# 9. prednáška

## Revízia poznatkov

### 9.1 Úvodné poznámky

Problém revízie poznatkov má vo filozofii a v logike dlhú tradíciu. Stal sa integrálnou súčasťou mnohých traktátov a monografií z filozofie poznania (epistemológie) a logiky od staroveku až po súčasnosť, ktor0 obsahovali rozsiahle kapitoly, kde väčšinou na fenomenologicko-špekulatívnej úrovni sa formulovali zásady nášho myslenia, argumentácie a zmeny poznatkov vyplývajúcich zo zmien východiskových predpokladov, ich rozšírenia alebo čiastočnej falzifikácie. Táto zaujímavá problematika sa stala súčasťou aplikovanej matematickej logiky až koncom minulého storočia, kedy jej formálny aparát bol použitý na formuláciu teórie revízie poznatkov. Taktiež, problém revízie poznatkov sa stal v súčasnosti súčasťou informatiky a umelej inteligencie a tým musel prejsť z roviny všeobecno–špekulatívnej k rovine formálno–exaktnej, ktorá môže slúžiť ako základ algoritmizácie problematiky revízie poznatkov na počítačoch.

Tak napríklad, ak chceme špecifikovať základné epistemické princípy vývinu vedy, dynamiku jej vývoja v čase, tento cieľ môže byť realizovaný na abstraktnej úrovni tak, že študujeme danú konzistentnú databázu poznatkov. Táto databáza je v čase postupne modifikovaná elementárnymi operáciami, akými sú dodanie nového poznatku a odstránenie pôvodného poznatku. V obidvoch prípadoch tieto operácie zmeny môžu ovplyvňovať ostatné poznatky, preto sa vykonáva ichrevízia, aby sa odstránili prípadné nekonzistentosti. V počiatočnom období vzniku teórie revízie poznatkov (80. roky minulého storočia) základné idey boli formulované švédskym kognitívnym vedcom Petrom Gärdenforsom [xx] a dvojicou amerických logikov Carlosom Alchourrónom a Davidom Makinsomom [xx], ktorí spoločne v r. 1985 publikovali v *Journal of Symbolic Logic* významnú prácu [xx] (ktorá sa v odbornej literatúre označuje akronymom AGM počiatočných písmen ich priezvisk v abecednom poriadku jej autorov), v ktorej formulovali základné princípy, koncepcie a konštrukcie teórie revízie poznatkov.

**Príklad 9.1.** Predpokladajme, že teória obsahuje tieto štyri poznatky:

$p_1$ = ′*všetky európske labute sú biele*′
$p_2$ = ′*vták zachytený do siete je labuť*′
$p_3$ = ′*vták zachytený v sieti pochádza zo Slovenska*′
$p_4$ = ′*Slovensko je časťou Európy*′

Ak tieto štyri poznatky tvoria vstup do programu simulujúceho logické usudzovanie, potom ako výstup z tohto programu dostaneme nový poznatok

$p_5$ = ′*vták zachytený v sieti je biely*′

Teraz predpokladajme, že naša databáza bola doplnená o ďalší poznatok

$p_6$ = ′*vták zachytený v sieti je čierny*′

Tento nový „poznatok“ je v kontradikcii so záverom $p_5$ , t. j. platí $p_6 = \neg p_5$ . Potom musíme vykonať ***revíziu*** databázy, aby sme odstránili túto nekonzistentnosť, t. j. niektorý poznatok z z pôvodnej databázy $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ musí byť odstránený alebo modifikovaný. Tak napríklad, ak poznatok $p_1$ nahradíme novým poznatkom

$$p_1' = \text{'všetky európske labute sú biele, okrem niektorých zo Slovenska, ktoré sú čierne'}$$

táto náhrada odstraňuje vyššie spomenutú nekonzistentnosť tak, že jednoznačná špecifikácia v poznatku $p_1$ o tom, že každá labuť je biela, je nahradená novým poznatkom $p_1'$, že pôvodný predpoklad platí pre labute okrem niektorých slovenských labutí, ktoré sú čierne.

V použitom prístupe k formulácii teórii revízie poznatkov, poznatky sú reprezentované formulami výrokovej logiky, ktoré sú zostrojené nad abecedou atomických výrokov $\mathcal{A} = \{p, q, ..., p', q', ...\}$ a množinou logických spojok $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \neg\}$. Jazyk výrokovej logiky zostrojený nad abecedou $\mathcal{A}$ označíme $L_{\mathcal{A}} = \{\varphi, \psi, ..., \varphi', \psi', ..., \bot, \mathsf{T}\}$, kde sú uvedené dva symboly (formuly), ktoré reprezentujú kontradikciu resp. tautológiu (napr. $\bot \equiv p \wedge \neg p$ a $\mathsf{T} \equiv p \vee \neg p$). Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subseteq L_{\mathcal{A}}$ je množina formúl (teória) výrokovej logiky. Hovoríme, že z teórie $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ ***logicky vyplýva*** formula $\psi$, $\Phi \vdash \psi$, práve vtedy, ak existuje postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ z jazyka $L_{\mathcal{A}}$, pričom pre každé $i$ = 1, 2, ..., $m$ platí jedna z nasledujúcich dvoch podmienok: (1) formula $\alpha_i$ je totožná s nejakou formulou z $\Phi$, alebo (2) formula $\alpha_i$ je logickým dôsledkom formúl $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}$. Teória $\Phi$ je ***nekonzistentná*** vtedy a len vtedy, ak existuje taká formula $\psi$, že súčasne platí $\Phi \vdash \psi$ a $\Phi \vdash \neg\psi$, čo môžeme formálne zapísať pomocou existenčného kvantifikátora, $(\exists\psi)((\Phi \vdash \psi) \wedge (\Phi \vdash \neg\psi))$. Potom teória $\Phi$ je ***konzistetná*** vtedy a len vtedy, ak pre každú formulu $\psi$ platí $\Phi \nvdash \psi$ alebo $\Phi \nvdash \neg\psi$, t. j. $(\forall\psi)((\Phi \nvdash \psi) \vee (\Phi \nvdash \neg\psi))$. Nekonzistentnosť teórie $\Phi$ vyjadríme symbolom $\Phi \vdash \bot$, čo verbálne vyjadríme tak, že teória $\Phi$ je nekonzistetná práve vtedy, ak z nej vyplýva formula – kontradikcia, napr. $\bot \equiv p \wedge \neg p$. Negáciou tejto definície dostaneme, že teória je konzistetná práve vtedy, ak z nej nevyplýva kontradikcia, $\Phi \nvdash \bot$.

Tarského ***operátor konsekvencie*** je definovaný pomocou relácie logického dôsledku

$$Cn(\Phi) =_{def} \{\varphi; \Phi \vdash \varphi\} \tag{15.1a}$$

t. j. minimálna množina $Cn(\Phi)$ obsahuje formuly, ktoré sú logickým dôsledkom teórie $\Phi$. Vyhovuje týmto trom podmienkam

(1) inklúzia: $\Phi \subseteq Cn(\Phi)$ (15.1b)

(2) monotónnosť: $(\Phi \subseteq \Phi') \Rightarrow (Cn(\Phi) \subseteq Cn(\Phi'))$ (15.1c)

(3) idempotentnosť: $Cn(\Phi) = Cn(Cn(\Phi))$ (15.1d)

(4) Ak formula $\varphi$ je logicky odvodená z teórie $\Phi$, $\Phi \vdash \varphi$, potom $\varphi \in Cn(\Phi)$.

