9. prednáška

Revízie poznatkov

Úvodné poznámky

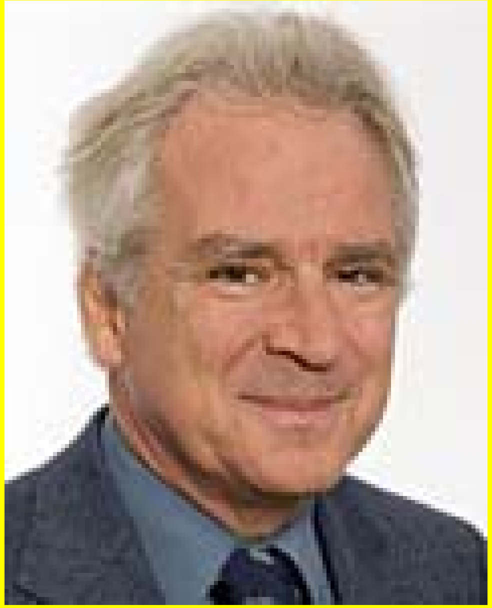
- Problém revízie poznatkov má vo filozofii a v logike dlhú tradíciu. Stal sa integrálnou súčasťou mnohých traktátov a monografií z filozofie poznania (epistemológie) a logiky od staroveku až po súčasnosť, ktoré obsahovali rozsiahle kapitoly, kde väčšinou na fenomenologicko-špekulatívnej úrovni sa formulovali zásady nášho myslenia, argumentácie a zmeny poznatkov vyplývajúcich zo zmien východiskových predpokladov, ich rozšírenia alebo čiastočnej falzifikácie.

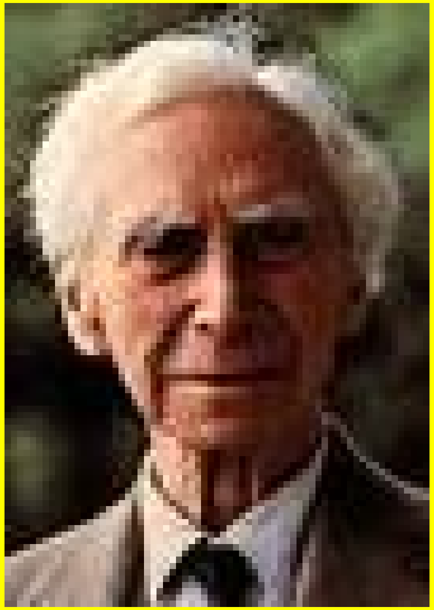
- Táto zaujímavá problematika sa stala súčasťou aplikovanej matematickej logiky až koncom minulého storočia, kedy jej formálny aparát bol použitý na formuláciu teórie revízie poznatkov.

- Problém revízie poznatkov sa stal v súčasnosti súčasťou informatiky a umelej inteligencie a tým musel prejsť z roviny všeobecno–špekulatívnej k rovine formálno–exaktnej, ktorá môže slúžiť ako základ algoritmizácie problematiky revízie poznatkov na počítačoch.

Ilustračný príklad

- Ak chceme špecifikovať základné epistemické princípy vývinu vedy, dynamiku jej vývoja v čase, tento cieľ môže byť realizovaný na abstraktnej úrovni tak, že študujeme danú konzistentnú databázu poznatkov.
- Táto databáza je v čase postupne modifikovaná elementárnymi operáciami, akými sú dodanie nového poznatku a odstránenie pôvodného poznatku.
- V obidvoch prípadoch tieto operácie zmeny môžu ovplyvňovať ostatné poznatky, preto sa vykonáva ich revízia, aby sa odstránili prípadné nekonzistentnosti.
- V počiatočnom období vzniku teórie revízie poznatkov (80. roky minulého storočia) základné idey boli formulované švédskym kognitívnym vedcom Petrom Gärdenforsom a dvojicou amerických logikov Carlosom Alchourrrónom a Davidom Makinsonom,


Peter Gärdenfors


Carlos Alchourron


David Makinson

Príklad

- Predpokladajme, že teória obsahuje tieto štyri poznatky:

  p_1 = *´všetky európske labute sú biele´*
  p_2 = *´vták zachytený do siete je labuť´*
  p_3 = *´vták zachytený v sieti pochádza zo Slovenska´*
  p_4 = *´Slovensko je časťou Európy´*

- Ak tieto štyri poznatky tvoria vstup do programu simulujúceho logické usudzovanie, potom ako výstup z tohto programu dostaneme nový poznatok

  p_5 = *´vták zachytený v sieti je biely´*

- Teraz predpokladajme, že naša databáza bola doplnená o ďalší poznatok

  p_6 = *´vták zachytený v sieti je čierny´*

- Tento nový „poznatok“ je v kontradikcii so záverom p_5 , t. j. platí $p_6 = \neg p_5$. Potom musíme vykonať ***revíziu*** databázy, aby sme odstránili túto nekonzistentnosť, t. j. niektorý poznatok z z pôvodnej databázy $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ musí byť odstránený alebo modifikovaný.

