7. prednáška

Mentálne modely logiky v kognitívnej vede

Logika -syntax -sémantika -~~pragmatika~~

Ruský psychológ A. R. Luria v knihe „*Cognitive Development Its Cultural and Social Foundations*“, ktorej preklad vyšiel v r. 1973 v USA, popísal svoj výskum v 30. rokoch minulého storočia, ktorý vykonal v Strednej Ázii. Ukázal, že negramotný pôvodný obyvatelia mali vážne problémy s používaním pravidla modus ponens.

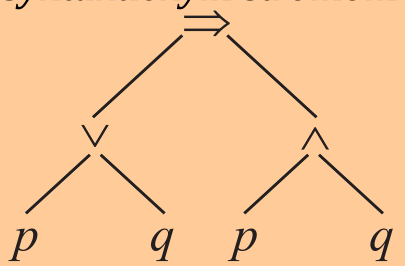
tvorba formúl logiky

(1) atomické výrokové premenné
$p, q, r, s, \ldots$,

(2) logické spojky: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \equiv, \neg$,

(3) φ a ψ sú formuly, potom aj
$(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$,
$(\varphi \equiv \psi)$ a $(\neg\varphi)$ sú formuly.

Každá formula je špecifikovaná ***syntaktickým stromom***



$p \vee q \Rightarrow p \wedge q$

pravdivostný význam formúl logiky

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$	$p\equiv q$	$\neg p$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\vee q \Rightarrow p\wedge q$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Teória dôkazu – logický dôkaz (syntaktický prístup)

A. Hilbertov prístup – axiomatický prístup

Logický dôkaz je presne špecifikovaný spôsob odvodzovania logických formúl zákonov, pričom sa vychádza z niekoľko málo vopred daných zákonov - axióm, z ktorých pomocou presne formulovaného spôsobu dôkazu zostrojujeme nové zákony. ***Pravidlo modus ponens*** (pravidlo odlúčenia)

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi\end{array}}{\psi}$$

Definícia

(1) *Formula* φ *sa nazýva* **bezprostredným logickým dôsledkom** *množiny formúl* $T=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ *vtedy a len vtedy, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formuly z* T.

(2) *Formula* φ *sa nazýva* **logický dôsledok** *množiny formúl* T *(čo označíme* $T\vdash\varphi$ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi\in T$ *alebo je bezprostredným dôsledkom* T *alebo je bezprostredným dôsledkom* T *rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(3) *Konečná postupnosť formúl* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ *sa nazýva d***ôkaz** *formuly* φ *z množiny* T *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi=\varphi_n$ *a každá formula* φ_i *z tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z* T *alebo formúl* $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{i-1}$.

Hilbertov systém axióm

$$\boldsymbol{Ax_1} \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$\boldsymbol{Ax_2} \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

$$\boldsymbol{Ax_3} \quad (p \wedge q) \Rightarrow p$$

$$\boldsymbol{Ax_4} \quad (p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$\boldsymbol{Ax_5} \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$$

$$\boldsymbol{Ax_6} \quad p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$\boldsymbol{Ax_7} \quad q \Rightarrow (p \vee q)$$

$$\boldsymbol{Ax_8} \quad (p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$$

$$\boldsymbol{Ax_9} \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$$

$$\boldsymbol{Ax_{10}} \quad \neg\neg p \Rightarrow p$$

logické vyplývanie

Príklad. Dokáže $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$

1	$p \Rightarrow q$	(predpoklad)
2	$q \Rightarrow r$	(predpoklad)
3	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	(Ax_1 , substitúcia $p/(q \Rightarrow r)$ a q/p)
4	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	(aplikácia *mp* na 2 a 3)
5	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(Ax_2).
6	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(aplikácia *mp* na 4 a 5)
7	$p \Rightarrow r$	(aplikácia *mp* na 1 a 6)

B. Gentzenov prístup - prirodzená dedukcia

Pravidlá usudzovania vo výrokovej logike tvoria schému

$$\begin{array}{|l} predpoklad_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ predpoklad_n \\ \hline záver \end{array}$$

ktorá obsahuje *n predpokladov* a jeden *záver*. Táto schéma usudzovania je totožná so symbolom *logického dôkazu*

$$\{predpoklad_1, \ldots, predpoklad_n\} \vdash záver$$

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi \equiv \vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi \equiv \vdash \varphi_1 \Rightarrow \left(\varphi_2 \Rightarrow \left(\Rightarrow \ldots \left(\varphi_n \Rightarrow \varphi\right)\right)\right)$$