(5) deduktívnosť, $\psi \in Cn(\Phi \cup \{\varphi\}) \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \in Cn(\Phi)$

(6) kompaktnosť, $\varphi \in Cn(\Phi) \Rightarrow \varphi \in Cn(\tilde{\Phi})$, kde $\tilde{\Phi} \subseteq \Phi$ je ***konečná*** podmnožina teórie $\Phi$.

Prvé pravidlo (4) vyplýva z ekvivalentnosti medzi syntaktickým a sémantickým prístupom k problému odvoditeľnosti formuly z teórie.. Druhé pravidlo priamo plynie z vety 1.X o dedukcii, t. j. $\left(\left(\Phi\cup\{\varphi\}\right)\vdash\psi\right)\equiv\left(\Phi\vdash(\varphi\Rightarrow\psi)\right)$. Posledné tretie pravidlo je dôsledkom princípu kompaktnosti, ktoré je platné vo výrokovej logike.

**Veta 15.1.** Vybrané vlastnosti operátora konsekvencie

(1) $$Cn(\Phi\cup\Psi)=Cn(\Phi\cup Cn(\Psi)) \qquad (15.2a)$$

(2) $$\Phi\subseteq\Psi\subseteq Cn(\Phi)\Rightarrow Cn(\Phi)\subseteq Cn(\Psi) \qquad (15.2b)$$

(3) $$\psi\in Cn\left(\Phi\cup\{\alpha_1\}\right)\wedge\varphi\in Cn\left(\Phi\cup\{\alpha_2\}\right)\Rightarrow\varphi\in Cn\left(\Phi\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}\right) \qquad (15.2c)$$

(4) $$Cn(\{\varphi\vee\psi\})=Cn(\{\varphi\})\cap Cn(\{\psi\}) \qquad (15.2d)$$

(5) $$Cn\left(\Phi\cup\{\varphi,\psi\}\right)=Cn\left(\Phi\cup\{\varphi\wedge\psi\}\right) \qquad (15.2e)$$

Dôkaz týchto vlastností je analogický dôkazu rôznych dôsledkov vety o dedukcii v v kapitole 2.

Pre danú teóriu Φ zostrojíme ***databázu poznatkov*** (ang. ***belief set***) pomocou operátora konsekvencie

$$K=Cn(\Phi) \qquad (15.3)$$

Z definície (15.1) operátora konsekvencie vyplýva, že relácia vyplývania $\Phi\vdash\varphi$ je ekvivalentná podmienke $\varphi\in K$,

$$(\Phi\vdash\varphi)\equiv(\varphi\in K) \qquad (15.4)$$

V zmysle vyššie uvedených definícií, databáza poznatkov $K$ je nekonzistentná (čo budeme zapisovať $K_\perp$) práve vtedy, ak obsahuje každú formulu z jazyka $L_\mathcal{A}$, t. j. $K_\perp=L_\mathcal{A}$.

**Príklad 15.2**. Nech množina formúl $\Phi=\{p,q\}$ obsahuje dva poznatky výroky $p$ a $q$. Potom množina $Cn(\Phi)$ má tvar

$$Cn(\Phi)=\{p,q,p\vee\varphi,\psi\vee q,\varphi\Rightarrow p,\psi\Rightarrow q,p\wedge q,...\}$$

kde φ a ψ sú ľubovoľné formuly. Poznamenajme, že táto množina formúl je nekonečná a spočítateľná; ďalšie a ďalšie formuly, ktoré sú dôsledkom použitej teórie $\Phi=\{p,q\}$ môžeme vytvárať napr. použitím idempotentnosti operátorov konjunkcie a disjunkcie.

Podobné úvahy, ktoré boli vykonané vyššie na syntaktickej úrovni v texte, ktorý nasledoval za príkladom 15.1, budú teraz vykonaná aj na sémantickej úrovni. Teória $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}\subseteq L_A$ sa nazýva konzistentná práve vtedy, ak má neprázdny model, $[\![\Phi]\!]\neq\emptyset$. V opačnom prípade, ak je model prázdny, $[\![\Phi]\!]=\emptyset$, sa nazýva nekonzistentná. Hovoríme, že formula φ ***tautologicky vyplýva*** z teórie Φ práve vtedy, ak je táto formula φ pravdivá pre každú interpretáciu $\tau\in[\![\Phi]\!]$, t. j. $[\![\Phi]\!]\subseteq[\![\varphi]\!]$, vlastnosť tautologického vyplývania formálne zapisujeme $\Phi\models\varphi$. V opačnom prípade, neplatnosť inklúzie $[\![\Phi]\!]\not\subseteq[\![\varphi]\!]$ je ekvivalentná vlastnosti $\Phi\not\models\varphi$, t. j. formula φ sémantický nevyplýva z teórie Φ. Nech Φ a Ψ sú dve teórie, potom model ich zjednotenia $\Phi\cup\Psi$ je prienikom ich modelov (pozri formulu (1.24))

$$[\![\Phi\cup\Psi]\!]=[\![\Phi]\!]\cap[\![\Psi]\!] \qquad (15.5a)$$

Nech Φ a Ψ sú dve teórie, ktoré vyhovujú podmienke $\Phi\subseteq\Psi$, potom vlastnosť monotónnosti implikuje pre ich modely má tvar

$$(\Phi\subseteq\Psi)\Rightarrow([\![\Phi]\!]\subseteq[\![\Psi]\!]) \qquad (15.5b)$$

Pretože medzi reláciami logického a tautologického vyplývania existuje ekvivalencia (pozri ( )) je irelevantné, či používame syntaktický alebo sémantický prístup k špecifikácii konzistentnosti teórie alebo vyplývania formuly z teórie, budeme používať oba prístupy v závistlosti od ich vhodnosti k riešeniu daného problému.

Budeme študovať tri typy zmeny teórie Φ:

(1) ***Expanzia***, nové poznatky, reprezentované formulami z množiny Ψ sú dodané do konzistentnej teórie Φ, za vzniku novej teórie $\Phi' = \Phi \cup \Psi$, čo indukuje rozšírenie jej logických dôsledkov o nové poznatky, ktoré sú logickým dôsledkom rozšírenej teórie Φ´. Databáza poznatkov priradená rozšírenej teórii Φ´ je označená

$$K_{\Psi}^{(+)} =_{def} Cn\left(\Phi \cup \Psi\right) \tag{15.6}$$

(2) ***Kontrakcia***, podmnožina $\Delta \subseteq \Phi$ je odstránená z nekonzistentnej teórie Φ za vzniku maximálnej konzistentnej podmnožiny – teórie $\Phi' = \Phi - \Delta$. Databáza poznatkov priradená zúženej teórii Φ´ je označená

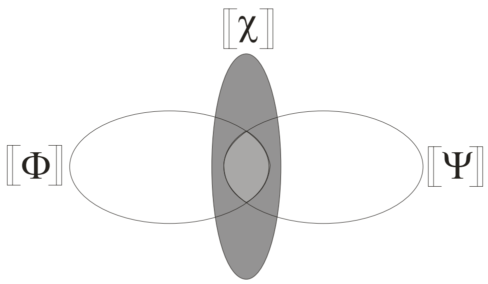
$$K_{\Delta}^{(-)} =_{def} Cn\left(\Phi - \Delta\right) \tag{15.7}$$