- Tak napríklad, ak poznatok p_1 nahradíme novým poznatkom

  P′ 1 = ′všetky európske labute sú biele, okrem niektorých zo Slovenska, ktoré sú čierne ′

- Táto náhrada odstraňuje vyššie spomenutú nekonzistentnosť tak, že jednoznačná špecifikácia v poznatku p_1 o tom, že každá labuť je biela, je nahradená novým poznatkom p_1', že pôvodný predpoklad platí pre labute okrem niektorých slovenských labutí, ktoré sú čierne.

Príklad (*problém abdukcie*)

Koná sa oslava, Ján, Júlia, Klára a Štefan sú potenciálni účastníci tejto oslavy. K tomu, aby sme mohli zapísať študovaný problém pomocou formúl výrokovej logiky, zavedieme tejto štyri výroky:

p	*Ján pôjde na oslavu*
q	*Júlia pôjde na oslavu*
r	*Klára pôjde na oslavu*
s	*Štefan pôjde na oslavu*

Avšak, ako to často býva, ich účasť je ohraničenú troma podmienkami

$p \vee q$	Ján alebo Júlia pôjdu na oslavu.
$q \Rightarrow (r \wedge s)$	Ak Júlia pôjde na oslavu, potom na oslavu pôjde Klára a Štefan.
$\neg p \Rightarrow s$	Ak nepôjde na oslavu Ján, potom pôjde na oslavu Štefan.

Našim cieľom je zistiť, za akých podmienok sa Štefan zúčastní oslavy, t.j. budeme riešiť problém, kedy z teórie

$$T=\{p\vee q, q\Rightarrow(r\wedge\neg s), \neg p\Rightarrow s\}$$

vyplýva, že Štefan sa zúčastní oslavy, $T\vdash s$, alebo ekvivalentné vyjadrené takto pomocou formule (pozri vetu 2.3)

$$((p\vee q)\wedge(q\Rightarrow(r\wedge\neg s))\wedge(\neg p\Rightarrow s))\Rightarrow s$$

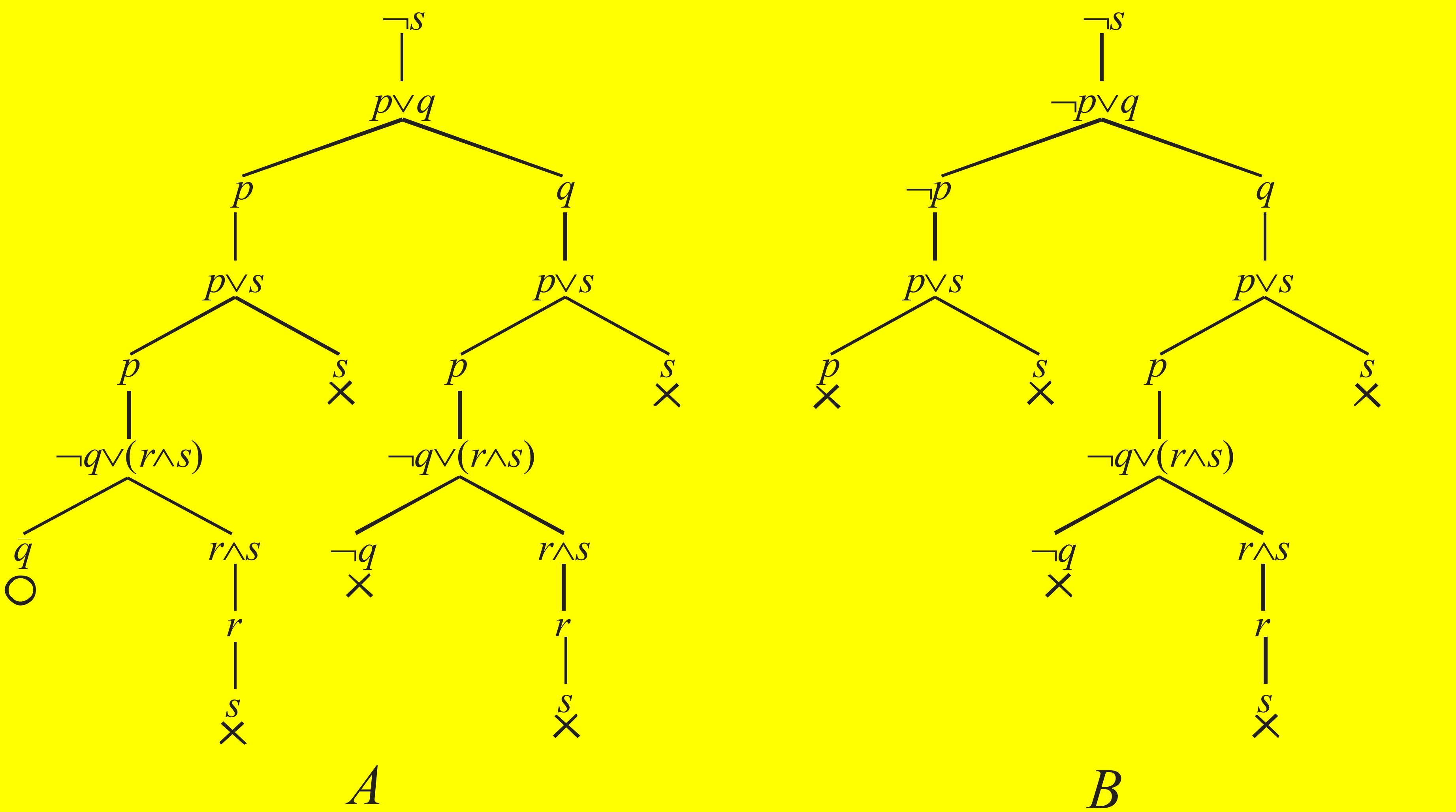
Túto formulu môžeme jednoducho prepísať pomocou jej negácie do tvaru

$$(p\vee q)\wedge(q\Rightarrow(r\wedge\neg s))\wedge(\neg p\Rightarrow s)\wedge\neg s \qquad (*)$$