$\dfrac{p}{p \vee q}$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	adícia
$\dfrac{p \wedge q}{p}$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	simplifikácia (zjednodušenie)
$\dfrac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	konjunkcia
$\dfrac{\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q}$	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	modus ponens
$\dfrac{\begin{array}{l} \neg q \\ p \Rightarrow q \end{array}}{\neg p}$	$\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$	modus tollens
$\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	hypotetický sylogizmus
$\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$	$(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	disjunktívny sylogizmus
$\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	inverzia implikácie
$\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow \neg q \end{array}}{\neg p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	reductio ad absurdum

Príklad 1

Použitím schémy usudzovania adície k pravdivému výroku *´teplota je pod bodom mrazu´* môžeme pomocou disjunkcie priradiť ľubovolný výrok (pravdivý alebo nepravdivý), napr. *´prší´*, dostaneme pravdivý záver *´teplota je pod bodom mrazu alebo prší´*

$$\frac{\textit{teplota je pod bodom mrazu}}{\textit{teplota je pod bodom mrazu alebo prší}}$$

Príklad 2

Uvažujme dva výroky

´ak dnes bude pršať, potom sa nepôjdem kúpať˝ a

´ak sa nepôjdem kúpať, potom navštívim príbuzného´

Použitím schémy usudzovania nazvanej hypotetický sylogizmus dostaneme z týchto dvoch predpokladov záver *´ak dnes bude pršať, potom navštívim príbuzného´*

$$\begin{array}{|l} \text{ak dnes bude pršať, potom sa nepôjdem kúpať} \\ \text{ak sa nepôjdem kúpať, potom navštívim príbuzného} \\ \hline \text{ak dnes bude pršať, potom navštívim príbuzného} \end{array}$$

Túto schému môžeme sformalizovať pomocou výrokov

p=´dnes prší´

q=´kúpem sa´

r= ´navštívim príbuzného´

potom schéma má formálny tvar mierne modifikovaného hypotetického sylogizmu

$$\begin{array}{|l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Súhrn poznatkov z teórie dôkazu

- Vzorom pre axiomatický systém logiky je ***Euklidov axiomatický systém geometrie***. Systém obsahuje atomické výrazy (bod, priamka, rovina,...), spojky (prienik, kolmý, rovnobežný, ...) a systém výrokov - axióm, ktorých pravdivosť sa automaticky akceptuje.

- ***Pôvodný Hilbertov formálny systém*** logického dôkazu je pre kognitívnu vedu bezcenný, je veľmi zložitý na to, aby sa dal použiť ako mentálny model usudzovania.

- ***Gentzenov systém prirodzenej dedukcie*** (ktorý je formálne rovnocenný Hilbertovmu systému) nesie všetky znaky jednoduchosti a intuitívnosti, preto je vhodný ako ***mentálny model logiky*** pre tých, čo už absolvovali základné vzdelanie v logike.

Teória a model – tautologický dôkaz (sémantický prístup)

Definícia.
Ľubovolná neprázdna množina formúl, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ *sa nazýva* ***teória*** *výrokovej logiky. Ak pre teóriu* Φ *existuje taká interpretácia* τ*, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé,* $val_\tau(\varphi_i) = 1$*, pre* $i = 1, 2, \ldots, n$*, potom táto interpretácia* τ *sa nazýva* ***model teórie****. Teória* Φ *sa nazýva* ***konzistentná****, ak má model. Ak teória nemá model, potom sa nazýva* ***nekonzistentná****.*

$$\Phi = \{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$$

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

1	2	3	4	5
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$4 \wedge 5$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

1	2	3	4	5
P	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$3 \Rightarrow 4$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$3 \wedge 4$	$p \Rightarrow q$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Pre interpretácie $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_2 = (p/1, q/1)$ sú všetky formuly z Φ pravdivé, t.j. interpretácie τ_1 a τ_2 sú modelom teórie Φ (teória Φ je konzistentná).