(3) ***Revízia*** je kombináciou predchádzajúcich dvoch operácii expanzie a kontrakcie, pôvodne konzistentná teória Φ je expanziou rozšírená o nové poznatky z Ψ, čím sa stane nekonzistentnou, z takto rozšírenej teórie je pomocou kontrakcie je odstránená podmnožina $\Delta \subseteq \Phi$, výsledkom tohto procesu je konzistentná teória $\Phi' = \left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta$. Pôvodná databáza $K = Cn\left(\Phi\right)$ priradená modifikovanej rozšíreno – zúženej teórii Φ´ je označená

$$K_{\Psi,\Delta}^{(+,-)} =_{def} Cn\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \tag{15.8}$$

## 15.2 Expanzia teórie

Operácia expanzie konzistentnej teórie o nové poznatky, pričom konzistentnosť novej rozšírenej teórie sa zachováva, patrí medzi najjednoduchšie operácia zmeny databáz poznatkov. Môžeme povedať, že touto operáciou ja daná databáza neustále rozširovaná o nové a nové poznatky, pričom nemusíme použiť operáciu kontrakcie alebo revízie, pretože nové poznatky sú konzistentné s poznatkami z predchádzajúcich etáp rozširovania databázy poznatkov.




**Obrázok 15.1**. Diagramatické znázornenie množinovej relácie $[\![\Phi]\!] \cap [\![\Psi]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$, ktorá tvorí podmienku pre existenciu tautologického vyplývania $\left(\Phi \cup \Psi\right) \models \chi$.

Nech $\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\right\}$ je konzistentná teória obsahujúca $n$ formúl – poznatkov $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, $[\![\Phi]\!] \neq \varnothing$. Našou úlohou je rozšíriť túto teóriu o množinu nových poznatkov

$\Psi = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$ tak, aby vlastnosť konzistencie zachovala, $\Phi' = \Phi \cup \Psi$, kde $[\![\Phi']\!] = [\![\Phi \cup \Psi]\!] = [\![\Phi]\!] \cap [\![\Psi]\!] \neq \emptyset$. Cieľom tejto expanzie pôvodnej teórie je, aby z rozšírenej teórie vyplývala formula χ, t. j. musí platiť $[\![\Phi]\!] \cap [\![\Psi]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$, pozri obr. 15.1

**Príklad 15.2**. Nech teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ obsahuje tieto poznatky

$$\varphi_1 = \text{'ak } \underbrace{\text{prší}}_{p}\text{, potom } \underbrace{\text{cesta je mokrá}}_{q}\text{'} = (p \Rightarrow q)$$

$$\varphi_2 = \text{'ak } \underbrace{\text{cesta je mokrá}}_{q}\text{, potom } \underbrace{\text{jazdím opatrne}}_{r}\text{'} = (q \Rightarrow r)$$

Z tejto teórie Φ vyplýva pomocou hypotetického sylogizmu nový poznatok

$$\chi = p \Rightarrow r = \text{'ak } \underbrace{\text{prší}}_{p}\text{, potom } \underbrace{\text{jazdím opatrne}}_{r}\text{'}$$

Pôvodnú teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ pomocou expanzie rozšírime o poznatok $\Psi = \{p\}$ (t. j. ´prší´), dostaneme novú rozšírenú teóriu $\Phi' = \Phi \cup \{p\} = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$. Z takto rozšírenej teórie vyplýva nový poznatok

$$\tilde{\chi} = q \wedge r = \text{'cesta je mokra a jazdím opatrne'}$$

Z rozšírenej teórie Φ´ vyplýva taktiež pôvodný poznatok χ, ktorý teraz označíme $\tilde{\chi}'$

$$\tilde{\chi}' = p \Rightarrow r = \text{'ak } \underbrace{\text{prší}}_{p}\text{, potom } \underbrace{\text{jazdím opatrne}}_{r}\text{'}$$

Poznamenajme, že tento záver vyplýva z pôvodnej teórie Φ, čiže musí vyplývať aj z rozšírenej teórie Φ´, t. j. platí implikácia

$$(\Phi \subseteq \Phi') \Rightarrow ((\Phi \vDash \chi) \Rightarrow (\Phi' \vDash \chi)) \tag{15.9}$$

**Tabuľka 15.1.** Tabuľka pravdivostných hodnôt pre formuly z príkladu 15.2.

| # | $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow r$ | $q \wedge r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Pomocou tabuľky 15.1 môžeme zostrojiť tieto modely:

$$[\![\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}]\!] = \{\tau_1 = (000), \tau_2 = (001), \tau_4 = (011), \tau_8 = (111)\}$$

$$[\![\Phi']\!] = [\![\Phi]\!] \cap [\![p]\!] = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} = \{\tau_8 = (111)\}$$

$$[\![\chi = p \Rightarrow r]\!] = \{\tau_1 = (000), \tau_2 = (001), \tau_3 = (010), \tau_4 = (011), \tau_6 = (101), \tau_8 = (111)\}$$

$$[\![\tilde{\chi} = q \wedge r]\!] = \{\tau_4 = (011), \tau_8 = (111)\}$$

Ľahko skontrolujeme podmienku pre existenciu vyplývania z danej teórie

$$[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\chi = p \Rightarrow r]\!]$$

$$[\![\Phi']\!] = [\![\Phi]\!] \cap [\![p]\!] \subseteq [\![\tilde{\chi} = q \wedge r]\!]$$

Kde prvá podmienka – inklúzia implikuje existenciu vyplývania $\Phi \vDash (p \Rightarrow r)$, zatiaľ čo druhá podmienka – inklúzia implikuje existenciu vyplývania $\Phi' \vDash q \wedge r$, pozri obrázok 15.2.

Na záver ukážeme prirodzenú dedukciu, ktorá nám potvrdí existenciu záveru $\tilde{\chi} = q \wedge r$ z rozšírenej teórie Φ′:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p$ | 1. predpoklad |
| 2 | $p \Rightarrow q$ | 2. predpoklad |
| 3 | $q \Rightarrow r$ | 3. predpoklad |
| 4 | $q$ | aplikácia modus ponens na 1. a 2. predpoklad |
| 5 | $r$ | aplikácia modus ponens na 3. predpoklad a 4. dôsledok |
| 6 | $q \wedge r$ | spojenie 4. a 5. dôsledku pomocou konjunkcie |

To znamená, že sme dokázali pomocou syntaktickej prirodzenej dedukcie, že z rozšírenej teórie Φ′ logický vyplýva záver $\tilde{\chi} = q \wedge r$, čo môžeme zapísať ako $\Phi' \vdash q \wedge r$, ktorý môžeme na základe ekvivalentnosti medzi logickým a tautologický vyplývaním prepísať do tvaru $\Phi' \vDash q \wedge r$, čo bolo potrebné dokázať.

Problém expanzie teórie $\Phi$ o formuly z množiny $\Psi$ môžeme formálne chápať ako problém riešenie množinovej rovnice

$$[\![\Phi]\!] \cap [\![\Psi]\!] \subseteq [\![\chi]\!] \qquad (15.10)$$

kde $[\![\Phi]\!]$ a $[\![\chi]\!]$ sú dané modely, model $[\![\Psi]\!]$ musíme zostrojiť tak, aby platila množinová rovnica (15.10) a súčasne, aby riešenie $[\![\Psi]\!]$ vyhovovalo podmienke $[\![\Phi]\!] \cap [\![\Psi]\!] \neq \emptyset$, t. j. model rozšírenej teórie $\Phi' = \Phi \cup \Psi$ je neprázdny. Poznamenajme, že riešenie rovnice (15.10) nám ***umožňuje jednoduchú algoritmizáciu*** problému expanzie konzistentnej teórie tak, aby z tejto expanzie vyplývala formula χ.

