Cvičenia

Cvičenie 2.1. Ktoré elementy patria do množiny:

(a) $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{R}\right)\wedge\left(x^2=1\right)\right\}$, $\{-1,1\}$

(b) $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{R}\right)\wedge\left(x^2-3x+2=0\right)\right\}$, $\{1,2\}$

(c) $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(x<12\right)\right\}$, (kde $\mathbb{N}$ je množina nezáporných celých čísel) ,
$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

(d) $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(x^2<100\right)\right\}$, $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(e) $\left\{x\,;\left(x\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(x^2=2\right)\right\}$, $\emptyset$

Cvičenie 2.2. Vyjadrite tieto množiny pomocou predikátu (pozri (2.1b)):

(a) $A=\{0,3,6,9,12\}$,
$A=\left\{x\in\mathbb{N};P(x)\right\}$, kde $P(x)=\exists(k\in\mathbb{N})\big((x=3k)\wedge(x\le 12)\big)$

(b) $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,
$A=\left\{x\in\mathbb{Z};P(x)\right\}$, kde $P(x)=\left(|x|\le 3\right)$, $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel.

(c) $A=\{m,n,o,p\}$
$A=\left\{x\in\mathcal{A};P(x)\right\}$, kde $P(x)=\exists(k\in\mathcal{A})\Big((x=k)\wedge\big((k=m)\vee(k=n)\vee(k=o)\vee(k=p)\big)\Big)$,
$\mathcal{A}=\{a,b,c,\ldots,x,y,z\}$.

Cvičenie 2.3. Zistite, či množiny z každej dvojice sú navzájom rovné:

(a) $A=\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$, $B=\{1,2,3,4\}$,
ak vynecháme v množine A elementy, ktoré sa opakujú, potom $A = B$.

(b) $A=\{\{1\}\}$, $B=\{1,\{1\}\}$,
Množina A má jeden element, množina B má dva elementy, čiže $A\neq B$.

(c) $A=\emptyset$, $B=\{\emptyset\}$,
Množina A je prázdna, množina B má jeden element, čiže $A\neq B$.

Cvičenie 2.4. Nech $A=\{2,4,6\}$, $B=\{2,6\}$, $C=\{4,6\}$, $D=\{4,6,8\}$. Zistite, ktoré množiny sú podmnožiny ktorých množín.
$B\subset A$, $C\subset A$, $C\subset D$.

Cvičenie 2.5. Pre každú množinu *A* určite, či platí $2\in A$:

(a) $A=\{x\in \mathbb{R}; x<2\}$;
$2\notin A$.

(b) $A=\{x\in \mathbb{R}; \exists(n\in \mathbb{N})(x=n^2)\}$
množina *A* obsahuje kvadráty celých čísel, pretože 2 nie je kvadrátom celého čísla, potom $2\notin A$.

(c) $A=\{2,\{2\}\}$;
$2\in A$

(d) $A=\{\{2\},\{\{2\}\}\}$,
$2\notin A$

(e) $A=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$
$2\notin A$

Cvičenie 2.6. Pre každý príklad z cvičenia 2.5 rozhodnite, či element {2} je elementom množiny *A*.

(a) $A=\{x\in \mathbb{R}; x<2\}$;
$\{2\}\notin A$.

(b) $A=\{x\in \mathbb{R}; \exists(n\in \mathbb{N})(x=n^2)\}$
množina *A* obsahuje kvadráty celých čísel, pretože 2 nie je kvadrátom celého čísla, potom $2\notin A$, a aj keby 2 patrilo do *A*, množina obsahujúca 2, teda $\{2\}$ určite do *A* nepatrí.

(c) $A=\{2,\{2\}\}$;
$\{2\}\in A$

(d) $A=\{\{2\},\{\{2\}\}\}$,
$\{2\}\in A$

(e) $A=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$
$\{2\}\in A$

Cvičenie 2.7. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

(a) $0 \in \emptyset$, nepravdivý

(b) $\emptyset \in \{0\}$, nepravdivý

(c) $\{0\} \subset \emptyset$, nepravdivý

(d) $\emptyset \subset \{0\}$, pravdivý

(e) $\{0\} \in \{0\}$, nepravdivý

(f) $\{0\} \subset \{0\}$, pravdivý (závisí od interpretácie symbolu $\subset$)

(g) $\{0\} \subseteq \{0\}$, pravdivý.

Cvičenie 2.8. Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, pravdivý,

(b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý,

(c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$, nepravdivý,

(d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, pravdivý,

(e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý,

(f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, pravdivý.