Definícia.
Formula φ *sa nazýva* ***tautologický dôsledok teórie*** Φ *(*$\Phi \vDash \varphi$*) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie* Φ *je aj modelom formuly* φ *(t.j. formula* φ *je v ňom pravdivá).*

Príklad

Nech teória Φ je
$$\Phi = \{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$$

má dva modely $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_2 = (p/1, q/1)$. Uvažujem formulu
$$\varphi = p \Rightarrow q$$
táto formula je tautologickým dôsledkom teórie Φ, pretože pre oba modely τ_1 a τ_2 je formula φ pravdivá, $\Phi \vDash (p \Rightarrow q)$.

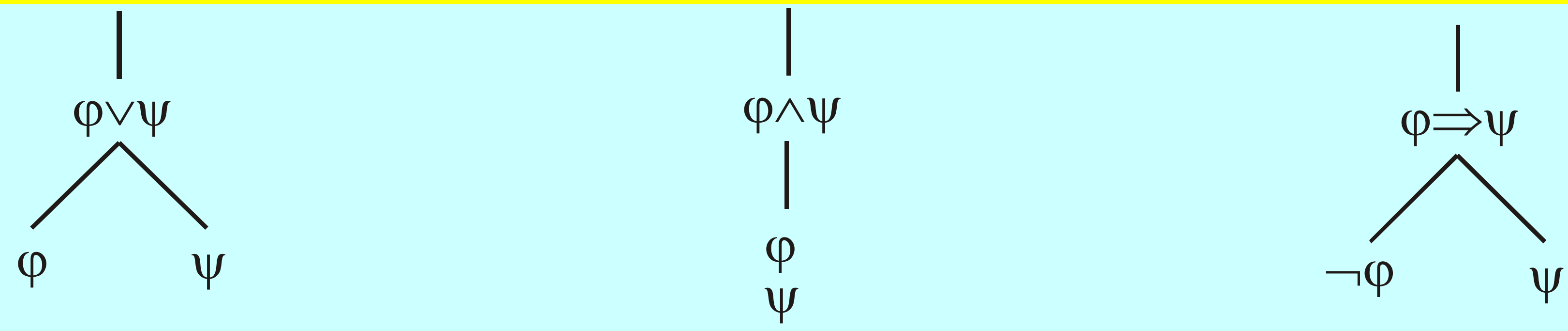
Veta (Postova veta).
Pre ľubovoľnú formulu φ vzťah $\Phi \vdash \varphi$ platí práve vtedy, ak $\Phi \models \varphi$

$$(\Phi \vdash \varphi) \equiv (\Phi \models \varphi)$$

Dôsledok

- Formula φ logický vyplýva z predpokladov Φ ($\Phi \vdash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak formula φ je tautologickým dôsledkom formúl z teórie Φ.
- Je jedno, akým spôsobom dokážeme, že formula φ vyplýva z predpokladov-teórie Φ, či syntaktickým spôsobom (napr. pomocou prirodzenej dedukcie) alebo pomocou sémantického prístupu, podľa Postovej vety oba postupy sú ekvivalentné.

Dôkaz $\Phi \models \varphi$ pomocou metódy sémantického tabla



A (*disjunkcia*) *B* (*konjunkcia*) *C* (*implikácia*)

Základné princípy metódy sémantických tabiel

- Pomocou metódy sémantických tabiel budeme riešiť úlohu, či daná výroková formula ψ má model, t. j. či existuje aspoň jedna interpretácia τ taká, že $val_\tau\left(\psi\right)=1$.

- Táto úloha je vo všeobecnosti riešiteľná pomocou tabuľkovej metódy, avšak metóda sémantických tabiel predstavuje veľmi efektívnu alternatívu k tabuľkovej metódy, kde musíme vyšetrovať 2^n riadkov, keď formula ψ má n atomických výrokových premenných.

