Cvičenie

Cvičenie 8.1. Ako je špecifikovaný argument?

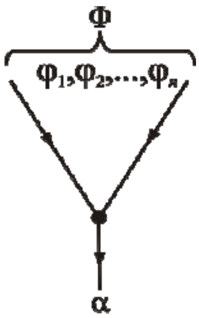
Riešenie. ***Argument*** je usporiadaná dvojica $A=(\Phi,\alpha)$, kde $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je teória tvorená množinou formúl, ktorá vyhovuje podmienkam:

(1) $\Phi \nvdash \perp$ (podmienka konzistentnosti),

(2) $\Phi \vdash \alpha$ (z podmnožiny Φ logicky vyplýva formula α),

(3) Φ je minimálna množina vyhovujúca podmienke (2) (stačí, ak odstránime jeden prvok podmnožiny Φ a prestane platiť podmienka $\Phi \vdash \alpha$).

Formula α sa nazýva ***dôsledok*** argumentu a podmnožina Φ sa nazýva ***podpora*** (support) argumentu. Schematické znázornenie argumentu $A=(\Phi,\alpha)$



V hornej časti diagramu sú uvedené východiskové predpoklady argumentu (konzistetná podpora argumentu), v dolnej časti diagramu je uvedený dôsledok (výsledná formula) α, ktorý je odvodený pomocou zásad prirodzenej dedukcie výrokovej logiky (táto postupnosť operácií prirodzenej logiky je reprezentovaná šípkami idúcimi zhora nadol).

Cvičenie 8.2. Nech $\Delta=\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta,\gamma\Rightarrow\neg\beta,\gamma,\delta,\delta\Rightarrow\beta,\neg\alpha,\neg\gamma\}$, potom nad touto množinou formúl môžeme definovať tieto argumenty:

- $A_1=(\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta\},\beta)$,
- $A_2=(\{\gamma\Rightarrow\neg\beta,\gamma\},\neg\beta)$,
- $A_3=(\{\delta,\delta\Rightarrow\beta\},\beta)$,
- $A_4=(\{\neg\alpha\},\neg\alpha)$,
- $A_5=(\{\neg\gamma\},\neg\gamma)$,
- $A_6=(\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta\},\neg\alpha\vee\beta)$,
- $A_7=(\{\neg\gamma\},\delta\Rightarrow\neg\gamma)$.

Dokážte pre tieto argumenty korektnosť ich dôsledkov.

Riešenie.

Argument A_1. Aplikácia modus ponens na teóriu $\Phi=\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta\}$, $\Phi\vdash\beta$.

Argument A_2. Aplikácia modus ponens na teóriu $\Phi=\{\gamma\Rightarrow\neg\beta,\gamma\}$, $\Phi\vdash\neg\beta$.

Argument A_3. Aplikácia modus ponens na teóriu $\Phi = \{\delta, \delta \Rightarrow \beta\}$, $\Phi \vdash \beta$

Argument A_4. Kopírovanie predpokladu z teórie $\Phi = \{\neg\alpha\}$, $\Phi \vdash \neg\alpha$.

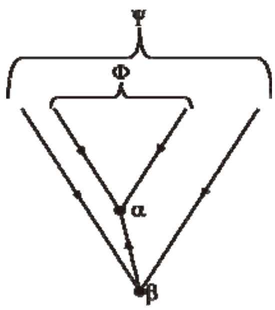
Argument A_5. Kopírovanie predpokladu z teórie $\Phi = \{\neg\gamma\}$, $\Phi \vdash \neg\gamma$.

Argument A_6. Aplikácia modus ponens na teóriu $\Phi = \{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta\}$, $\Phi \vdash \beta$, tento dôsledok je rozšírený pomocou disjunkcie o $\neg\alpha$, potom $\Phi \vdash \neg\alpha \vee \beta$.

Argument A_5. Kopírovanie predpokladu z teórie $\Phi = \{\neg\gamma\}$, potom $\Phi \vdash \neg\gamma$, tento dôsledok je rozírený pomocou disjunkcie o $\neg\delta$, dostaneme $\Phi \vdash (\neg\delta \vee \neg\gamma) \equiv (\delta \Rightarrow \neg\gamma)$

Cvičenie 8.3. Ako je definovaná relácia „konzervatívný“ argument?