Cvičenie 2.9. Nech $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, dokážte $A \subseteq C$.
Priamy dôsledok zákona hypotetického sylogizmu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \equiv (\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x (x \in B \Rightarrow x \in C))$
$\Rightarrow \forall x ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in C) \equiv (A \subseteq C)$

Cvičenie 2.10. Nájdite také dve množiny *A* a *B*, aby platilo
(a) $A \in B$: $B = \{A\}$, potom $A \in B$,
(b) $A \subseteq B$: $A = \{a\}, B = \{a, b\}$, potom $A \subseteq B$.

Cvičenie 2.11. Aká je mohutnosť týchto množín:

(a) $\{a\}$, 1,

(b) $\{\{a\}\}$, 1,

(c) $\{a,\{a\}\}$, 2,

(d) $\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$, 3.

Cvičenie 2.12. Aká je mohutnosť týchto množín:

(a) $\emptyset$, 0

(b) $\{\emptyset\}$, 1

(c) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, 2

(d) $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, 3.

Cvičenie 2.13. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre

(a) $A=\{a\}$, $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$,

(b) $A=\{a,b\}$, $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

(c) $A=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

Cvičenie 2.14. Dokážte alebo vyvráťte implikáciu $(\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B))\Rightarrow(A=B)$.

$$(\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B))\Rightarrow\underbrace{(\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B))}_{\equiv(A\subseteq B)}\wedge\underbrace{(\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A))}_{\equiv(B\subseteq A)}\equiv(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)\equiv(A=B)$$

kde bola použitá formula (2.21a).

Cvičenie 2.15. Určite, ktorá z množín nie je potenčná množina

(a) $\emptyset$, nie je potenčná množina, v tomto špeciálnom prípade potenčnou množinou je $\{\emptyset\}$,

(b) $\{\emptyset,\{a\}\}$, potenčná množina,

(c) $\{\emptyset,\{a\},\{\emptyset,a\}\}$, nie je potenčná množina, pretože táto množina má len tri elementy. K tomu, aby táto množina bola potenčnou množinou množiny $A=\{\emptyset,a\}$, jej ako element chýba množina $\{\emptyset\}$.

(d) $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, potenčná množina.

Cvičenie 2.16. Nech $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y\}$, zostrojte

(a) $A\times B$,
$A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

(b) $B\times A$.
$B\times A=\{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$

Cvičenie 2.17. Aký význam má karteziánsky súčin $A\times B$, kde A je množina prednášok, ktoré poskytuje Ústav aplikovanej informatiky a B je množina pedagógov Fakulty informatiky?
Usporiadaná dvojica $(x,\xi)\in A\times B$ sa interpretuje ako priradenie, ktorý predmet ÚAI prednáša ktorý pedagóg FI.

Cvičenie 2.18. Aký je význam karteziánskeho súčinu $A\times B\times C$, kde A je množina všetkých leteckých spoločností, B a C sú množiny letísk na svete.
Usporiadaná trojica $(a,\alpha,\hat{\beta})\in A\times B\times C$ sa interpretuje ako priradenie, že letecká spoločnosť a má letovú linku, ktorá štartuje v α a pristáva na $\hat{\beta}$.

Cvičenie 2.19. Nech A je množina študentov FIIT, ktorí sú z Bratislavy a B je množina študentov FIIT, ktorí jazdia na fakultu autom. Popíšte študentov, ktorí patria do množiny

(a) $A\cap B$, obsahuje študentov z Bratislavy, ktorí jazdia na fakultu autom,

(b) $A\cup B$, obsahuje študentov z Bratislavy alebo študentov, ktorí jazdia na fakultu autom,

(c) $A-B$, obsahuje študentov v Bratislavy, ktorý nejazdia na fakultu autom,

(d) $B-A$, obsahuje študentov, ktorí jazdia na fakultu autom a pritom nie sú z Bratislavy.

Cvičenie 2.20. Nech A je množina prvákov na našej fakulte a B je množina študentov navštevujúcich diskrétnu matematiku. Vyjadrite pomocou množín A a B tvrdenia:

(a) Množina prvákov, ktorí navštevujú prednášku z diskrétnej matematiky, $A\cap B$,

(b) Množina prvákov, ktorí nenavštevujú prednášku z diskrétnej matematiky $A\cap\overline{B}$,

(c) Množina študentov, ktorý sú buď prváci alebo navštevujú prednášku z diskrétnej matematiky, $A\cup B$

(d) Množina študentov, ktorí nie sú prváci alebo nenavštevujú prednášku z diskrétnej matematiky, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Cvičenie 2.21. Nech A a B sú množiny, dokážte