**Príklad 15.3.** Budeme riešiť úlohu 15.2 pomocou prístupu založenom na riešení množinovej rovnice (15.10). Nech teória Φ má tvar $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ a požadovaná formula $\tilde{\chi} = q \wedge r$, pričom hľadáme také rozšírenie danej teórie $\Phi \to \Phi' = \Phi \cup \Psi$, aby platilo $\Phi' \vDash \tilde{\chi}$. V príklade 15.2 modely $\Phi$ a $\tilde{\chi}$ mali tvar

$$[\![\Phi]\!] = \{(000),(001),(011),(111)\}$$

$$[\![\tilde{\chi}]\!] = \{(011),(111)\} = \{(\#11)\}$$

kde bol použitý „*wilde card*“ symbol #, ktorý sa môže nahradiť tak symbolom 0 ako aj symbolom 1. Ľahko sa presvedčíme, že ak model Ψ má tvar

$$[\![\Psi]\!] = \{(1\#\#)\}$$

potom platí podmienka (15.10)

$$\underbrace{\{(000),(001),(011),(111)\}}_{[\![\Phi]\!]} \cap \underbrace{\{(1\#\#)\}}_{[\![\Psi]\!]} \subseteq \underbrace{\{(\#11)\}}_{[\![\tilde{\chi}]\!]}$$

To znamená, že pôvodná teória je rozšírená o $\Psi = \{(1\#\#)\} = \{p\}$. Potom sa ľahko presvedčíme, že platí

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \cup \{p\} \vDash q \wedge r$$

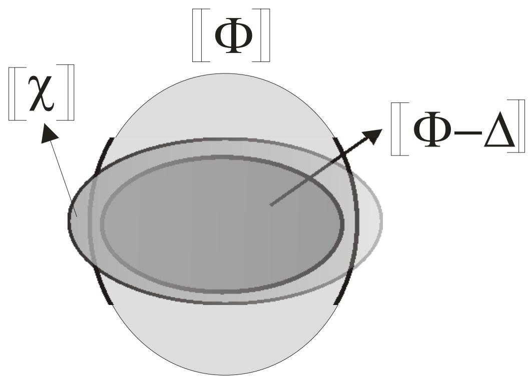
čo bolo potrebné dokázať.

## 15.3 Kontrakcia teórie

Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je nekonzistentná teória, hľadáme takú jej minimálnu podmnožinu $\Delta \subseteq \Phi$, ktorú keď odstránime z pôvodnej teórie Φ, získame novú konzistentnú teóriu $\Phi' = \Phi - \Delta$ z ktorej vyplýva poznatok χ, $\Phi' \vDash \chi$. Táto vlastnosť je splnená práve vtedy, ak platí

$$[\![\Phi - \Delta]\!] \subseteq [\![\chi]\!] \tag{15.11}$$

kde $\Phi' = \Phi - \Delta$ je nová maximálna konzistentná teória, ktorá vznikla z pôvodnej teórie odobratím poznatkov z $\Delta$, $[\![\Phi - \Delta]\!] \neq \emptyset$. Riešením množinovej rovnice (15.11) získame takú maximálnu konzistentnú teóriu $\Phi' = \Phi - \Delta$ z ktorej vyplýva daný poznatok $\chi$, pozri obr. 15.2.




**Obrázok 15.2**. Kontrakcia pôvodnej teórie Φ vzhľadom k podmnožine $\Delta \subseteq \Phi$, vznikne nová teória $\Phi' = \Phi - \Delta$, podmienka pre tautologické vyplývanie $(\Phi - \Delta) \vDash \chi$ má tvar (15.11).

**Príklad 15.4.** Študujme teóriu tvaru $\Phi = \{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$, ktorá je nekonzistentná, $[\![\Phi]\!] = \emptyset$. Jednoduchými úvahami dokážeme, že z tejto teórie vyplýva kontradikcia, $\Phi \vDash p \wedge \neg p$. Vytvoríme tieto tri podmnožiny teórie Φ

$$\Phi_1' = \Phi - \Psi_1 = \{\neg q, p \Rightarrow q\},\ \Phi_2' = \Phi - \Psi_1 = \{p, \neg q\},\ \Phi_3' = \Phi - \Psi_3 = \{p, p \Rightarrow q\}$$

kde príslušné podmnožiny $\Delta_i$ majú tvar

$$\Delta_1 = \{p\},\ \Delta_2 = \{p \Rightarrow q\},\ \Delta_3 = \{\neg q\}$$

a pre nové teórie platí

$$\Phi_1' \vDash \neg p,\ \Phi_2' \vDash p \wedge \neg q,\ \Phi_3' \vDash q$$

Sémantický prístup k riešeniu tohto problému je založený na pravdivostnej tabuľke 15.2, z ktorej okamžite dostávame, že teória Φ je nekonzistentná, t. j. $[\![\Phi]\!] = \emptyset$. Pre všetky možné pravdivostné hodnoty, nikdy nestáva situácia, aby každá formula z teórie bola súčasne pravdivá. Vytvorené „podteórie“ $\Phi_i$ majú tieto modely:

$$[\![\Phi_1']\!] = \{(00)\},\ [\![\Phi_2']\!] = \{(10)\},\ [\![\Phi_3']\!] = \{(11)\}$$

Pristúpime k „riešeniu“ rovnice inklúzie $[\![\Phi_i']\!] \subseteq [\![\chi_i]\!]$, dostaneme

$$[\![\Phi_1']\!] = \{(00)\} \subseteq \{(0\#)\},\ [\![\Phi_2']\!] = \{(10)\} \subseteq \{(10)\},\ [\![\Phi_3']\!] = \{(11)\} \subseteq \{(\#1)\}$$

Potom môžeme písať tieto tri tautologické vyplávania z redukovaných teórií

$$\Phi_1' \vDash \neg p,\ \Phi_2' \vDash p \wedge \neg q,\ \Phi_3' \vDash q$$

Pomocou prirodzenej dedukcie znázorníme prvý výsledok:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p$ | 1. predpoklad z Φ |
| 2. | $\neg q$ | 2. predpoklad z Φ |
| 3. | $p \Rightarrow q$ | 3. predpoklad z Φ |
| 4. | $\cancel{p}$ | kontrakcia Φ o 1. predpoklad |
| 5. | $\neg p$ | aplikácia modus tollens na 2. a 3 |

Z tohto jednoduchého ilustračného príkladu vyplýva, že proces kontrakcie nie je jednoznačný, dá sa vykonať mnohými spôsobmi, ktoré sú ťažko od seba odlíšiteľné svojou výhodnosťou alebo nevýhodnosťou. Túto skutočnosť možno pokladať za hlavný tak teoretický, ako aj praktický problém teórie kontrakcie. K odstráneniu tejto nejednoznačnosti sa obvykle používajú mimologické prostriedky, ktoré umožňujú vybrať špecifické predpoklady pôvodnej teórie Φ pre kontrakciu na konzistentnú „podteóriu“ Φ′. V záverečnej časti tejto kapitoly sa k riešeniu tohto problému vrátime pomocou „mimoilogického“ prístupu nazývaného „***epistemická významnosť***“[1] [xx].