- Metóda sémantických tabiel je založená na postupnej diagramatickej transformácii formuly ψ do ekvivalentného DNF tvaru ψ_{DNF} (disjunktívna normálna forma, ktorá obsahuje disjunkcie konjunkcií literálov)

Ilustračný príklad

$$\psi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$$

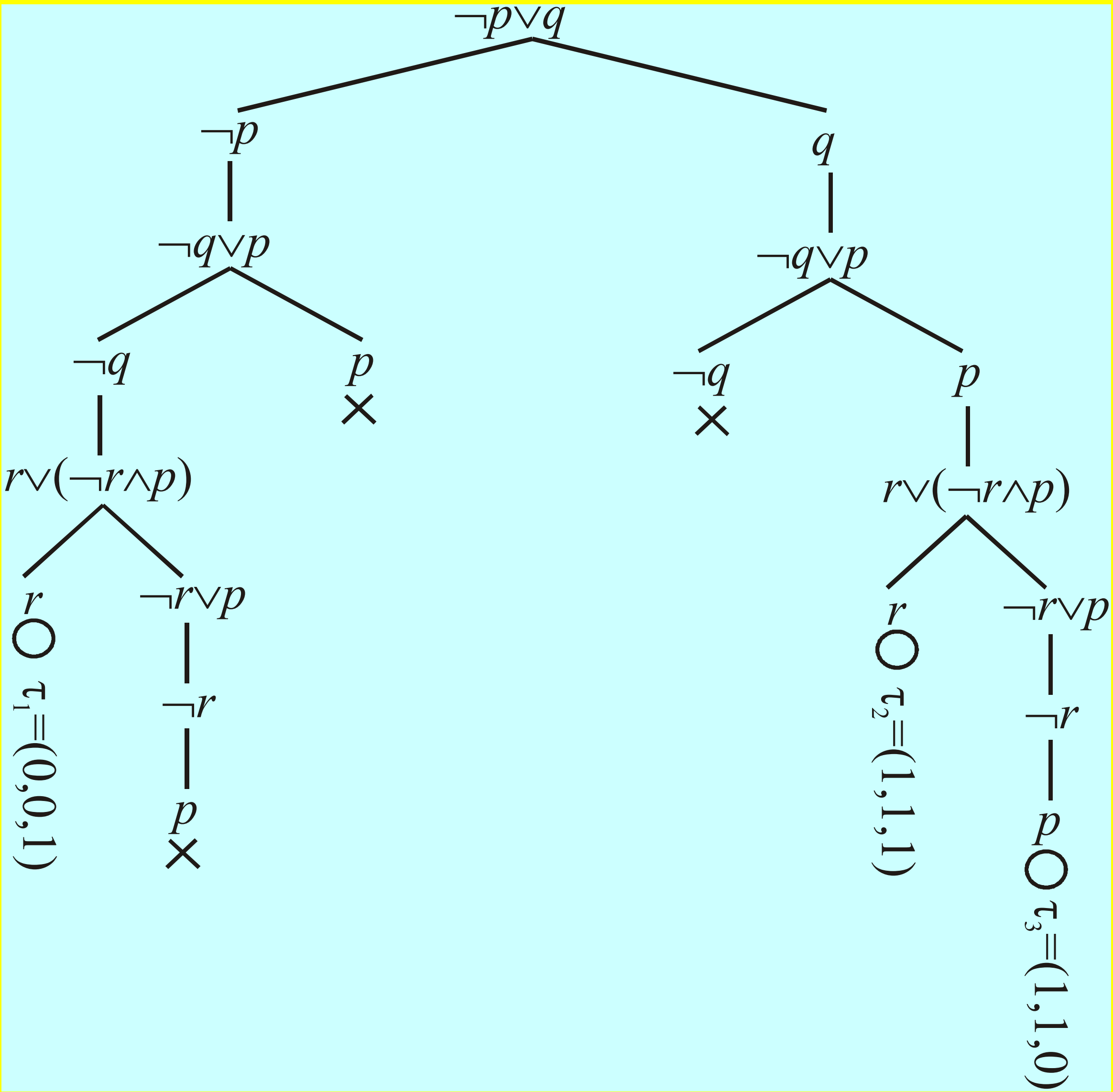
$$\psi' = \psi_{DNF} = \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{\square} \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge r)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q \wedge r)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r)}_{\square} \vee$$

$$\underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p)}_{\times} \vee$$

$$\underbrace{(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\square}$$

$$= \underbrace{(\neg p \wedge \neg q \wedge r)}_{\tau_1 = (0,0,1)} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r)}_{\tau_2 = (1,1,1)} \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)}_{\tau_3 = (1,1,0)}$$