(a) $(A \cap B) \subseteq A$,

1.	$x \in A \cap B$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	dôsledok predpokladu
3.	$(x \in A)$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in A)$	deaktivácia predpokladu

(b) $(A \cap B) \subseteq B$,

1.	$x \in A \cap B$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	dôsledok predpokladu
3.	$(x \in B)$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \cap B) \Rightarrow (x \in B)$	deaktivácia predpokladu

(c) $A \subseteq (A \cup B)$,

1.	$(x \in A)$	predpoklad
2.	$(x \in A) \vee (x \in B)$	dôsledok 1
3.	$(x \in A) \Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$	deaktivácia predpokladu

(d) $B \subseteq (A \cup B)$,

1.	$(x \in B)$	predpoklad
2.	$(x \in B) \vee (x \in A)$	dôsledok 1
3.	$(x \in B) \Rightarrow ((x \in B) \vee (x \in A))$	deaktivácia predpokladu

(e) $A - B \subseteq A$,

1.	$x \in (A - B)$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \notin B)$	dôsledok 1
3.	$(x \in A)$	dôsledok 2
4.	$(x \in (A - B)) \Rightarrow (x \in A)$	deaktivácia predpokladu

(f) $A \cap (B - A) = \emptyset$.

1.	$x \in (A \cap (B - A))$	predpoklad
2.	$(x \in A) \wedge (x \in (B - A))$	dôsledok 1
3.	$x \in A$	dôsledok 2
4.	$x \in (B - A)$	dôsledok 2
5.	$x \in B$	dôsledok 4
6.	$x \notin A$	dôsledok 4
7.	$(x \in A) \wedge (x \notin A)$	dôsledok 3 a 6 (kontradikcia, potom $x \in \emptyset$)

Cvičenie 2.22. Nech *A*, *B* a *C* sú množiny, dokážte $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

1.	$x \in ((A - C) - (B - C))$	predpoklad
2.	$(x \in (A - C)) \wedge (x \notin (B - C))$	dôsledok 1
3.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in (B - C))$	dôsledok 2
4.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)$	dôsledok 3
5.	$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$	dôsledok 4
6.	$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee \underbrace{\left(x \in A \wedge \underbrace{x \notin C \wedge x \in C}_{0}\right)}_{0}$	distribut. zákon na 5
7.	$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B)$	dôsledok 6
8.	$x \in ((A - B) - C)$	dôsledok 7

Cvičenie 2.23. Čo môžeme povedať o množinách *A* a *B*, ak platí

(a) $A \cup B = A$, platí ak $B \subseteq A$

(b) $A \cap B = A$, platí ak $A \subseteq B$

(c) $A - B = A$, $A \cap B = \emptyset$

(d) $A \cap B = B \cap A$, platí pre každé množiny *A* a *B*

(e) $A - B = B - A$, platí ak *A* = *B*.

Cvičenie 2.24. Nech *A*, *B* a *C* sú množiny, zistite, či sú pravdivé implikácie:

(a) $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$, neplatí
$A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{1,2,3\}$, potom $A \cup C = B \cup C = \{1,2,3\}$, avšak $A \neq B$

(b) $(A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$, neplatí
$A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{2\}$, potom $A \cap C = B \cap C = \{2\}$, avšak $A \neq B$

Cvičenie 2.25. Nech *A* a *B* sú množiny, dokážte vlastnosť $(A \subseteq B) \Rightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$.
$A \subseteq B =_{def} \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \forall x (x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}) =_{def} \overline{B} \subseteq \overline{A}$
Pri dôkaze sme použili ekvivalenciu $(x \notin A) \equiv (x \in \overline{A})$.

Cvičenie 2.26. Nech $A_i = \{1,2,...,i\}$, pre *i*=1, 2, ..., *n*. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{1\}$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{1,2,...,n\}$

Cvičenie 2.27. Nech A_i je množina binárnych reťazcov, ktorých dĺžka nie je väčšia ako *i*, pre *i*=1, 2, ..., *n*. Nájdite

(a) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = A_1$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A_n$.

Cvičenie 2.28. Dokážte pomocou matematickej indukcie vzťahy
(a) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
Jednoducho sa dokáže pomocou De Morganovej vety, predpokladajme, že máme dokázať
$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2) \cup A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \overline{A_3} = (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cap \overline{A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
Tento jednoduchý postup sa ľahko zovšeobecní pre každé $n > 3$.

(b) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$
$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = \overline{(A_1 \cap A_2) \cap A_3} = \overline{(A_1 \cap A_2)} \cup \overline{A_3} = (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cup \overline{A_3} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$
Tento jednoduchý postup sa ľahko zovšeobecní pre každé $n > 3$.