Riešenie. Hovoríme, že argument $A = (\Phi, \alpha)$ je ***konzervatívnejší*** ako argument $A' = (\Psi, \beta)$ vtedy a len vtedy, ak $\Phi \subseteq \Psi$ a $\beta \vdash \alpha$. Obrazne môžeme povedať, že konzervatívnejší argument má všeobecnejší charakter, kladie menšie požiadavky na podporu a menej špecifický na dôsledok α. Význam tohto pojmu je znázornený na obrázku



Cvičenie 8.4. Vysvetlite reláciu „konzervatívnejší“ pre dva argumenty $A = \left(\underbrace{\{p, p \Rightarrow q\}}_{\Phi}, \underbrace{q}_{\alpha} \right)$ a

$$A' = \left(\underbrace{\{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}}_{\Psi}, \underbrace{q \wedge r}_{\beta} \right).$$

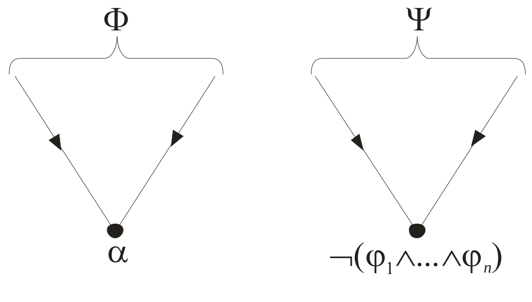
Riešenie. Pretože platí $\Phi \subseteq \Psi$ a $\beta \vdash \alpha$, argument A je konzervatívnejší ako argument $A´$., pričom platí $\underbrace{q \wedge r}_{\beta} \vdash \underbrace{q}_{\alpha}$. Túto skutočnosť môžeme alternatívne vyjadriť takto

$$\left. \begin{array}{l} (\{p, p \Rightarrow q\}, q) \\ \{q, q \Rightarrow r\} \vdash r \wedge q \end{array} \right\} \Rightarrow (\{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}, r \wedge q)$$

t. j. rozšírením argumentu $A = (\{p, p \Rightarrow q\}, q)$ o ďalší člen $q \Rightarrow r$ dostaneme nový argument $A' = (\{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}, r \wedge q)$, pričom argument A je konzervatívnejší ako argument $A´$.

Cvičenie 8.5. Ako je definované spochybnenie argumentu iným argumentom?

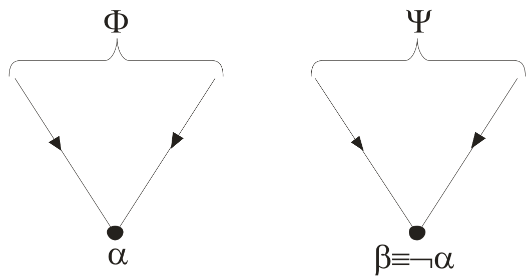
Riešenie. Hovoríme, že argument $A=(\Phi,\alpha)$ je spochybnený argumentom $A'=(\Psi,\beta)$ práve vtedy, ak dôsledok argumentu *A´* je negácia niektorých predpokladov argumentu *A*, t. j. $\beta\equiv\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)$, kde $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}\subseteq\Phi$. Táto formulácia spochybnenia jedného argumentu druhým je ekvivalentná s tým, že aspoň jeden predpoklad argumentu *A* je negáciou dôsledku argumentu *A´*. , pozri priložený obrázok



A (spochybnenie)

Cvičenie 8.6. Ako je definované vyvrátenie argumentu iným argumentom?

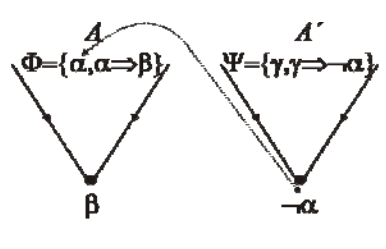
Riešenie. Hovoríme, že argument $A=(\Phi,\alpha)$ je vyvrátený argumentom $A'=(\Psi,\beta)$ práve vtedy, ak dôsledok argumentu *A´* je negácia dôsledku argumentu *A*, t. j. $\beta\equiv\neg\alpha$, pozri priložený obrázok



B (vyvrátenie)

Príklad 8.7. Nech univerzálna množina poznatkov má tvar $\Delta=\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta,\gamma,\gamma\Rightarrow\neg\alpha\}$, z tejto množiny vytvoríme dva argumenty $A=(\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta\},\beta)$ a $A'=(\{\gamma,\gamma\Rightarrow\neg\alpha\},\neg\alpha)$. Dokážte, že argument A' spochybňuje argument A.

