Cvičenie

Cvičenie 1.1. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

(a) Mária je študentom informatiky. Preto, je Mária študentom informatiky alebo študentom telekomunikácií.
p = Mária je študentom informatiky
q = Mária je študentom telekomunikácií

p	predpoklad$_1$
$p \vee q$	dôsledok adície v tab 1.1

(b) Jaroslav študuje informatiku a elektrotechnológiu. Preto, Jaroslav študuje informatiku.
p = Jaroslav študuje informatiku
q = Jaroslav študuje elektrotechnológiu

$p \wedge q$	predpoklad$_1$
p	dôsledok simplifikácie v tab 1.1

(c) Ak prší, potom plaváreň je zatvorená. Preto, ak plaváreň je otvorená, potom neprší.
p = prší
q = plaváreň je zatvorená

$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
$\neg q \Rightarrow \neg p$	dôsledok inverzie implikácie v tab. 1.1

(d) Ak dnes sneží, kino bude uzavreté. Kino dnes nie je uzavreté. Preto, dnes nesneží.
p = dnes sneží
q = kino je dnes uzavreté

$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
$\neg q$	predpoklad$_2$
$\neg p$	dôsledok modus tollens v tab. 1.1

(e) Ak dnes pôjdem plávať, potom ráno skoro vstanem. Ak ráno skoro vstanem, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo. Preto, ak dnes pôjdem plávať, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo.
p = dnes pôjdem plávať
q = dnes ráno skoro vstanem
r = dnes pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo

$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
$q \Rightarrow r$	predpoklad$_2$
$p \Rightarrow r$	dôsledok hypotetického sylogizmu v tab. 1.1

Cvičenie 1.2. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

(a) Dnes bude teplo alebo bude smog v ovzduší. Dnes nebude teplo. Preto, dnes bude smog v ovzduší.
p = dnes bude teplo
q = dnes bude smog v ovzduší

$p \vee q$	predpoklad$_1$
$\neg p$	predpoklad$_2$
q	dôsledok disjunktívneho sylogizmu v tab. 1.1

(b) Eva vynikajúco pláva. Ak Eva je vynikajúci plavec, potom môže pracovať ako plavčík. Preto, Eva môže pracovať ako plavčík.
p = Eva vynikajúco pláva
q = Eva pracuje ako plavčík

p	predpoklad$_1$
$p \Rightarrow q$	predpoklad$_2$
q	dôsledok modus ponens v tab. 1.1

(c) Stano bude pracovať v počítačovej firme ABC. Ak Stano dokončí štúdium na FIIT, potom nebude pracovať v počítačovej firme ABC. Preto, Stano nedokončí štúdium na FIIT.
p = Stano bude pracovať v počítačovej firme ABC
q = Stano dokončí štúdium na FIIT

p	predpoklad$_1$
$q \Rightarrow \neg p$	predpoklad$_2$
$p \Rightarrow \neg q$	dôsledok$_1$ predpokladu$_2$ *prepísaný pomocou* inverzie implikácie
$\neg q$	dôsledok$_2$ modus ponens na predpoklad$_1$ a dôsledok$_1$

(d) Ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom zvládnem teóriu logických obvodov. Ak zvládnem teóriu logických obvodov, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium. Preto, ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium.
p = budem intenzívne pracovať na projekte
q = vládnem teóriu logických obvodov
r = úspešne dokončím bakalárske štúdium

$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
$q \Rightarrow r$	predpoklad$_2$
$p \Rightarrow r$	dôsledok hypotetického sylogizmu

Cvičenie 1.3. Aké závery vyplývajú z množiny výrokov?
(a) „Ak jem korenenú stravu, potom mám hrozné sny“, „ak hrmí keď spím, potom mám hrozné sny“, „nemám hrozné sny“.
p = jem korenenú stravu
q = mám hrozné sny

r = spím,
s = hrmí

$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
$(r \Rightarrow s) \Rightarrow q$	predpoklad$_2$
$\neg q$	predpoklad$_3$
$\neg(r \Rightarrow s) \equiv (r \wedge \neg s)$	modus tollens na predpoklad$_2$ a predpoklad$_3$
$\neg p$	modus tollens na predpoklad$_1$ a predpoklad$_3$

záver$_1$: spím a nehrmí
záver$_2$: nejem korenenú stravu

(b) „Ja som chytrý alebo mám šťastie", „nemám šťastie", „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii".
p = som chytrý
q = mám šťastie
r = zvíťazím v lotérii