Aplikujeme metódu sémantických tabiel k analýze kontradikčnosti formule (*), aby sme zjednodušili generované sémantické tablo, v prvom kroku odstránime z formule implikácie

$$(p\vee q)\wedge(\neg q\vee(r\wedge\neg s))\wedge(p\vee s)\wedge\neg s$$

Príslušný strom sémantického tabla $\mathcal{T}$ je znázornené na obr. diagram A. Toto sémantické tablo nie je uzavreté, obsahuje jednu vetvu, ktorá je otvorená, čiže formula (*) nie je kontradikciou, je len splniteľná. To znamená, že neplatí $T\vDash s$, t.j. výrok s nie je dôsledkom teórie T.



(A) Otvorené sémantické tablo zostrojené pre pôvodnú teóriu T,
(B) uzavreté sémantické tablo zostrojené pre modifikovanú teóriu.

Priesvitka 9

Môžeme si položiť zaujímavú otázku, ako modifikovať teóriu T tak, aby výrok s už bol dôsledkom tejto novej teórie. K tomuto účelu nám dobre poslúži sémantické tablo $\mathcal{T}$ z obrázku (A), našim cieľom bude taká modifikácia teórie T, aby otvorené vetve tabla sa stali uzavretými. Teóriu modifikujeme tak, že prvý predpoklad $p \vee q$ modifikujeme na $\neg p \vee q$

Modifikovaná teória má potom tvartvar

$$T' = \{\neg p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \neg s), \neg p \Rightarrow s\} \qquad (**)$$

Potom výsledná formula má tvar

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow (r \wedge \neg s)) \wedge (\neg p \Rightarrow s) \wedge \neg s$$

Sémantické tablo pre túto formulu je znázornené na obr. 5.5, diagram B. Z obrázku vidíme, že sémenatické tablo pre takto rozšírenú teóriu (**) sa už sa stalo uzavretým, $T' \vdash s$.

Rekapitulácia výrokovej logiky

Syntaktický prístup

- Poznatky sú reprezentované formulami výrokovej logiky, ktoré sú zostrojené nad abecedou atomických výrokov $\mathcal{A}=\{p,q,...,p',q',...\}$ a množinou logických spojok $\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\neg\}$.
- Jazyk výrokovej logiky zostrojený nad abecedou $\mathcal{A}$ označíme $L_{\mathcal{A}}=\{\varphi,\psi,...,\varphi',\psi',...,\perp,\mathsf{T}\}$, kde sú uvedené dva symboly (formuly), ktoré reprezentujú kontradikciu resp. tautológiu (napr. $\perp\equiv p\wedge\neg p$ a $\mathsf{T}\equiv p\vee\neg p$).
- Nech $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}\subseteq L_{\mathcal{A}}$ je množina formúl (teória) výrokovej logiky.
- Hovoríme, že z teórie $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ ***logicky vyplýva*** formula ψ, $\Phi\vdash\psi$, práve vtedy, ak existuje postupnosť formúl $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ z jazyka $L_{\mathcal{A}}$, pričom pre každé i = 1, 2, ..., m platí jedna z nasledujúcich dvoch podmienok: (1) formula α_i je totožná s nejakou formulou z Φ, alebo (2) formula α_i je logickým dôsledkom formúl $\alpha_1,...,\alpha_{i-1}$.

- Teória Φ je ***nekonzistentná*** vtedy a len vtedy, ak existuje taká formula ψ, že súčasne platí $\Phi \vdash \psi$ a $\Phi \vdash \neg\psi$, čo môžeme formálne zapísať pomocou existenčného kvantifikátora, $(\exists\psi)\big((\Phi \vdash \psi) \wedge (\Phi \vdash \neg\psi)\big)$.
- Teória Φ je ***konzistetná*** vtedy a len vtedy, ak pre každú formulu ψ platí $\Phi \nvdash \psi$ alebo $\Phi \nvdash \neg\psi$, t. j. $(\forall\psi)\big((\Phi \nvdash \psi) \vee (\Phi \nvdash \neg\psi)\big)$.
- Nekonzistentnosť teórie Φ vyjadríme symbolom $\Phi \vdash \perp$, čo verbálne vyjadríme tak, že teória Φ je nekonzistetná práve vtedy, ak z nej vyplýva formula – kontradikcia, napr. $\perp \equiv p \wedge \neg p$. Negáciou tejto definície dostaneme, že teória je konzistetná práve vtedy, ak z nej nevyplýva kontradikcia, $\Phi \nvdash \perp$.