Tabuľka 15.2. Pravdivostné hodnoty formúl z príkladu 15.4

| # | $p$ | $q$ | $p$ | $\neg q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

## 15.4 Revízia teórie

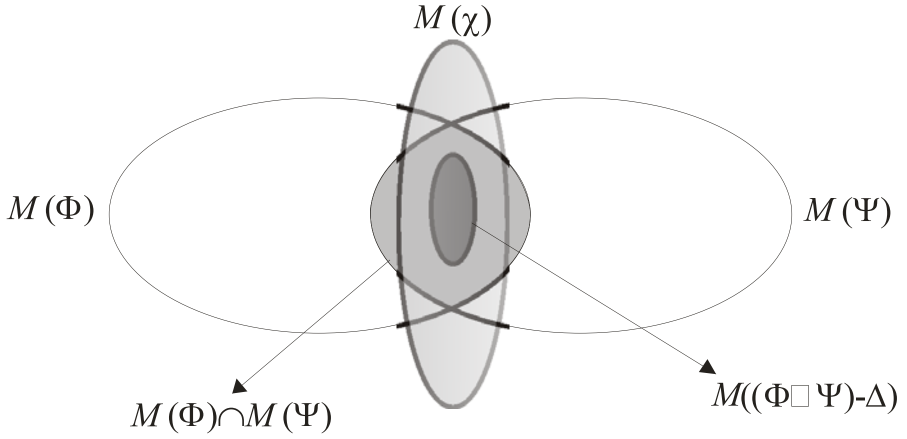
Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je konzistentná teória, ktorá je rozšírená o nové poznatky z množiny Ψ, pričom nová teória $\Phi' = \Phi \cup \Psi$ stáva sa nekonzistentnou. Problém revízie potom spočíva v tom, že hľadáme takú množinu formúl $\Delta \subseteq \Phi$, ktorú keď odpočítame od $\Phi'$, dostaneme konzistentnú teóriu $\Phi'' = (\Phi \cup \Psi) - \Delta$, ktorá nie je podmnožinou pôvodnej teórie $\Phi'' \not\subseteq \Phi$. To znamená, že pri kontrakcii sa snažíme uchovať nové poznatky z Ψ a odstraňovať len poznatky z pôvodnej teórie Φ, pozri obrázok 15.3. Z týchto úvodných poznámok opäť vyplýva, že proces revízie nie je jednoznačný a preto musíme použiť „mimologické“ prostriedky na aspoň čiastočné odstránenie tejto nejednoznačnosti.

Podmienka pre existenciu formuly χ, ktorá tautologicky vyplýva z modifikovanej teórie $((\Phi \cup \Psi) - \Delta) \models \chi$ má tvar množinovej relácie

$$[\![(\Phi \cup \Psi) - \Delta]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$$

[1] V literatúre sa používa ťažko preložiteľný angl. termín „*epistemic entrenchment*“, čo v prenesenom slova môže byť preložené ako „*epistemická pevnosť – nedobytnosť*“. Z týchto dôvodov používame nový termín „*epistemická významnosť*“, ktorý pomerne presne vystihuje zmysel a význam pôvodného anglického termínu. Poznamenajme, že prístup „epistemickej významnosti“ môžeme chápať ako prejav našej racionálnosti k všeobecnému problému revízie poznatkov mimologickými prostriedkami.

Pretože $((\Phi \cup \Psi) - \Delta) \subseteq (\Phi \cup \Psi)$, z monotónnosti modelu (vyjadrenej implikáciou $(A \subseteq B) \Rightarrow [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$) vyplýva inklúzia $[\![(\Phi \cup \Psi) - \Delta]\!] \subseteq [\![\Phi \cup \Psi]\!]$, tieto podmienky sú znázornené na obrázku 15.3.




**Obrázok 15.3.** Diagramatické znázornenie podmienky tautologického vyplývania $((\Phi \cup \Psi) - \Delta) \models \chi$ vyjadrenou pomocou relácie $[\![(\Phi \cup \Psi) - \Delta]\!] \subseteq [\![\chi]\!]$ .

**Príklad 15.5.** Nech teória Φ má tvar

$$\Phi = \{p, q, q \Rightarrow p \wedge r, r \Rightarrow s\}$$

Táto teória je konzistentná, ľahko môžeme pomocou prirodzenej dedukcie odvodiť rôzne logické vyplývania, napr.

$$\Phi \models (p \Rightarrow r \wedge s),\ \ \Phi \models (p \wedge q \wedge r \wedge s)$$

Táto teória Φ je rozšírená o nové poznatky z $\Psi = \{q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$, dostaneme novú rozšírenú teóriu

$$\Phi' = \{p, q, q \Rightarrow p \wedge r, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$$

ktorá je evidentne nekonzistentná, o čom sa môžeme ľahko presvedčiť pomocou prirodzenej dedukcie

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p$ | 1. predpoklad z Φ′ |
| 2. | $q$ | 2. predpoklad z Φ′ |
| 3. | $q \Rightarrow p \wedge r$ | 3. predpoklad z Φ′ |
| 4. | $r \Rightarrow s$ | 4. predpoklad z Φ′ |
| 5. | $q \Rightarrow \neg p \wedge r$ | 5. predpoklad z Φ′ |
| 6. | $\neg s$ | 6. predpoklad z Φ′ |
| 7. | $\neg p \wedge r$ | modus ponens na 2. a 5. |
| 8. | $\neg p$ | eliminácia konjunkcie na 7. |
| 9. | $p \wedge \neg p$ | introdukcia konjunkcie na 1. a 8. |

Týmto sme dokázali, že $\Phi' \vdash p \wedge \neg p$ , t. j. rozšírená teória ne nekonzistentná.

Pravdivostná tabuľka formúl z rozšírenej teórie Φ′ je znázornená tabuľkou 15.3. V tejto tabuľke sú „vysvietené" tri riadky, ktoré obsahujú nové formuly z množiny Ψ. Poznamenajme, že len tieto tri riadky sa podieľajú na tvorbe alternatívnych „revidovaných" teórií $\Phi_i''$, pretože už v úvode tejto podkapitoly sme postulovali, že nové poznatky z množiny Ψ sa pri revízii ponechávajú, odstraňujú sa len poznatky z pôvodnej teórie Φ. Tri nové

„revidované“ teórie sú znázornené tabuľkou 15.4. Poznamenajme, že v tejto tabuľke sú uvedené všetky možne „revidované množiny“ $\Phi''$ (aj tie, ktoré vznikli odstránením nových poznatkov z množiny $\Psi$). Revidované teórie, ktoré obsahujú nové poznatky sú v tabuľke 15.4 vysvietené.