$p \vee q$	predpoklad$_1$
$\neg q$	predpoklad$_2$
$q \Rightarrow r$	predpoklad$_3$
p	dôsledok disjunkt. sylogizmu aplik. na predpoklad$_1$ a predpoklad$_2$

záver: som chytrý

(c) „Každý študent informatiky vlastní notebook", „Rudo nevlastní notebook", „Anna vlastní notebook".
$SI(x)$ = x študuje informatiku
VN(x) = x vlastní notebook
Univerzum = {študenti}

$(\forall x(SI(x) \Rightarrow VN(x)))$	predpoklad$_1$
$\neg VN(Rudo)$	predpoklad$_2$
$VN(Anna)$	predpoklad$_3$
$(SI(Rudo) \Rightarrow VN(Rudo))$	konkretizácia predpokladu$_1$
$(SI(Anna) \Rightarrow VN(Anna))$	???
$\neg SI(Rudo)$	modus tollens na konkretizáciu a predpopklad$_2$

záver: Rudo neštuduje informatiku

(d) „Čo je dobré pre našu firmu, je dobré aj pre Slovensko", „čo je dobré pre Slovensko, je dobré aj pre teba", „ak si nemôžeš kúpiť auto, potom to nie je pre teba dobré".

p = dobré pre našu firmu

q = dobré aj pre Slovensko
r = dobré aj pre teba
s = môžeš si kúpiť auto

$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
$q \Rightarrow r$	predpoklad$_2$
$\neg s \Rightarrow \neg r$	predpoklad$_3$
$p \Rightarrow r$	dôsledok$_1$: hypotetický sylogizmus na predpoklad$_1$ a predpoklad$_2$
$r \Rightarrow s$	dôsledok$_2$: inverzia implikácie na predpoklad$_3$
$p \Rightarrow s$	záver: hypotetický sylogizmus na dôsledok$_1$ a dôsledok$_2$

záver: ak je to dobré pre našu firmu, potom si môžeš kúpiť auto

(e) „Všetci hlodavce hryzú potravu“, „myš je hlodavec“, „pes nehryzie potravu“, „netopier nie je hlodavec“.

$H(x) = x$ je hlodavec
$HP(x) = x$ hryzie potravu
$M(x) = x$ je myš

$\forall x\left(H(x) \Rightarrow HP(x)\right)$	predpoklad$_1$
$H(myš)$	predpoklad$_2$
$\neg HP(pes)$	predpoklad$_3$
$\neg H(netopier)$	predpoklad$_4$
$H(myš) \Rightarrow HP(myš)$	dôsledok$_1$: konkretizácia predpokladu$_1$
$H(pes) \Rightarrow HP(pes)$	dôsledok$_2$: konkretizácia predpokladu$_1$
$HP(myš)$	dôsledok$_3$: modus ponens na predpok$_2$ a dôsled$_1$
$\neg H(pes)$	dôsledok4: modus tollens na predpok$_3$ a dôsled$_2$

záver$_1$: myš hryzie potravu
záver$_2$: pes nie je hlodavec

Cvičenie 1.4. Vysvetlite, ktorá schéma usudzovania bola použitá v ktorom kroku.

(a) Eva je študentka nášho krúžku a vlastní červené auto“, „každý, kto vlastní červené auto dostal aspoň jednu pokutu za prekročenie rýchlosti“, „preto, niekto z nášho krúžku dostal pokutu za prekročenie rýchlosti“.
$SNK(x) = x$ je študentom nášho krúžku
$VCA(x) = x$ vlastní červené auto
$DPPR(x) = x$ dostal pokutu za prekročenie rýchlosti

$SNK(Eva) \wedge VCA(Eva)$
$\forall x(VCA(x) \Rightarrow DPPR(x))$

$\exists x(SNK(x) \wedge DPPR(x))$

1.	$SNK(Eva) \wedge VCA(Eva)$	predpoklad
2.	$\forall x(VCA(x) \Rightarrow DPPR(x))$	predpoklad
3.	$SNK(Eva)$	simplifikácia 1
4.	$VCA(Eva)$	simplifikácia 1
5.	$VCA(Eva) \Rightarrow DPPR(Eva)$	konkretizácia 2
6.	$DPPR(Eva)$	modus ponens na 4 a 5
7.	$SNK(Eva) \wedge DPPR(Eva)$	konjunkcia 3 a 6
8.	$\exists x(SNK(x) \wedge DPPR(x))$	zovšeobecnenie 7