Sémantický prístup

- Teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subseteq L_{\mathcal{A}}$ sa nazýva konzistentná práve vtedy, ak má neprázdny model, $M(\Phi) \neq \emptyset$.

$$M(\Phi) = \{\tau \in W; \forall(\varphi \in \Phi)(val_\tau(\varphi) = 1)\}$$
$$= \bigcap_{\varphi \in \Phi} M(\varphi)$$
$$M(\Phi \cup \Psi) = M(\Phi) \cap M(\Psi)$$

- V opačnom prípade, ak je model prázdny, $M(\Phi) = \emptyset$, teória Φ sa nazýva nekonzistentná.

- Hovoríme, že formula φ ***tautologicky vyplýva*** z teórie Φ práve vtedy, ak je táto formula φ pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in M(\Phi)$, t. j. $M(\Phi) \subseteq M(\varphi)$, vlastnosť tautologického vyplývania formálne zapisujeme $\Phi \vDash \varphi$

$$(\Phi \vDash \varphi) =_{def} \forall\big(\tau \in M(\Phi)\big)\big(val_\tau(\varphi) = 1\big)$$
$$(\Phi \vDash \varphi) =_{def} \big(M(\Phi) \subseteq M(\varphi)\big)$$

- Neplatnosť inklúzie $M(\Phi) \not\subseteq M(\varphi)$ je ekvivalentná vlastnosti $\Phi \nvDash \varphi$, t. j. formula φ sémantický nevyplýva z teórie Φ.

- Nech Φ a Ψ sú dve teórie, ktoré vyhovujú podmienke $\Phi \subseteq \Psi$, potom vlastnosť monotónnosti implikuje pre ich modely má tvar

$$(\Phi \subseteq \Psi) \Rightarrow \big(M(\Phi) \subseteq M(\Psi)\big)$$

Ekvivalentnosť medzi syntaktickým a sémantickým prístupom

- Pretože medzi reláciami logického a tautologického vyplývania existuje ekvivalencia

$$\left(\Phi \vdash \varphi\right) \equiv \left(\Phi \models \varphi\right)$$

  Potom je irelevantné, či používame syntaktický alebo sémantický prístup k špecifikácii konzistentnosti teórie alebo vyplývania formuly z teórie, budeme používať oba prístupy v závislosti od ich vhodnosti k riešeniu daného problému.

Tarského operátor konsekvencie

Tento operátor je definovaný pomocou relácie logického dôsledku

$$Cn(\Phi) =_{def} \{\varphi; \Phi \vdash \varphi\}$$

t. j. minimálna množina $Cn(\Phi)$ obsahuje formuly, ktoré sú logickým dôsledkom teórie Φ. Vyhovuje týmto trom podmienkam

(1) inklúzia: $\Phi \subseteq Cn(\Phi)$

(2) monotónnosť: $(\Phi \subseteq \Phi') \Rightarrow (Cn(\Phi) \subseteq Cn(\Phi'))$

(3) idempotentnosť: $Cn(\Phi) = Cn(Cn(\Phi))$

(4) Ak formula φ je logicky odvodená z teórie Φ, $\Phi \vdash \varphi$, potom $\varphi \in Cn(\Phi)$.

Databáza poznatkov

Pre danú teóriu Φ zostrojíme ***databázu poznatkov*** (ang. ***belief set***) pomocou operátora konsekvencie

$$K = Cn(\Phi)$$

Relácia „vyplývania" $\Phi \vdash \varphi$ je ekvivalentná podmienke $\varphi \in K$,

$$(\Phi \vdash \varphi) \equiv (\varphi \in K)$$

Príklad

Nech množina formúl $\Phi = \{p, q\}$ obsahuje dva poznatky výroky p a q. Potom množina $Cn(\Phi)$ má tvar

$$Cn(\Phi) = \{p, q, p \vee \varphi, \psi \vee q, \varphi \Rightarrow p, \psi \Rightarrow q, p \wedge q, ...\}$$

kde φ a ψ sú ľubovoľné formuly. Poznamenajme, že táto množina formúl je nekonečná a spočítateľná.

Tri typy zmeny teórie Φ

- ***Expanzia***, nové poznatky, reprezentované formulami z množiny Ψ sú dodané do konzistentnej teórie Φ, za vzniku novej konzistentnej teórie $\Phi' = \Phi \cup \Psi$ .Databáza poznatkov priradená rozšírenej teórii Φ' je označená
$$K_{\Psi}^{(+)} =_{def} Cn\left(\Phi \cup \Psi\right)$$

- ***Kontrakcia***, podmnožina $\Delta \subseteq \Phi$ je odstránená z nekonzistentnej teórie Φ za vzniku maximálnej konzistentnej podmnožiny – teórie $\Phi' = \Phi - \Delta$. Databáza poznatkov priradená zúženej teórii Φ' je označená
$$K_{\Delta}^{(-)} =_{def} Cn\left(\Phi - \Delta\right)$$