Riešenie. Záver $\neg\alpha$ argumentu *A´* atakuje podporu $\Phi=\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta\}$ argumentu $A=(\{\alpha,\alpha\Rightarrow\beta\},\beta)$, pozri obrázok

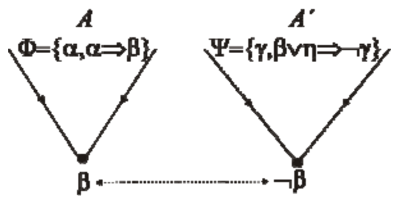


Príklad 8.8. Nech univerzálna množina poznatkov má tvar $\Delta = \{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta, \gamma, \beta \vee \eta \Rightarrow \neg\gamma\}$, z tejto množiny vytvoríme dva argumenty $A = (\{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta\}, \beta)$ a $A' = (\{\gamma, \beta \vee \eta \Rightarrow \neg\gamma\}, \neg\beta)$. Dokážte, že argument *A´* vyvracia argument *A*.

Riešenie. Pre úplnosť znázorníme pomocou prirodzenej dedukcie odvodenie záveru $\neg\beta$ pre argument *A´* , pozri nasledujúcu tabuľku

1	γ	1. predpoklad
2	$\beta \vee \eta \Rightarrow \neg\gamma$	2. predpoklad
3	$\gamma \Rightarrow \neg(\beta \vee \eta)$	aplikácia transpozície implikácie na 2
4	$\gamma \Rightarrow \neg\beta \wedge \neg\eta$	prepis 3 pomocou DeMorganovho zákona
5	$\neg\beta \wedge \neg\eta$	alikácia modus ponens na 1 a 4
6	$\neg\beta$	aplikácia eliminácie konjunkcie na 5

Na nasledujúcom obrázku sú znázornené argumenty *A* a *A´*, je ukázané, že tieto argumenty sú vo vzájomnom konflikte nazývanom vyvrátenie, ich závery sú vo vzájomnej kontradikcii.



Cvičenie 8.9. Nech $\Delta = \{\alpha, \beta, \neg\alpha, \neg\beta\}$ je univerzálna množina poznatkov, zostrojíme nad ňou tieto argumenty

$$A_0 = (\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta)$$
$$A_1 = (\{\neg\alpha\}, \neg(\alpha \wedge \beta))$$
$$A_2 = (\{\neg\beta\}, \neg(\alpha \wedge \beta))$$

Dokážte, že argumenty A_1 a A_2 sú spochybnenia argumentu A_0.

Riešenie. Pre úplnosť ešte uvedieme tabuľku prirodzenej dedukcie pre jednotlivé argumenty, ktoré z predpokladov každého argumentu vedú k jeho záveru.

argument A_0	argument A_1	argument A_2
α β ――― $\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha$ ――― $\neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\neg\beta$ ――― $\neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \wedge \beta)$

Cvičenie 8.10. Dokážte, že vzťah spochybnenia medzi dvoma argumentmi je symetrický.

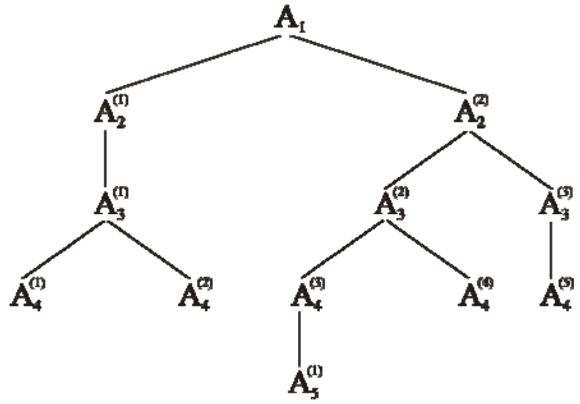
Riešenie. Z predpokladu, že (Ψ,β) je spochybnenie argumentu (Φ,α) vyplýva, pre $\Phi=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$; potom $(\Psi,\beta)=(\Psi,\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n))$. Pre záver β z definície argumentu vyplýva $\Psi\vdash\beta$, alebo $\Psi\vdash\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$, čo môžeme prepísať ako implikáciu $\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n\Rightarrow\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$, použitím transpozície implikácie dostaneme $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\Rightarrow\neg(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n)$. Týmto sme dokázali, že z predpokladu platnosti vety vyplýva $\Phi\vdash\neg(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n)$. čiže môžeme zostrojiť argument $(\Phi,\neg(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n))$, ktorý je spochybnenie argumentu (Ψ,β).