**Tabuľka 15.3.** Tabuľka pravdivostných hodnôt formúl z rozšírenej teórie $\Phi'$ z príkladu 15.5.

| # | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q \wedge r$ | $r \Rightarrow s$ | $q \Rightarrow \neg p \wedge r$ | $\neg s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Tabuľka 15.4.** Formuly vyplývajúce z teórie $\Phi''$

| Teória $\Phi''$ | model teórie $\Phi''$ | formula $\chi$ vyplývajúca z $\Phi''$ |
|---|---|---|
| $\Phi''_1 = \{p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$ | $[\![\Phi''_1]\!] = \{(0000)\}$ | $\chi_1 = (000\#) = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$ |
| $\Phi''_2 = \{q, p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s, \neg s\}$ | $[\![\Phi''_2]\!] = \{(0100)\}$ | $\chi_2 = (0\#0\#) = \neg p \wedge \neg q$ |
| $\Phi''_3 = \{q, p \Rightarrow q \wedge r, q \Rightarrow \neg p \wedge s, \neg s\}$ | $[\![\Phi''_3]\!] = \{(0110)\}$ | $\chi_3 = (0\#1\#) = \neg p \wedge r$ |
| $\Phi''_4 = \{q, p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r\}$ | $[\![\Phi''_4]\!] = \{(0111)\}$ | $\chi_4 = (0\#11) = \neg p \wedge r \wedge s$ |
| $\Phi''_5 = \{p, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$ | $[\![\Phi''_5]\!] = \{(1000)\}$ | $\chi_5 = (\#00\#) = \neg p \wedge \neg r$ |
| $\Phi''_6 = \{p, q, r \Rightarrow s, \neg s\}$ | $[\![\Phi''_6]\!] = \{(1100)\}$ | $\chi_6 = (\#\#0\#) = \neg r$ |
| $\Phi''_7 = \{p, q, p \Rightarrow q \wedge r, \neg s\}$ | $[\![\Phi''_7]\!] = \{(1110)\}$ | $\chi_7 = (\#\#1\#) = r$ |
| $\Phi''_8 = \{p, q, p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s\}$ | $[\![\Phi''_8]\!] = \{(1111)\}$ | $\chi_8 = (\#\#11) = r \wedge s$ |

Poznamenajme, že pri konštrukcii formúl $\chi$, ktoré tautologicky vyplývajú z revidovanej teórie $\Phi''$, použili sme heuristiku symbolov # (pozri kapitolu 3.2.1) .

## 15.5 Epistemická významnosť poznatkov

Pri revízii a kontrakcii musíme z množiny poznatkov $K$ odstrániť také pôvodné poznatky, aby výsledná množina $\Phi'$ bola konzistetná a mala ďalšie požadované vlastnosti. Pretože v rámci výrokovej logiky nepoznáme kritéria významnosti jednotlivých výrokov z danej teórie $\Phi$ (alebo databázy poznatkov $K = Cn(\Phi)$), Gärdenfors [xx] fenomelogický zaviedol ako mimologický prostriedok koncepciu epistemickej významnosti výrokov pomocou relácie ´≤´

$$\varphi \leq \psi =_{def} \text{´\textbf{\textit{epistemická významnosť}} } \varphi \text{ nie je väčšia ako epistemická významnosť } \psi\text{´} \qquad (15.12a)$$

ktorú môžeme chápať ako binárnu reláciu nad jazykom výrokovej logiky $L_A$, kde výraz $\varphi \leq \psi$ je definovaný pre ľubovoľnú dvojicu formúl $\varphi, \psi \in L_A$. Pomocou tejto relácie „usporiadania“ môžeme definovať ďalšie dve odvodené relácie

$$(\varphi = \psi) =_{def} (\varphi \leq \psi) \wedge (\psi \leq \varphi) \qquad (15.12b)$$

$$(\varphi < \psi) =_{def} (\varphi \leq \psi) \wedge \neg(\varphi = \psi) \qquad (15.12c)$$

Takto špecifikovaná relácia ´≤´ má silne kvalitatívny charakter, preto Gärdenfors [xx] postuloval päť podmienok, ktoré musia byť splnené:

$$\text{Tranzitívnosť: } (\varphi \leq \psi) \wedge (\psi \leq \chi) \Rightarrow (\varphi \leq \chi), \qquad (15.13a)$$

$$\text{Konjunktívnosť: } (\varphi \leq (\varphi \wedge \psi)) \vee (\psi \leq (\varphi \wedge \psi)), \qquad (15.13b)$$

$$\text{Dominantnosť: } (\Phi \vdash \psi) \Rightarrow (\exists \varphi \in \Phi)(\varphi \leq \psi), \qquad (15.13c)$$

$$\text{Minimálnosť: } (\varphi \notin Cn(\Phi)) \equiv (\forall \psi \in Cn(\Phi))(\varphi \leq \psi), \qquad (15.13d)$$

$$\text{Maximálnosť: } (\forall \varphi)((\forall \psi)(\psi \leq \varphi) \Rightarrow (\models \varphi)) \qquad (15.13e)$$

kde $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Pomocou prvých troch postulátov môžeme dokázať, že relácia epistemickej významnosti vyhovuje podmienke konektívnosti, $(\forall \varphi, \psi)(\varphi \leq \psi \vee \psi \leq \varphi)$. Z tretej podmienky (15.13c) vyplýva, že ak z teórie $\Phi$ logicky vyplýva formula $\psi$, potom musí existovať formula $\varphi \in \Phi$, ktorá nemá väčšiu epistemickú významnosť ako formula $\psi$. Význam tejto podmienky spočíva v tom, že ak chceme z teórie odstrániť nejakú formulu tak, aby z nej tautologicky nevyplývala formula $\psi$, tak odstránenie formuly $\varphi \in \Phi$ je postačujúce na dosiahnutie tejto podmienky. Na záver týchto poznámok o relácii epistemickej významnosti poznamenajme, že význam tejto relácie spočíva v ***heuristike, že ak máme odstrániť jeden výrok z dvoch možných kandidátov φ a ψ, odstránime ten, ktorý má menšiu epistemickú významnosť***.

Relácia epistemickej významnosti môže byť v rámci množinového formalizmu dostupných svetov definovaná podľa Groveho [xx] takto:

$$(\varphi \leq \psi) =_{def} [\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!] \qquad (15.14)$$

Pre takto špecifikovanú relácie epistemickej významnosti môžeme dokázať podmienky (15.13).

**Dôkaz (15.13a).** Táto vlastnosť je priamym dôsledkom tranzitívnosti množinovej operácie inklúzie, $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$.

**Dôkaz (15.13b).** Nech $\varphi, \psi \in L_A$ dvojica takých výrokových formúl pre ktoré je platná binárna relácia epistemickej významnosti, t. j. medzi nimi platí vzťah $(\varphi \leq \psi) \vee (\psi \leq \varphi)$, čo môžeme pomocou definície (15.14) prepísať do množinovej relácie

$\left([\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]\right) \vee \left([\![\psi]\!] \subseteq [\![\varphi]\!]\right)$. Tieto dve alternatívne inklúzie platia vtedy ak $\left([\![\varphi]\!] = [\![\varphi \wedge \psi]\!]\right) \vee \left([\![\psi]\!] = [\![\varphi \wedge \psi]\!]\right)$, čo môžeme prepísať do množinovej formuly