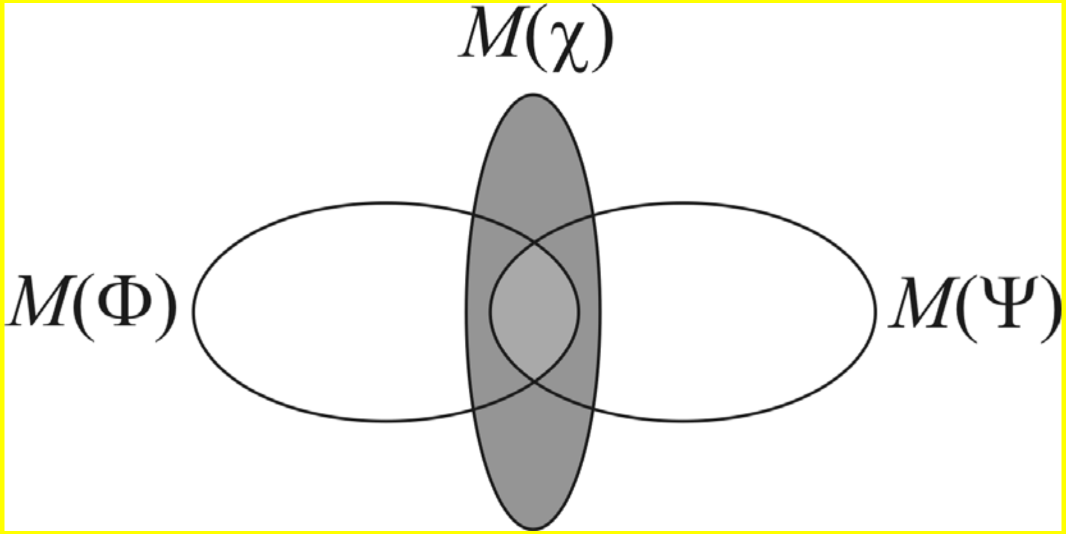
- ***Revízia*** je kombináciou predchádzajúcich dvoch operácii expanzie a kontrakcie, pôvodne konzistentná teória Φ je expanziou rozšírená o nové poznatky z Ψ, čím sa stane nekonzistentnou, z takto rozšírenej teórie je pomocou kontrakcie je odstránená podmnožina $\Delta \subseteq \Phi$, výsledkom tohto procesu je konzistentná teória $\Phi' = \left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta$. Pôvodná databáza $K = Cn\left(\Phi\right)$ priradená modifikovanej rozšíreno – zúženej teórii Φ' je označená

$$K_{\Psi,\Delta}^{(+,-)} =_{def} Cn\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right)$$

Expanzia teórie

- Operácia ***expanzie*** konzistentnej teórie o nové poznatky, pričom konzistentnosť novej rozšírenej teórie sa zachováva, patrí medzi najjednoduchšie operácia zmeny databáz poznatkov.

- Touto operáciou ja daná databáza neustále rozširovaná o nové a nové poznatky, pričom nemusíme použiť operáciu kontrakcie alebo revízie, pretože nové poznatky sú konzistentné s poznatkami z predchádzajúcich etáp rozširovania databázy poznatkov.



Diagramatické znázornenie množinovej relácie $M(\Phi)\cap M(\Psi)\subseteq M(\chi)$, ktorá tvorí podmienku pre existenciu tautologického vyplývania $(\Phi\cup\Psi)\vDash\chi$.

Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je konzistentná teória obsahujúca n formúl – poznatkov $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, $M(\Phi) \neq \emptyset$. Našou úlohou je rozšíriť túto teóriu o množinu nových poznatkov $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$ tak, aby vlastnosť konzistencie zachovala

$$\Phi' = \Phi \cup \Psi$$

$$M(\Phi') = M(\Phi \cup \Psi) = M(\Phi) \cap M(\Psi) \neq \emptyset.$$

Cieľom tejto expanzie pôvodnej teórie je, aby z rozšírenej teórie vyplývala formula χ, t. j. musí platiť $M(\Phi) \cap M(\Psi) \subseteq M(\chi)$

Príklad

(1) Nech teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ obsahuje tieto poznatky

$$\varphi_1 = \text{'ak } \underbrace{\text{prší}}_{p}\text{, potom } \underbrace{\text{cesta je mokrá}}_{q}\text{'} = (p \Rightarrow q)$$

$$\varphi_2 = \text{'ak } \underbrace{\text{cesta je mokrá}}_{q}\text{, potom } \underbrace{\text{jazdím opatrne}}_{r}\text{'} = (q \Rightarrow r)$$

Z tejto teórie Φ vyplýva pomocou hypotetického sylogizmu nový poznatok

$$\chi = p \Rightarrow r = \text{'ak } \underbrace{\text{prší}}_{p}\text{, potom } \underbrace{\text{jazdím opatrne}}_{r}\text{'}$$

$$\Phi \vdash \chi = p \Rightarrow r$$

(2) Pôvodnú teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ pomocou expanzie rozšírime o poznatok $\Psi = \{p\}$ (t. j. 'prší'), dostaneme novú rozšírenú teóriu $\Phi' = \Phi \cup \{p\} = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$.

Z takto rozšírenej teórie vyplýva nový poznatok

$$\tilde{\chi} = q \wedge r = \text{'cesta je mokra a jazdím opatrne'}$$

- Problém expanzie teórie Φ o formuly z množiny Ψ môžeme formálne chápať ako problém riešenie množinovej rovnice
  - $M(\Phi) \cap M(\Psi) \subseteq M(\chi)$

  kde $M(\Phi)$ a $M(\chi)$ sú dané modely.

