelder, B., Piaget, J. (1964). *The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation.* Routledge and Kegan Paul, London.

Jirků, P., Vejnarová. J. (2000). *Logika - Neformální úvod do formální logiky*. VŠE, Praha.

Johnson – Laird, P.N. (1983). *Mental Models. Toward a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Cambridge University Press, Cambridge.

Kvasnička V., Pospíchal, J. (2006): *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava.

Luria, A. R. (1979). *The Making of Mind* (Cole, M., Cole, S., eds.). Harvard University Press, Cambridge (MA).

Návrat, P., a kolekt. (2001). *Umelá inteligencia*. Vydavateľstvo STU, Bratislava.

Peregrin, J (2004). *Logika a logiky*. Academia, Praha.

Russel, S., Norvig, P.(1995). *Artificial Intelligence. A Modern Approach*. Prentice Hall, New Jersey.

Smullyan, R. (1968). *First Order-Logic*. Springer Verlag, New York (existuje slovenský preklad knihy z r. 1979: *Logika prvého rádu*. Alfa, Bratislava).

Sochor, A. (2001). *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha.

Stenning, K., van Lambalgen, M. (2007). *Semantics and cognition: Semantic insight into the psychology of reasoning* (to be published).

Gentzen, G. (1935). Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 405-431. Anglický preklad: Investigations into logical deduction, in *The Collected Papers* *of Gerhard Gentzen*, edited by Szabo, M. E. (ed.) (1969). North-Holland, Amsterdam, pp. 68-131.

Švejdar, V. (2002). *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha.

Turney, P., Whitley, D., Anderson, R.W. (eds.) (1996). Evolution, Learning, and Instinct: 100 Years of the Baldwin Effect. A special issue of *Evolutionary Computation* **4**, No. 3.

Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology,* **20**, 273-281.