(b) Všetci moji priatelia, Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol, si zapísali do indexu prednášku z diskrétnej matematiky", „každý študent, ktorý si zapísal do indexu prednášku z diskrétnej matematiky, môže si nasledujúci akademický rok zapísať aj prednášku z algoritmov", „preto, všetci moji priatelia Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol, môžu si nasledujúci akademický rok zapísať do indexu prednášku z algoritmov".

$ZIPDM(x)$ = x si zapísal do indexu prednášku z diskrétnej matematiky
$NARZPA(x)$ = x si nasledujúci akademický rok zapíše prednášku a algoritmov
U = množina všetkých študentov
U' = podmnožina U, obsahuje Máriu, Adolfa, Rudolfa, Vieru a Karola

$\forall(x \in U')(ZIPDM(x))$	predpoklad
$\forall(x \in U)(ZIPDM(x) \Rightarrow NARZPA(x))$	predpoklad
$\forall(x \in U')(NARZPA(x))$	záver

1.	$\forall' x(ZIPDM(x))$	predpoklad
2.	$\forall(x \in U)(ZIPDM(x) \Rightarrow NARZPA(x))$	predpoklad
3.	$ZIPDM(x)$	pre $\forall x \in U'$, konkretizácia 1
4.	$ZIPDM(x) \Rightarrow NARZPA(x)$	pre $\forall x \in U'$, konkretizácia 2
5.	$NARZPA(x)$	pre $\forall x \in U'$, modus ponens na 3 a 4
6.	$\forall(x \in U')NARZPA(x)$	zovšeobecnenie 5 pre U'

(c) Všetky filmy s Charlie Chaplinom sú vynikajúce“, „Charlie Chaplin hral v nemých filmoch“, „preto, niektoré vynikajúce filmy sú nemé“.

$FCC(x)$ = x je film kde hral Charlie Chaplin
$VF(x)$ = x je vynikajúci film
$NF(x)$ = x je nemý film

$$\begin{array}{|l}
\forall x\left(FCC(x)\Rightarrow VF(x)\right)\\
\exists x\left(FCC(x)\wedge NF(x)\right)\\
\hline
\exists x\left(VF(x)\wedge NF(x)\right)
\end{array}$$

1.	$\forall x\left(FCC(x)\Rightarrow VF(x)\right)$	predpoklad
2.	$\exists x\left(FCC(x)\wedge NF(x)\right)$	predpoklad
3.	$FCC(c)\wedge NF(c)$	konkretizácia 2, c je film s CC a je vynikajúci
4.	$FCC(c)$	simplifikácia 3
5.	$NF(c)$	simplifikácia 3
6.	$FCC(c)\Rightarrow VF(c)$	konkretizácia 1
7.	$VF(c)$	modus ponens na 4 a 6
8.	$VF(c)\wedge NF(c)$	konjunkcia 5 a 7
9.	$\exists x\left(VF(x)\wedge NF(x)\right)$	zovšeobecnenie 8

Cvičenie 1.5. Vysvetlite prečo uvedené závery sú korektné alebo nekorektné.

(a) „Všetci študenti v tomto krúžku ovládajú logiku“, „Jano je študentom tohto krúžku“, „preto, Jano ovláda logiku“.

$$\begin{array}{|l}
\forall x\left(tk(x)\Rightarrow ol(x)\right)\\
tk(Jano)\\
\hline
ol(Jano)
\end{array}$$

1.	$\forall x\left(tk(x)\Rightarrow ol(x)\right)$	predpoklad
2.	$tk(Jano)$	predpoklad
3.	$tk(Jano)\Rightarrow ol(Jano)$	konkretizácia 1
4.	$ol(Jano)$	modus ponens na 2 a 3, záver

Záver je korektný

(b) „Každý študent informatiky má zapísanú v indexe prednášku z diskrétnej matematiky“, „Viera má zapísanú prednášku z diskrétnej matematiky“, „preto, Viera je študentom informatiky“.