- Model $M(\Psi)$ musíme zostrojiť tak, aby platila množinová rovnica (15.10) a súčasne, aby riešenie $M(\Psi)$ vyhovovalo podmienke $M(\Phi) \cap M(\Psi) \neq \emptyset$, t. j. model rozšírenej teórie $\Phi' = \Phi \cup \Psi$ je neprázdny. Poznamenajme, že riešenie tejto rovnice nám ***umožňuje jednoduchú algoritmizáciu*** problému expanzie konzistentnej teórie tak, aby z tejto expanzie vyplývala formula χ.

Tabuľka pravdivostných hodnôt pre formuly z príkladu

#	p	q	r	p	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$q \wedge r$
1	0	0	0	0	1	1	0
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	1	0	0	1	0	0
4	0	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	0	1	0
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	1	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1

Pomocou tabuľky môžeme zostrojiť tieto modely:

$$M\left(\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}\right) = \{\tau_1 = (000), \tau_2 = (001), \tau_4 = (011), \tau_8 = (111)\}$$

$$M(\Phi') = M(\Phi) \cap M(p) = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} = \{\tau_8 = (111)\}$$

$$M(\chi = p \Rightarrow r) = \{\tau_1 = (000), \tau_2 = (001), \tau_3 = (010), \tau_4 = (011), \tau_6 = (101), \tau_8 = (111)\}$$

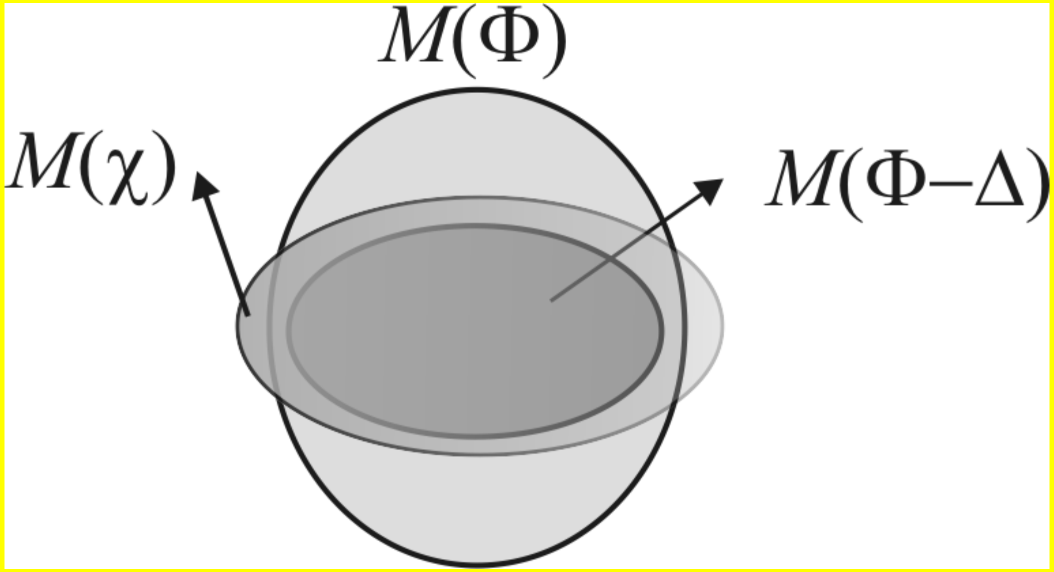
$$M(\tilde{\chi} = q \wedge r) = \{\tau_4 = (011), \tau_8 = (111)\}$$

Kontrakcia teórie

Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ je nekonzistentná teória, hľadáme takú jej ***minimálnu*** podmnožinu $\Delta \subseteq \Phi$, ktorú keď odstránime z pôvodnej teórie Φ, získame novú konzistentnú teóriu $\Phi' = \Phi - \Delta$ z ktorej vyplýva poznatok χ, $\Phi' \vDash \chi$. Táto vlastnosť je splnená práve vtedy, ak platí

$$M(\Phi - \Delta) \subseteq M(\chi)$$

kde $\Phi' = \Phi - \Delta$ je nová maximálna konzistentná teória, ktorá vznikla z pôvodnej teórie odobratím poznatkov z Δ, $M(\Phi - \Delta) \neq \emptyset$. Riešením množinovej rovnice získame takú maximálnu konzistentnú teóriu $\Phi' = \Phi - \Delta$ z ktorej vyplýva daný poznatok χ



Kontrakcia pôvodnej teórie Φ vzhľadom k podmnožine $\Delta \subseteq \Phi$, vznikne nová teória $\Phi' = \Phi - \Delta$, podmienka pre tautologické vyplývanie $(\Phi - \Delta) \models \chi$ má tvar $M(\Phi - \Delta) \subseteq M(\chi)$.