Cvičenie 8.11. Dokážte, že vzťah vyvrátenia medzi dvoma argumentmi je symetrický.

Riešenie. Z predpokladu, že (Ψ,β) je vyvrátením argumentu (Φ,α) vyplýva ekvivalencia $\beta\equiv\neg\alpha$, potom platí aj $\alpha\equiv\neg\beta$, t. j. argument (Φ,α) je vyvrátením argumentu (Ψ,β), čo bolo potrené dokázať.

Cvičenie 8.12. Ako je špecifikovaný strom argumentácie?

Riešenie. Pod argumentáciou rozumieme proces, ktorý je zahájený počiatočným argumentom, $A_1=(\Phi_1,\alpha_1)$, ktorého záver α_1 logicky vyplýva (čo môžeme napr. verifikovať pomocou prirodzenej dedukcie) z podpory Φ_1, formálne $\Phi_1\vdash\alpha_1$. Námietka (prvý protiargument) je vytvorený pomocou ataku $A_2=(\Phi_2,\alpha_2)$, kde dôsledok α_2 je v kontradikcii aspoň s jedným predpokladom $\varphi\in\Phi_1$ (spochybnenie), alebo je v kontradikcii so záverom α_1, $\alpha_1\equiv\neg\alpha_2$. Týchto atakov počiatočného argumentu A_1 môže byť vytvorených niekoľko. Tento proces opakujeme tak dlho, ako je možné vytvárať neekvivalentné ataky argumentov z predchádzajúcej etapy. Konštrukciu týchto argumentácií a ich protiargumentácií môžeme znázorniť pomocou ***stromu argumentácie***, ktorý je koreňovým stromom, kde koreňom je počiatočný argument A_1, v nasledujúcej vrstve sú umiestnené protiargumenty k pôvodnému argumentu, atď.



Príklad 8.13. Nech $\Delta=\{r,s,\neg p,(\neg r\Rightarrow\neg p)\Rightarrow\neg q,(p\Rightarrow s)\Rightarrow q\}$. Z tejto univerzálnej databázy poznatkov vytvoríme tieto argumenty

$$A_1=(\{r,(\neg r\Rightarrow\neg p)\Rightarrow\neg q\},\neg q),$$

$$A_2^{(1)} = \left(\left\{s, (p \Rightarrow s) \Rightarrow q\right\}, q\right),$$
$$A_2^{(2)} = \left(\left\{s, (p \Rightarrow s) \Rightarrow q, (\neg r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q\right\}, \neg(p \Rightarrow r)\right),$$
$$A_3^{(1)} = \left(\left\{\neg p, (\neg r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q\right\}, \neg q\right).$$

Zostrojte ich strom argumentácie.

Cvičenie. Inferenčné schémy pre jednotlivé argumenty sú uvedenbe v tabuľke

argument A_1	argument $A_2^{(1)}$	argument $A_2^{(2)}$	argument $A_3^{(1)}$
$\begin{array}{l} r \\ (\neg r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q \\ \hline r \vee \neg p \\ \neg r \Rightarrow \neg p \\ \neg q \end{array}$	$\begin{array}{l} s \\ (p \Rightarrow s) \Rightarrow q \\ \hline \neg p \vee s \\ p \Rightarrow s \\ q \end{array}$	$\begin{array}{l} s \\ (p \Rightarrow s) \Rightarrow q \\ (\neg r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q \\ \hline \neg p \vee s \\ p \Rightarrow s \\ q \\ q \Rightarrow \neg(\neg r \Rightarrow \neg p) \\ \neg(\neg r \Rightarrow \neg p) \\ \neg(p \Rightarrow r) \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg p \\ (\neg r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q \\ \hline r \vee \neg p \\ \neg r \Rightarrow \neg p \\ \neg q \end{array}$

Pre každý argument zostrojíme príslušné schéma usudzovania prirodzenej dedukcie, pomocou ktorého z predpokladov argumentu uvedených v zložených zátvorkách zostrojíme dôsledok Strom argumentácie má tvar znázornený na nasledujúcom obrázku.