$$\begin{array}{|l} \forall x\left(si(x)\Rightarrow zpdm(x)\right)\\ zpdm(Viera)\\ \hline si(Viera)\end{array}$$

1.	$\forall x\left(si(x)\Rightarrow zpdm(x)\right)$	predpoklad
2.	$zpdm(Viera)$	predpoklad
3.	$si(Viera)\Rightarrow zpdm(Viera)$	konkretizácia 1
4.	$si(Viera)$	použitie chybného pravidla „potvrdenie dôsledku“

Záver je nekorektný

(c) „Každý kôň má rád ovocie“, „môj pes nie je kôň“, „preto, môj pes nemá rád ovocie“.

$$\begin{array}{|l} \forall x\left(k(x)\Rightarrow ro(x)\right)\\ \neg k(moj\_pes)\\ \hline \neg ro(moj\_pes)\end{array}$$

1.	$\forall x\left(k(x)\Rightarrow ro(x)\right)$	predpoklad
2.	$\neg k(moj\_pes)$	predpoklad
3.	$k(moj\_pes)\Rightarrow ro(moj\_pes)$	konkretizácia 1
4.	$\neg ro(moj\_pes)$	použitie chybného pravidla „popretie predpokladu“

Záver je nekorektný

(d) „Každý, kto má rád ovsené vločky je zdravý“, „Lenka nie je zdravá“, „preto, Lenka nemá rada ovsené vločky“.

$$\begin{array}{|l} \forall x\left(rov(x)\Rightarrow z(x)\right)\\ \neg z(Lenka)\\ \hline \neg rov(Lenka)\end{array}$$

1.	$\forall x\left(rov(x)\Rightarrow z(x)\right)$	predpoklad
2.	$\neg z(Lenka)$	predpoklad
3.	$rov(Lenka)\Rightarrow z(Lenka)$	konkretizácia 1
4.	$\neg rov(Lenka)$	modus tollens na 2 a 3

Záver je korektný

Cvičenie 1.6. Určite, ktorá veta je pravdivá. Ak je uvedený záver korektný, určite ktorá schéma usudzovania bola použitá pri jeho dôkaze.

(a) Ak x je reálne číslo také, že $x > 1$, potom $x^2 > 1$. Predpokladajte, že $x^2 > 1$, potom $x > 1$.

$$\begin{array}{|l} \forall(y \in R)(y > 1 \Rightarrow y^2 > 1) \\ x^2 > 1 \\ \hline x > 1 \end{array}$$

1.	$\forall(y \in R)(y > 1 \Rightarrow y^2 > 1)$	predpoklad
2.	$x^2 > 1$	predpoklad
3.	$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$	konkretizácia 1
4.	$x > 1$	použitie chybného pravidla „potvrdenie dôsledku“

Záver je nekorektný

(b) Číslo $log_2 3$ je iracionálne vtedy, ak sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch celých nesúdeliteľných čísel. Pretože číslo $log_2 3$ nie je vyjadriteľné ako p/q, kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla, potom je číslo $log_2 3$ iracionálne.

rac(x) = *x* je racionálne číslo
pod(*x*) = *x* sa dá vyjadriť ako podiel dvoch celých nesúdeliteľných čísel

$$\begin{array}{|l} \neg pod(log_2 3) \Rightarrow \neg rac(log_2 3) \\ \neg pod(log_2 3) \\ \hline irac(log_2 3) \end{array}$$

1.	$\neg pod(log_2 3) \Rightarrow \neg rac(log_2 3)$	predpoklad
2.	$\neg pod(log_2 3)$	predpoklad
3.	$\neg rac(log_2 3)$	modus ponens na 1 a 2
4.	$irac(log_2 3)$	ekvivalentné s 3

Záver je korektný

(c) Ak x je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x > 3$, potom $x^2 > 9$. Nech $x^2 \leq 9$, potom $x \leq 3$.

$$\begin{array}{|l} \forall(y \in R)(y > 3 \Rightarrow y^2 > 9) \\ x^2 \leq 9 \\ \hline x \leq 3 \end{array}$$