Príklad

Študujme teóriu tvaru $\Phi = \{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$, ktorá je nekonzistentná, $M(\Phi) = \emptyset$. Jednoduchými úvahami dokážeme, že z tejto teórie vyplýva kontradikcia, $\Phi \vDash p \wedge \neg p$. Vytvoríme tieto tri podmnožiny teórie Φ

$$\Phi_1' = \Phi - \Psi_1 = \{\neg q, p \Rightarrow q\},\ \Delta_1 = \{p\}$$

$$\Phi_2' = \Phi - \Psi_1 = \{p, \neg q\},\ \Delta_2 = \{p \Rightarrow q\}$$

$$\Phi_3' = \Phi - \Psi_3 = \{p, p \Rightarrow q\},\ \Delta_3 = \{\neg q\}$$

Pre nové teórie platí

$$\Phi_1' \vDash \neg p,\ \Phi_2' \vDash p \wedge \neg q,\ \Phi_3' \vDash q$$

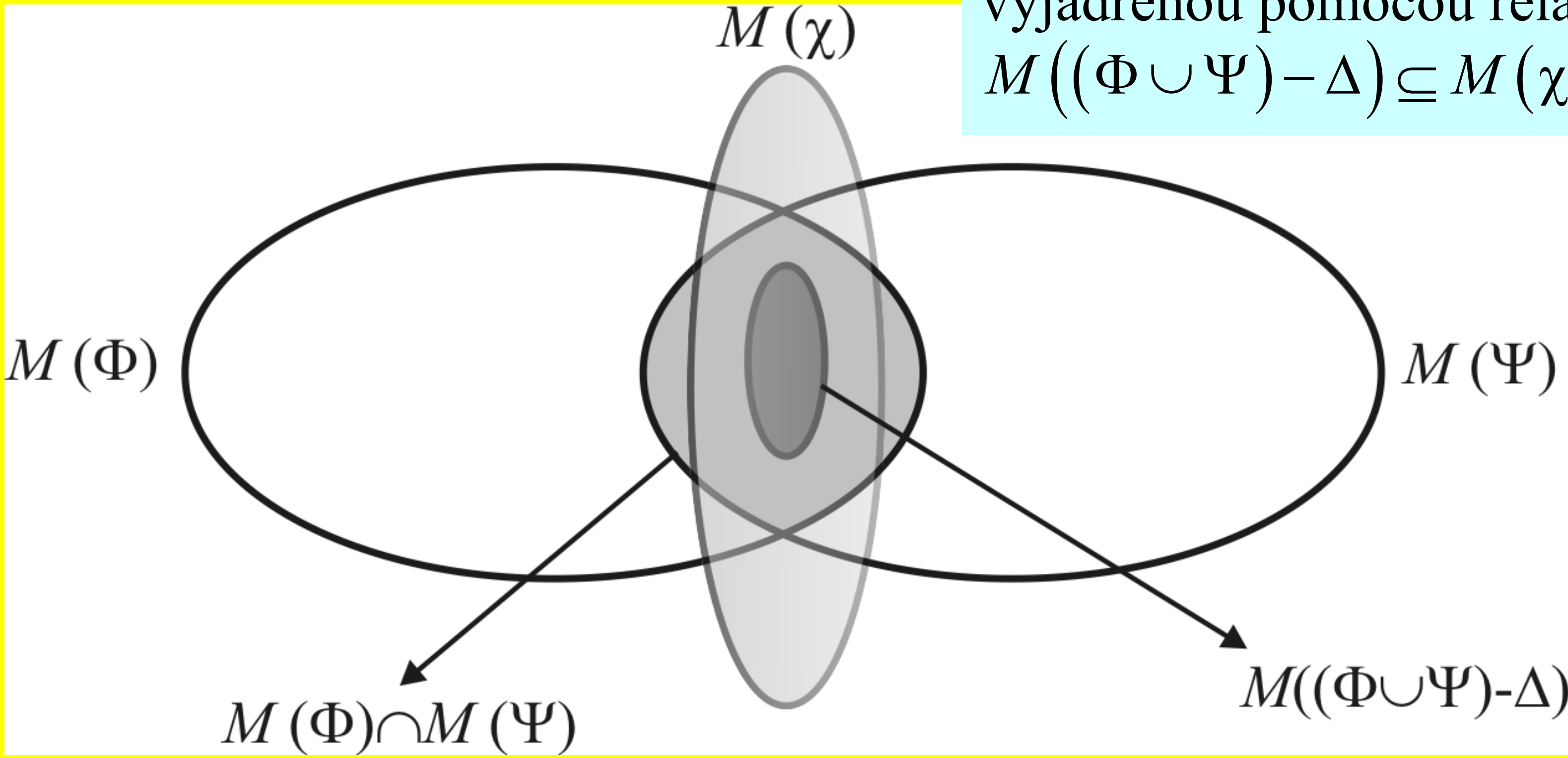
Z tohto jednoduchého ilustračného príkladu vyplýva, že proces kontrakcie nie je jednoznačný, dá sa vykonať mnohými spôsobmi, ktoré sú ťažko od seba odlíšiteľné svojou výhodnosťou alebo nevýhodnosťou.

Revízia teórie

- Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ je konzistentná teória, ktorá je rozšírená o nové poznatky z množiny Ψ, pričom nová teória $\Phi' = \Phi \cup \Psi$ stáva sa nekonzistentnou.

- Problém revízie potom spočíva v tom, že hľadáme takú ***minimálnu*** množinu formúl $\Delta \subseteq \Phi$, ktorú keď odpočítame od Φ', dostaneme konzistentnú teóriu $\Phi'' = (\Phi \cup \Psi) - \Delta$, ktorá nie je podmnožinou pôvodnej teórie $\Phi'' \quad \Phi$.