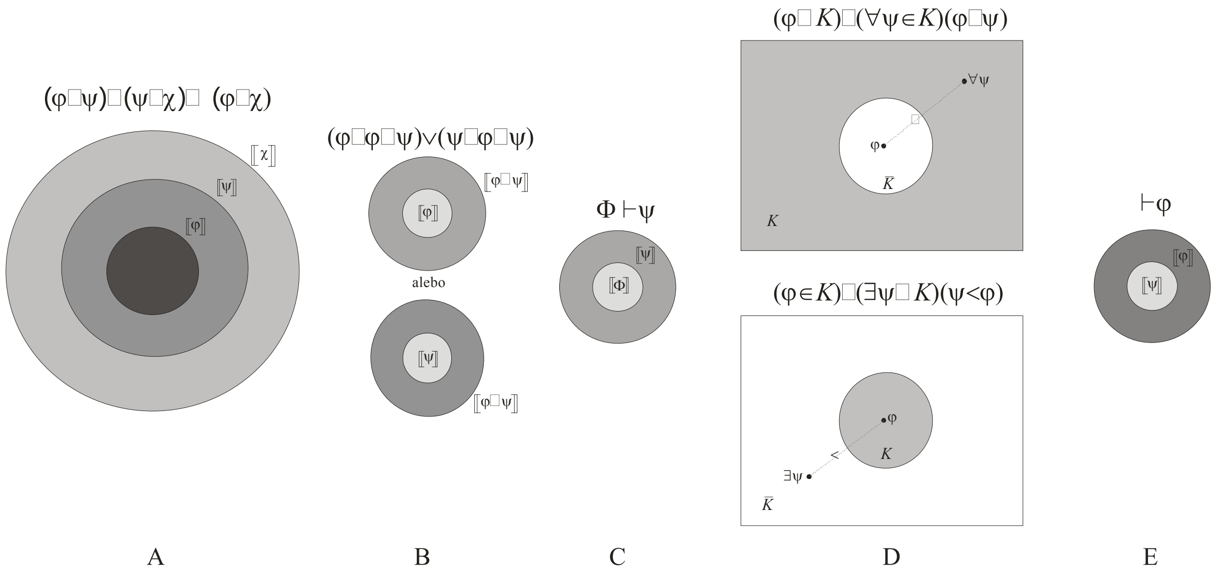
$$\left(\left([\![\varphi]\!] \subseteq [\![\varphi \wedge \psi]\!]\right) \wedge \left([\![\varphi \wedge \psi]\!] \subseteq [\![\varphi]\!]\right)\right) \vee \left(\left([\![\psi]\!] \subseteq [\![\varphi \wedge \psi]\!]\right) \wedge \left([\![\varphi \wedge \psi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]\right)\right) \qquad (\clubsuit)$$

Poznamenajme, že druhá a štvrtá inklúzia platia automaticky pre každú dvojicu formúl $\varphi, \psi$ (platia množinové zákony – tautológie $A \cap B \subseteq A$ a $A \cap B \subseteq B$. K tomu, aby bola pravdivá formula (♣), musí platiť jej prvá a tretia inklúzia

$$\left([\![\varphi]\!] \subseteq [\![\varphi \wedge \psi]\!]\right) \vee \left([\![\psi]\!] \subseteq [\![\varphi \wedge \psi]\!]\right),$$

Túto formulu môžeme prepísať do tvaru $\left(\varphi \le (\varphi \wedge \psi)\right) \vee \left(\psi \le (\varphi \wedge \psi)\right)$, čo bolo potrebné dokázať.

**Dôkaz (15.13c).** Z predpokladu, že $\psi$ je tautologickým dôsledkom teórie Φ, vyplýva, že musí platiť podmienka $[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$, alebo $[\![\varphi_1]\!] \cap ... \cap [\![\varphi_n]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$, alebo $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \le \varphi$. Z predchádzajúcej vlastnosti (15.13b), že existuje také $\varphi_i \in \Phi$, že platí $\varphi_i \le \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$, alebo $\varphi_i \le \varphi$, čo bolo potrebné dokázať.




**Obrázok 15.4.** Interpretácia jednotlivých postulátov (15.13) pomocou formalizmu dostupných svetov. (A) Postulát tranzitívnosti pre tri výrokové premenné φ, ψ, χ, ktoré spĺňanú podmienky φ≤ψ, ψ≤χ a φ≤χ. (B) Postulát konjunktívnosti, pre ľubovoľné φ, ψ platí φ≤(φ∧ψ) alebo ψ≤(φ∧ψ). (C) Postulát dominantnosti, ak φ⊢ψ, potom φ≤ψ. (D) Postulát minimálnosti, ak φ nepatrí do konzistentnej množiny *K*, potom pre každé ψ z tejto databázy *K* platí relácia φ≤ψ. (E) Postulát maximálnosti, ak pre dané φ a pre každé ψ platí ψ≤φ, potom φ je tautológia.

**Dôkaz (15.13d).** Korektný dôkaz tejto vlastnosti v rámci použitého množinového formalizmu neexistuje. Chceme ukázať, že ak $K = Cn(\Phi)$ je korektná databáza poznatkov, potom podmienka $\varphi \notin K$ je ekvivalentná s $(\forall \psi \in K)(\varphi \le \psi)$, t. j. $(\varphi \notin K) \equiv (\forall \psi \in K)(\varphi \le \psi)$. Pre jednoduchosť predpokladajme, že podmienka $\varphi \notin K$ implikuje, že formula φ je kontradikcia, $[\![\varphi]\!] = \varnothing$, potom pre každú formulu ψ platí $\varphi \le \psi$. V druhej časti dôkazu predpokladajme, že pre každú formulu $\psi$ platí $\varphi \leq \psi$, toto je možné jedine vtedy, aj formula $\varphi$ je kontradikcia, čiže $\varphi \notin K$ (predpokladáme, že $K$ je konzistentná databáza), čo bolo potrebné dokázať.

**Dôkaz (15.13e).** Predpokladajme, že pre danú formulu $\varphi$ platí $(\forall\psi)(\psi \leq \varphi)$, t. j. každá formula $\psi$ je nanajvýš tak epistemicky významná ako formula $\varphi$, to je možné len vtedy, ak táto formula je tautológia, $[\![\varphi]\!] = W$, čo bolo potrebné dokázať.

Grafické interpretácie jednotlivých postulátov (15.13) sú znázornené na obrázku 15.4. Pristúpime teraz k jednoduchej „racionálnej" interpretácii týchto jednotlivých postulátov:

(a) ***Podmienka tranzitívnosti***. Táto podmienka (15.13a) a jej grafické znázornenie na obr. 15.1, diagram A, odráža rozumný predpoklad tranzitívnosti relácie epistemickej významnosti. Grafická interpretácia tejto podmienky spočíva v troch kruhových oblastiach v množina $W$ dostupných svetov, ktoré sú vložené do seba, takže tranzitivita automaticky platí (pozri obr. 15.1, diagram A).

(b) ***Podmienka konjunktívnosti***. Z (15.13b) vyplýva, že epistemická významnosť konjunkcie $\varphi \wedge \psi$ nie je menšia, ako epistemická významnosť jej komponent $\varphi$ resp. $\psi$ (pozri obr. 15.4, diagram B). Táto vlastnosť konjunktívnosti môže byť indukciou zovšeobecnená do tvaru: Nech $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ je teória obsahujúca $n$ formúl $\varphi_i$, potom platí

$$(\exists\varphi \in \Phi)(\varphi \leq \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \tag{15.15}$$

(c) ***Podmienka dominantnosti.*** Ak platí (15.13c) , potom skutočnosť, že z teórie $\Phi$ logicky vyplýva $\psi$, $(\Phi \vdash \psi)$, implikuje, že epistemická významnosť niektorého predpokladu $\varphi$ z teórie $\Phi$ je menšia ako epistemická významnosť dôsledku $\psi$ (pozri obr. 15.4, diagram C).