1.	$\forall(y \in R)(y > 3 \Rightarrow y^2 > 9)$	predpoklad
2.	$x^2 \le 9$	predpoklad
3.	$x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$	konkretizácia 1
4.	$\neg(x^2 > 9)$	ekvivalentné s 2
5.	$\neg(x > 3)$	aplikácia modus tollens na 3 a 4
6.	$x \le 3$	ekvivalentné s 5

Záver je korektný

(d) Ak x je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x > 2$, potom $x^2 > 4$. Nech $x \le 2$, potom $x^2 \le 4$.

$$\begin{array}{|l} \forall(y \in R)(y > 2 \Rightarrow y^2 > 4) \\ x \le 2 \\ \hline x^2 \le 4 \end{array}$$

1.	$\forall(y \in R)(y > 2 \Rightarrow y^2 > 4)$	predpoklad
2.	$x \le 2$	predpoklad
3.	$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$	konkretizácia 1
4.	$\neg(x > 2)$	ekvivalentný prepis 2
5.	$x^2 > 4$	použitie chybného pravidla „popretie predpokladu“
6.	$\neg(x^2 \le 4)$	ekvivalentný prepis 5

Záver je nekorektný

Cvičenie 1.7. Určite, či uvedené výroky sú korektné, ak nie, prečo?

(a) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Preto, ak x je iracionálne, potom x^2 je iracionálne.

$$\left(ir\left(x^2\right) \Rightarrow ir(x)\right) \Rightarrow \left(ir(x) \Rightarrow ir\left(x^2\right)\right)$$

výrok je nekorektný, pri inverzii implikácie musia byť negované jej zložky. Korektný výrok má tvar

$$\left(ir\left(x^2\right) \Rightarrow ir(x)\right) \Rightarrow \left(r(x) \Rightarrow r\left(x^2\right)\right)$$

(b) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Číslo $x = \pi^2$ je iracionálne. Preto, číslo $x = \pi$ je iracionálne.

$$\begin{array}{|l} \forall x\left(ir\left(x^2\right) \Rightarrow ir(x)\right) \\ ir\left(\pi^2\right) \\ \hline ir(\pi) \end{array}$$

1.	$\forall y\left(ir\left(y^2\right)\Rightarrow ir\left(y\right)\right)$	predpoklad
2.	$ir\left(\pi^2\right)$	predpoklad
3.	$ir\left(\pi^2\right)\Rightarrow ir\left(\pi\right)$	konkretizácia 1 pre $y=\pi^2$
4.	$ir\left(\pi\right)$	aplikácia modus ponens pre 2 a 3

výrok je korektný

Cvičenie 1.8. Prečo tieto výroky sú nekorektné?

(a) Nech $H(x)$ je predikát s významom „x je štastný“. Nech platí $\exists x\, H\left(x\right)$. Preto, Eva je šťastná.

$$\frac{\exists x\, H\left(x\right)}{H(Eva)}$$

Táto konkretizácia existenčného kvantifikátora nie je korektná, z existencie niekoho, kto je šťastný, nemusí vyplývať, že Eva je šťastná (napr. Zuza je šťastná)

(b) Nech $S(x,y)$ je predikát s významom „x je menší ako y“. Nech platí implikácia $\exists s\, S\left(s,Max\right)\Rightarrow S\left(Max,Max\right)$. Potom, použitím schémy zovšeobecnenia pomocou existenčného kvantifikátora (zákon predikátovej logiky $A\left(c\right)\Rightarrow\exists x\, A\left(x\right)$), dostaneme, že platí $\exists x\, S\left(x,x\right)$, t. j. niekto je kratší ako on sám.

Nekorektná je implikácia predpokladu $\exists s\, S\left(s,Max\right)\Rightarrow S\left(Max,Max\right)$, ľavá strana je pravdivá, zatiaľ čo, pravá strana je nepravdivá, čiže celá implikácia je nepravdivá.

Cvičenie 1.9. Dokážte, keď sa dajú dokázať, tieto výroky:

(a) Dokážte výrok $P(0)$, kde $P(n)$ je výrok „ak n je kladné celé číslo väčšie ako 1, potom $n^2>n$. Ktorú schému usudzovania sme použili?
Výrok P(0) nie je definovaný.