Sémantické tablo formuly $\psi = (p \equiv q) \wedge \left(r \vee \neg(r \vee \neg p)\right)$



Všeobecná schéma sémantického tabla

$$\Phi \models \psi$$

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \psi$$

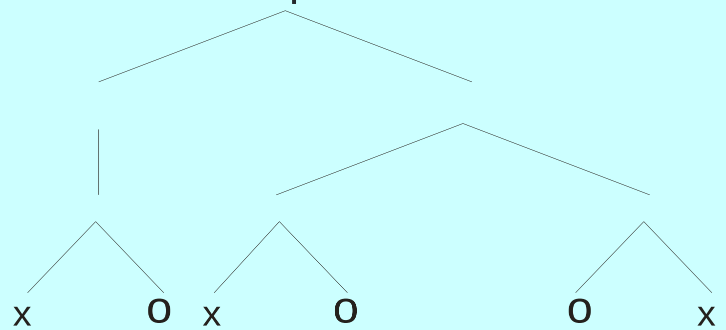
$$\varphi_1$$

$$\varphi_2$$

$$\ldots$$

$$\varphi_n$$

$$\psi$$



Veta. Formula ψ je tautologickým dôsledkom formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, $\Phi \models \psi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo zostrojené pre formuly $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi\}$ obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu.

Dôsledok

Sémantické tabla poskytujú jednoduchý a efektívny prostriedok pre kontrolu vzťahu „tautologického vyplývania“, $\Phi \models \psi$, pričom nemusím poznať relatívne zložitú syntaktickú teóriu dôkazu „logického vyplývania“

B. Inhelder spolu s J. Piagetom v knihe *The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation* (1964) dôvodia, že už deti vo veku 10 rokov zvládajú zásady sémantického prístupu k výrokovej logike. Sú schopné korektne reprodukovať tabuľku pravdivostných hodnôt pre disjunkciu, konjunkciu a negáciu. Problémy so sémantickou interpretáciou implikácie pretrvávajú až do dospelosti, správna interpretácia vyžaduje základné psychologické vzdelanie.

Príklad

Preskúmame pravidlo modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q} \quad \text{alebo} \quad \Phi = \{p \Rightarrow q, p\} \models q$$

pomocou sémantického tabla

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \neg p & & q \\ \times & & \tau = (p/1, q/1) \end{array}$$

Teória $\Phi = \{p \Rightarrow q, p\}$ má model $\tau = (p/1, q/1)$, pre ktorý je aj formula $\varphi = q$ pravdivá, t. j. platí $\Phi \models q$, QED.

Príklad

$$\Phi = \{\neg p \wedge q, p \vee r, r \Rightarrow s\} \models (q \wedge s)$$

$\neg p \wedge q$

$p \vee r$

$r \Rightarrow s$

$q \wedge s$

$\neg p$

q

q

s

p X | r

$\neg r$ X | s O

$\psi_1 = \neg p$

$\psi_2 = s$

$\psi_3 = q$

$\psi_4 = s \wedge q$

....