(d) ***Podmienka minimálnosti.*** Podmienka minimálnosti nám hovorí, že ak formula $\varphi$ nepatrí do databázy poznatkov *K,* potom táto skutočnosť je ekvivalentná podmienke, že každá formula $\psi$ z tejto databázy nie je menšej epistemickej významnosti ako formula $\varphi$. Negovaná podmienka minimálnosti $\left((\varphi \in Cn(\Phi)) \equiv (\exists\psi \in Cn(\Phi))(\psi < \varphi)\right)$ hovorí, že vlastnosť, že formula $\varphi$ patrí do databázy $K$, je ekvivalentná podmienke, že existuje v tejto databáze existuje taká formula $\psi$, ktorá má menšiu epistemickú významnosť ako formula $\varphi$. (pozri obr. 15.4, diagram D).

(e) ***Podmienka maximálnosti.*** Z (15.13e) vyplýva heuristika, ak pre dané $\varphi$ platí, že jeho epistemická významnosť nie je menšia, ako epistemická významnosť ľubovoľného $\psi$, potom $\varphi$ je tautológia. To znamená, že tautológie majú významné postavenie (maxím) na povrchu epistemickej významnosti, každé $\psi$ má epistemickú významnosť menšiu alebo rovnú ako tautológia (pozri obr. 15.4, diagram E).

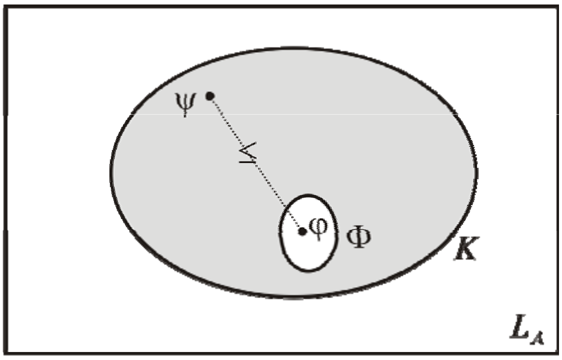
**Veta 15.1.**
Nech $K = Cn(\Phi) = \{\psi; \Phi \vdash \psi\}$ je databáza poznatkov priradená teórii $\Phi$, táto databáza môže byť pretransformovaná do tvaru

$$K = \{\psi; (\exists\varphi \in \Phi)(\varphi \leq \psi)\} \tag{15.16}$$

Dôkaz tejto vety je pomerne jednoduchý, nech $K=\{\psi;\Phi\vdash\varphi\}$, potom platí sled rovností

$$
\begin{aligned}
K&=\{\psi;\Phi\vdash\psi\}=\{\psi;[\![\Phi]\!]\subseteq[\![\psi]\!]\}=\{\psi;[\![\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n]\!]\subseteq[\![\psi]\!]\}\\
&=\{\psi;(\exists\varphi\in\Phi)([\![\varphi]\!]\subseteq[\![\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n]\!]\subseteq[\![\psi]\!])\}=\{\psi;(\exists\varphi\in\Phi)([\![\varphi]\!]\subseteq[\![\psi]\!])\}\\
&=\{\psi;(\exists\varphi\in\Phi)(\varphi\leq\psi)\}
\end{aligned}
$$

Čo bolo potrebné dokázať. Diagramatická interpretácia tejto vety je znázornená na obrázku 15.5.




**Obrázok 15.5.** Diagramatická interpretácia vety 15.1.

Na záver tejto podkapitoly obrátime našu pozornosť na formuláciu kontrakcie teórie Φ, ktorá je pôvodne nekonzistentná, odstránime z nej vybranú podmnožinu $\Delta\subseteq\Phi$ ta, aby rezultujúca teória $\Phi'=\Phi-\Delta$ bola konzistentná a vyplývala z nej formula χ, t. j. $(\Phi-\Delta)\vdash\chi$. Takto špecifikovaná databáza poznatkov je podľa (15.7) špecifikovaná takto

$$K_{\Delta}^{(-)}=_{def}Cn(\Phi-\Delta)=\{\psi;(\Phi-\Delta)\vdash\psi\} \tag{15.17}$$

Použitím vety 15.1 dostaneme

$$K_{\Delta}^{(-)}=\{\psi;(\exists\varphi\in(\Phi-\Delta))(\varphi\leq\psi)\} \tag{15.18}$$

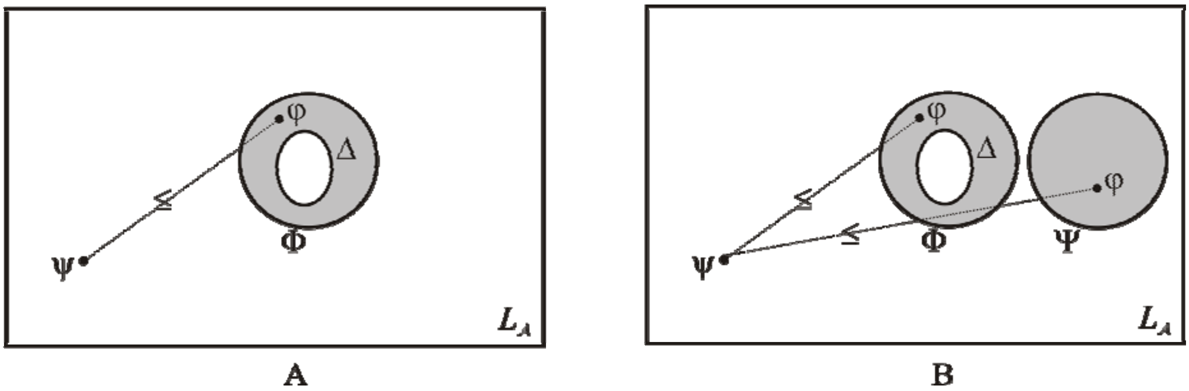
kde sme použili (15.16).

Úplne analogickým spôsobom môžeme študovať aj operáciu revízie, kde pôvodne konzistentná teória Φ bola rozšírená o nové poznatky teóriou Ψ, čím sa však stala nekonzistentnou, preto v nasledujúcom kroku musí z tejto teórie $\Phi'=\Phi\cup\Psi$ odstrániť niektoré poznatky z pôvodnej teórie Φ. Výsledkom tohto procesu je konzistentná teória $\Phi'=(\Phi\cup\Psi)-\Delta$, ktorá je priradená novej databáze poznatkov

$$K_{\Psi,\Delta}^{(+,-)}=_{def}Cn((\Phi\cup\Psi)-\Delta) \tag{15.19}$$

Pomocou (15.16) ju môžeme prepísať do tvaru

$$K_{\Psi,\Delta}^{(+,-)}=\{\psi;(\exists\varphi\in((\Phi\cup\Psi)-\Delta))(\varphi\leq\psi)\} \tag{15.20}$$




**Obrázok 15.6.** (A) Znázornenie operácie kontrakcie pomocou formuly (15.18), kde pre každú formula $\psi \in K_{\Delta}^{(-)}$ existuje také $\varphi \in \Phi - \Delta$, že $\varphi \le \psi$. (B) Znázornenie operácie revízie pomocou formuly (15.20), kde pre každé $\psi \in K_{\Psi,\Delta}^{(-,+)}$ existuje také $\varphi \in (\Phi \cup \Psi) - \Delta$, že $\varphi \le \psi$.