(b) Dokáže výrok $P(1)$, kde $P(n)$ je výrok „Ak n je kladné celé číslo, potom $n^2>n$. Ktorú schému usudzovania sme použili?
Výrok P(1) je nepravdivý ($1^2>1$)

(c) Nech $P(n)$ je výrok „ak a a b sú kladné reálne čísla, potom $\left(a+b\right)^n\geq a^n+b^n$“. Dokážte, že P(1) je pravdivý výrok. Akú schému usudzovanie sme použili?
P(1) je pravdivý výrok, $\left(a+b\right)^1\geq a^1+b^1$, priamy dôkaz

(d) Dokážte, že kvadrát párneho čísla je párne číslo použitím priameho dôkazu.
Priamy dôkaz: $pc(i) \Rightarrow pc(i^2), (2k)^2 = 2(2k^2)$

(e) Dokážte, že ak *n* je celé číslo a n^3+5 je nepárne číslo, potom *n* je párne číslo použitím nepriameho dôkazu.
Máme dokázať implikáciu $np(n^3+5) \Rightarrow p(n)$, inverziou tejto implikácie dostaneme $np(n) \Rightarrow p(n^3+5)$. Nech $n = 2k+1$, potom $n^3 = (2k+1)^3 = 2(4k^3+6k^2+3k)+1$, potom $n^3+5 = 2(4k^3+6k^2+3k+3)$.

(f) Dokážte, že suma dvoch nepárnych čísel je párne číslo.
$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow p(a+b)$. Ak $a = 2k+1$ a $b = 2l+1$, potom $a+b = 2(k+l+1)$.

(g) Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.
$np(a) \wedge np(b) \Rightarrow np(a \cdot b)$. Ak $a = 2k+1$ a $b = 2l+1$, potom $a \cdot b = 2(2kl+k+l)+1$.

(h) Dokážte, že ak *x* je iracionálne nenulové číslo, potom $1/x$ je iracionálne číslo.
$ir(x) \Rightarrow ir(1/x)$, inverziou tejto implikácie dostaneme $r(1/x) \Rightarrow r(x)$. Predpokladajme, že $1/x = \alpha/\beta$, kde α,β sú celé nesúdeliteľné čísla, potom aj $x = \beta/\alpha$, čiže *x* je rac. číslo

Cvičenie 1.10. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:
(a) $max\{x,y\} + min\{x,y\} = x+y$, kde *x*, *y* sú reálne čísla.

(1) $x \le y$, $\underbrace{max\{x,y\}}_{y} + \underbrace{min\{x,y\}}_{x} = x+y$

(2) $y < x$, $\underbrace{max\{x,y\}}_{x} + \underbrace{min\{x,y\}}_{y} = x+y$

(b) $min\{a, min\{b,c\}\} = min\{min\{a,b\}, c\}$

(1) $a < b < c$, $\underbrace{min\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a}, c\right\}}_{a}$

(2) $a < c < b$, $\underbrace{min\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{c}\right\}}_{a} = \underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{a}, c\right\}}_{a}$

(3) $b < a < c$, $\underbrace{min\left\{a, \underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\}}_{b} = \underbrace{min\left\{\underbrace{min\{a,b\}}_{b}, c\right\}}_{b}$

....

(c) Kvadráty celých čísel sú reprezentované dekadickými číslicami, ktoré končia 0, 1, 4, 5, 6, alebo 9.

(1) číslo $n=(\ldots 0)$, potom $n^2=(\ldots 0)$,

(2) číslo $n=(\ldots 1)$, potom $n^2=(\ldots 1)$,

(3) číslo $n=(\ldots 2)$, potom $n^2=(\ldots 4)$,

(4) číslo $n=(\ldots 3)$, potom $n^2=(\ldots 9)$,

(5) číslo $n=(\ldots 4)$, potom $n^2=(\ldots 6)$,

(6) číslo $n=(\ldots 5)$, potom $n^2=(\ldots 5)$,

(7) číslo $n=(\ldots 6)$, potom $n^2=(\ldots 6)$,

(8) číslo $n=(\ldots 7)$, potom $n^2=(\ldots 9)$,

(9) číslo $n=(\ldots 8)$, potom $n^2=(\ldots 4)$,

(10) číslo $n=(\ldots 9)$, potom $n^2=(\ldots 1)$.