- Pri kontrakcii sa snažíme uchovať nové poznatky z Ψ a odstraňovať len poznatky z pôvodnej teórie Φ, Diagramatické znázornenie podmienky tautologického vyplývania $\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \models \chi$ vyjadrenou pomocou relácie $M\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \subseteq M\left(\chi\right)$



Proces revízie nie je jednoznačný a preto musíme použiť „mimologické" prostriedky na aspoň čiastočné odstránenie tejto nejednoznačnosti.

Podmienka pre existenciu formuly χ, ktorá tautologicky vyplýva z modifikovanej teórie $\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \models \chi$ má tvar množinovej relácie

$$M\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \subseteq M\left(\chi\right)$$

Pretože $\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \subseteq \left(\Phi \cup \Psi\right)$, z monotónnosti modelu (vyjadrenej implikáciou $\left(A \subseteq B\right) \Rightarrow M\left(A\right) \subseteq M\left(B\right)$) vyplýva inklúzia $M\left(\left(\Phi \cup \Psi\right) - \Delta\right) \subseteq M\left(\Phi \cup \Psi\right)$, tieto podmienky sú znázornené na obrázku.

Príklad

Nech teória Φ má tvar

$$\Phi = \{p, q, q \Rightarrow p \wedge r, r \Rightarrow s\}$$

Táto teória je konzistentná, ľahko môžeme pomocou prirodzenej dedukcie odvodiť rôzne logické vyplývania, napr.

$$\Phi \models (p \Rightarrow r \wedge s),\ \ \Phi \models (p \wedge q \wedge r \wedge s)$$

Táto teória Φ je rozšírená o nové poznatky z $\Psi = \{q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$, dostaneme novú rozšírenú teóriu

$$\Phi' = \{p, q, q \Rightarrow p \wedge r, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$$

ktorá je evidentne nekonzistentná, jednoducho sa dá dokázať, že $\Phi \vdash p \wedge \neg p$

Stojíme pred úlohou, ako určiť $\Delta \subseteq \Phi$ tak, aby $\Phi'' = (\Phi \cup \Psi) - \Delta$ bola konzistentná teória

Pravdivostná tabuľka formúl z rozšírenej teórie Φ' je znázornená tabuľkou 15.3. V tejto tabuľke sú „vysvietené“ tri riadky, ktoré obsahujú nové formuly z množiny Ψ. Poznamenajme, že len tieto tri riadky sa podieľajú na tvorbe alternatívnych „revidovaných“ teórií Φ''_i, pretože už v úvode tejto podkapitoly sme postulovali, že nové poznatky z množiny Ψ sa pri revízii ponechávajú, odstraňujú sa len poznatky z pôvodnej teórie Φ. Tri nové „revidované“ teórie sú znázornené tabuľkou 15.4. Poznamenajme, že v tejto tabuľke sú uvedené všetky možné „revidované množiny“ Φ'' (aj tie, ktoré vznikli odstránením nových poznatkov z množiny Ψ). Revidované teórie, ktoré obsahujú nové poznatky sú v tabuľke 15.4 vysvietené.

Tabuľka pravdivostných hodnôt formúl z rozšírenej teórie Φ'

#	p	q	r	s	p	q	$p \Rightarrow p \wedge r$	$r \Rightarrow s$	$q \Rightarrow \neg p \wedge r$	$\neg s$
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
4	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
5	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
6	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
7	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
8	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
9	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
11	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
12	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
13	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
14	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Tabuľka 15.4. Formuly vyplývajúce z teórie Φ''

Teória Φ''	model teórie Φ''	formula χ vyplývajúca z Φ''
$\Phi_1'' = \{p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$	$M(\Phi_1'') = \{(0000)\}$	$\chi_1 = (000\#) = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
$\Phi_2'' = \{q, p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s, \neg s\}$	$M(\Phi_2'') = \{(0100)\}$	$\chi_2 = (0\#0\#) = \neg p \wedge \neg q$
$\Phi_3'' = \{q, p \Rightarrow q \wedge r, q \Rightarrow \neg p \wedge s, \neg s\}$	$M(\Phi_3'') = \{(0110)\}$	$\chi_3 = (0\#1\#) = \neg p \wedge r$
$\Phi_4'' = \{q, p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r\}$	$M(\Phi_4'') = \{(0111)\}$	$\chi_4 = (0\#11) = \neg p \wedge r \wedge s$
$\Phi_5'' = \{p, r \Rightarrow s, q \Rightarrow \neg p \wedge r, \neg s\}$	$M(\Phi_5'') = \{(1000)\}$	$\chi_5 = (\#00\#) = \neg p \wedge \neg r$
$\Phi_6'' = \{p, q, r \Rightarrow s, \neg s\}$	$M(\Phi_6'') = \{(1100)\}$	$\chi_6 = (\#\#0\#) = \neg r$
$\Phi_7'' = \{p, q, p \Rightarrow q \wedge r, \neg s\}$	$M(\Phi_7'') = \{(1110)\}$	$\chi_7 = (\#\#1\#) = r$
$\Phi_8'' = \{p, q, p \Rightarrow q \wedge r, r \Rightarrow s\}$	$M(\Phi_8'') = \{(1111)\}$	$\chi_8 = (\#\#11) = r \wedge s$

Poznamenajme, že pri konštrukcii formúl χ, ktoré tautologicky vyplývajú z revidovanej teórie Φ'', použili sme heuristiku symbolov # (pozri kapitolu 3.2.1) .

Revision of History

The End