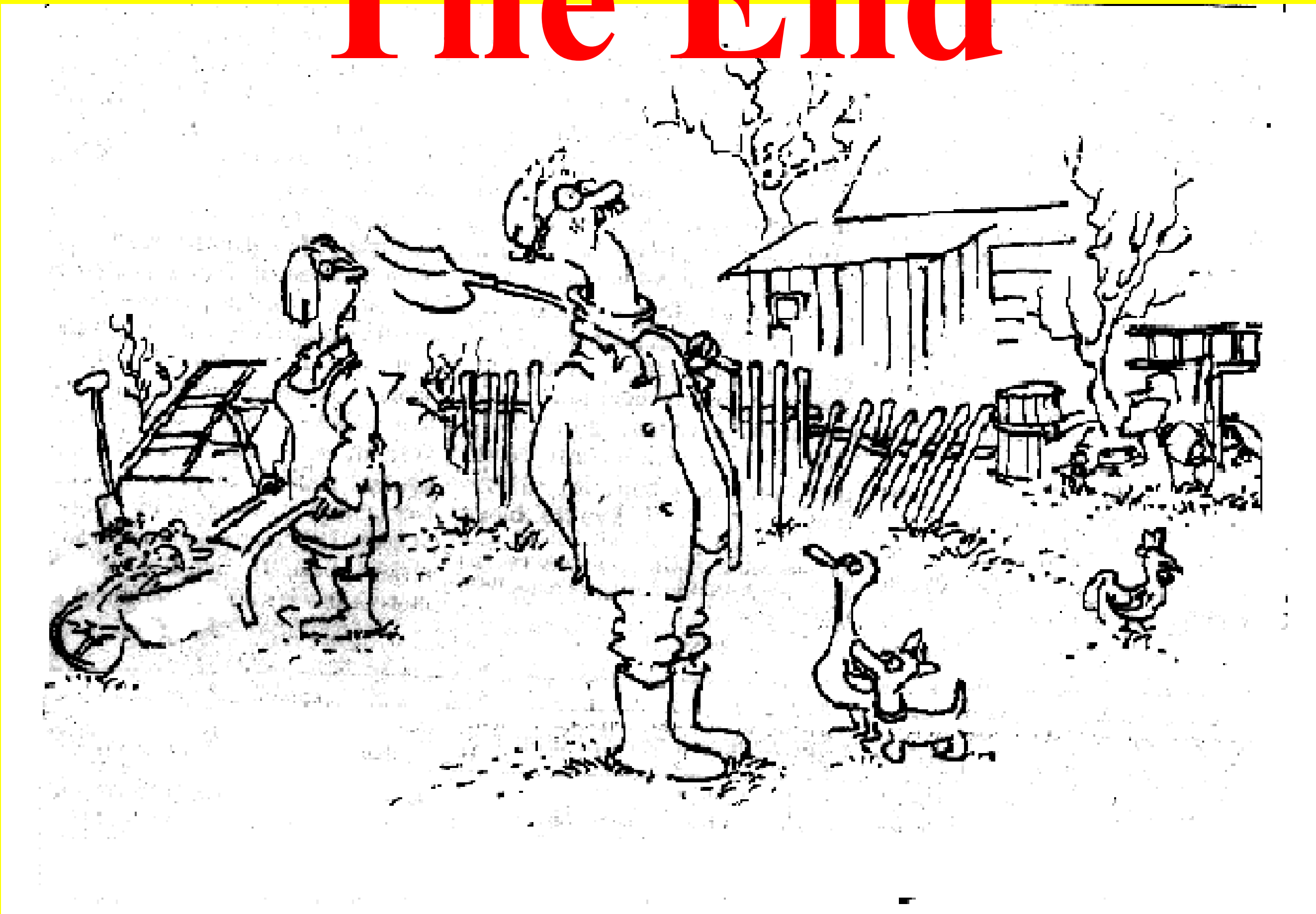
$$\tau = (p/0, q/1, r/1, s/1,)$$

Záverečné poznámky

Ukázali sme, že existujú dva principiálne odlišné prístupy ku kognitívnemu modelovaniu schopnosti usudzovať:

1. ***Syntaktický prístup*** Gentzenovej prirodzenej dedukcie je vhodný pre užívateľov už trénovaných v logike. Pomocou tohto prístupu môžeme v mnohých prípadoch pomerne jednoducho a rýchlo dokázať „logické vyplývanie“ formuly φ z množiny predpokladov Φ, $\Phi \vdash \varphi$.
2. ***Sémantický prístup*** sémantických tabiel je vhodný pre „laikov v logike“, ktorí sú schopní správne zreprodukovať pravdivostné tabuľky logických spojok a nemusia mať žiadne iné špeciálne vedomosti z logiky. Pomocou tohto prístupu môžeme rýchlo a jednoducho dokázať, že formula φ je tautologickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \vDash \varphi$.
3. Oba prístupy poskytujú možnosti ***experimentálnej verifikácie*** postulovaných kognitívnych modelov usudzovania. Táto možnosť je široko využívaná v sylogizmoch, kde respondenti musia nájsť riešenie daného sylogizmu.

The End



NAJRADŠI BYCH SE TADY NA VŠECHNO VYPRDNUL A VODJEL STUDOVAT KOGNITÍVNÍ VĚDY DO PREŠPURKU