(d) Štvrté mocniny celých čísel sú reprezentované dekadickými číslami, ktoré končia 0, 1, 5, alebo 6. Použijeme predchádzajúce výsledky, potom

(1) číslo $n^2=(\ldots 0)$, potom $n^4=(\ldots 0)$,

(2) číslo $n^2=(\ldots 1)$, potom $n^4=(\ldots 1)$,

(3) číslo $n^2=(\ldots 4)$, potom $n^4=(\ldots 6)$,

(4) číslo $n^2=(\ldots 5)$, potom $n^4=(\ldots 5)$,

(5) číslo $n^2=(\ldots 6)$, potom $n^4=(\ldots 6)$,

(6) číslo $n^2=(\ldots 9)$, potom $n^4=(\ldots 1)$.

Cvičenie 1.11. Dokážte tieto vlastnosti:

(a) Ak *n* je kladné celé číslo, potom *n* je párne vtedy a len vtedy, ak 7*n*+4 je párne.

(1) $p(n)\Rightarrow p(7n+4)$, $n=2k\Rightarrow 7n+4=14k+4=2(7k+2)$

(2) $p(7n+4)\Rightarrow p(n)$, $7n+4=2(7k+2)\Rightarrow n=2k$

(b) Ak *n* je kladné celé číslo, potom *n* je nepárne vtedy a len vtedy, ak 5*n*+6 je nepárne.

(1) $np(n)\Rightarrow np(5n+6)$, $n=2k+1\Rightarrow 5n+6=10k+11=2(5k+5)+1$,

(2) $np(5n+6)\Rightarrow np(n)$, $5n+6=2(5k+5)+1\Rightarrow n=2k+1$.

(c) $m^2=n^2$ platí vtedy a len vtedy, ak *m* = *n*, alebo *m* = -*n*.

(1) $(m=n)\vee(m=-n)\Rightarrow m^2=n^2$,

(2) $m^2=n^2\Rightarrow |m|=|n|\Rightarrow (m=n)\vee(m=-n)$.

(d) Dokážte, že tieto tri výroky sú ekvivalentné: (1) $a<b$, (2) priemer *a* a *b* je väčší ako *a*, $(a+b)/2>a$, (3) priemer *a* a *b* je menší ako *b*, $(a+b)/2<b$.

(1a) $(a<b) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a<\frac{1}{2}b \Leftrightarrow a-\frac{1}{2}a<\frac{1}{2}b \Leftrightarrow a<\frac{1}{2}(a+b)$

(1b) $a<b \Leftrightarrow \frac{1}{2}a<\frac{1}{2}b \Leftrightarrow \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b<b \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b)<b$

Cvičenie 1.12. Pomocou matematickej indukcie dokážte:
(a) Suma prvých n prirodzených čísel je

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Dokážte formulu

$$3+3\cdot 5+3\cdot 5^2+\ldots+3\cdot 5^n=\frac{1}{4}3\left(5^{n+1}-1\right)$$

(c) Nájdite formulu pre

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

(d) Dokážte formulu

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(e) Dokážte formulu

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(f) Dokážte formulu $n!<n^n$, pre $n>1$.
$P(n) = (n!<n^n)$, $P(2) = 2! < n^n$
$P(n+1)=(n+1)!<(\mathrm{n}+1)^{n+1} \Rightarrow (n)!(n+1)<(\mathrm{n}+1)^n(n+1)=P(n)$

(g) Dokážte formulu pre prvú deriváciu funkcie $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$

$P(n)=\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, $P(1)=\left(x^1\right)'=1$, $P(n+1)=\left(x^n x\right)'=\left(nx^{n-1}\right)x+x^n=(n+1)x^n$.

(h) Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové matice, ktoré komutujú, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, dokážte $\boldsymbol{AB}^n = \boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$.

(i) Dokážte zovšeobecnené distributívne formuly z výrokovej logiky

(a) $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee \ldots \vee (p_n \wedge q)$
$P(n) = (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee \ldots \vee (p_n \wedge q)$
$P(2) = (p_1 \vee p_2) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q)$ distribut. zákon
$P(n+1) = ((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \vee p_{n+1}) \wedge q \equiv \underbrace{((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \wedge q)}_{P(n)} \vee (p_{n+1} \wedge q)$

$$\equiv P(n) \vee (p_{n+1} \wedge q)$$

(b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee q \equiv (p_1 \vee q) \wedge (p_2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (p_n \vee q)$
Dôkaz sa vykoná analog. spôsobom.