

2. prednáška

Teória množín I

- množina
- operácie nad množinami
- množinová algebra
- mohutnosť a enumerácia
- karteziánsky súčin

Definícia množiny

- Konceptia množiny patrí medzi základné formálne prostriedky matematiky. Umožňuje formulovať prehľadným a jednotným spôsobom všetky oblasti matematiky prostredníctvom elementárnej štruktúry množiny a operáciami nad ňou.
- Teória množín vznikla koncom 19. storočia hlavne zásluhou nemeckého matematika Georga Cantora (1845 – 1918).

Elementárnym pojmom teórie množín je *element*, pod ktorým budeme rozumieť nejaký reálny alebo abstraktný objekt, pričom postulujeme, že objekty medzi sebou sú dobre odlišiteľné.

Definícia. *Množina je neusporiadaný súbor elementov.*

Poznámky k definícii:

- Ak sa nejaké dva elementy nachádzajú v tej istej množine, potom musia byť od seba *odlišiteľné*,
- v množine sa neopakuje výskyt dvoch rovnakých (neodlišiteľných) elementov
- v definícii množiny bol použitý elementárny pojem „*súbor*“, ktorý nebudeme bližšie špecifikovať

Element a *patrí* do množiny A označíme výrazom $a \in A$.

Tento výraz chápeme ako výrok, ktorý je pravdivý (nepravdivý), ak element a patrí (nepatrí, čo vyjadríme $a \notin A$) do množiny A .

$$a \in A = \begin{cases} 1 & (\textit{element } a \textit{ patrí do } A) \\ 0 & (\textit{element } a \textit{ nepatrí do } A) \end{cases}$$

$$a \notin A = \begin{cases} 1 & (\textit{element } a \textit{ nepatrí do } A) \\ 0 & (\textit{element } a \textit{ patrí do } A) \end{cases}$$

Špecifikácia množiny

Prvý spôsob špecifikácie množiny je založený na *vymenovaní* všetkých elementov, ktoré do nej patria

$$A = \{a, b, \dots, u\}$$

Tento spôsob je vhodný len na špecifikácie množín, ktoré obsahujú konečný počet elementov.

Príklad. je množina mojich detí, $A = \{Michal, Jana, Eva\}$

Druhý spôsob špecifikácie množiny využíva *predikát* $P(x)$, ktorý ak je pravdivý (nepravdivý), potom element x patrí (nepatrí) do množiny

$$A = \{x; P(x)\}$$

Príklad. Množina A obsahujúca párne celé čísla

$$A = \{n; n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$$

Charakteristické funkcie

Druhý spôsob špecifikácie množiny je pretransformovaný na koncepciu *charakteristických funkcií*. V tomto prístupe predikát $P(x)$ je určený takto

$$P(x) = (\mu_A(x) = 1)$$

alebo

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

Uvažujme *univerzum* U , nad ktorou sú definované všetky ostatné množiny.

Definícia. Množina A (vzhľadom k univerzu U) je pomocou charakteristickej funkcie vyjadrená takto

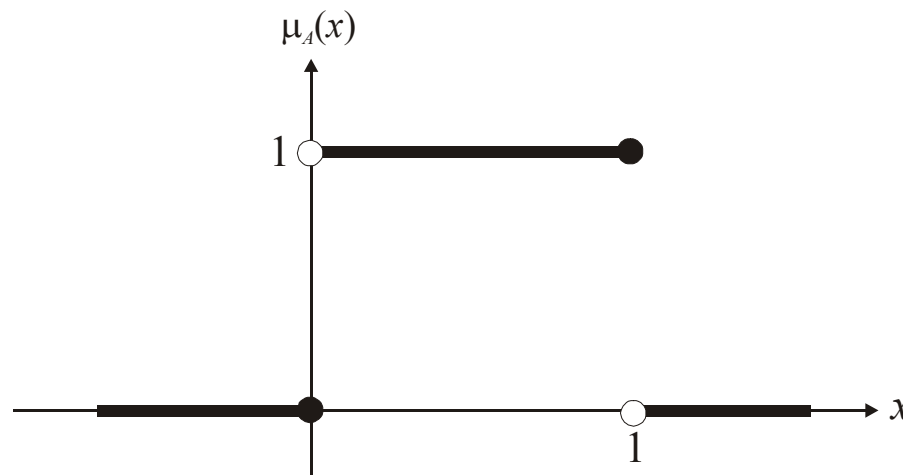
$$A = \{x \in U ; \mu_A(x) = 1\}$$

Príklad

Vyjadrite množinu $A = (0,1]$ pomocou charakteristickej funkcie.

Univerzum U je totožné s množinou reálnych čísel R . Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je definovaná takto

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } 0 < x \leq 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$



Operácie nad množinami

Definícia. Hovoríme, že množina $A = \{x; \mu_A(x) = 1\}$ sa *rovná* množine $B = \{x; \mu_B(x) = 1\}$, $A = B$, vtedy a len vtedy, ak charakteristické funkcie oboch množín sú rovnaké

$$(A = B) =_{def} \forall (x \in U) (\mu_A(x) = \mu_B(x))$$

Alternatívna definícia vzťahu rovnosti medzi množinami A a B je

$$\begin{aligned} (A = B) &=_{def} \forall (x \in U) ((x \in A) \equiv (x \in B)) \\ &=_{def} \forall (x \in U) ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) \end{aligned}$$

Definícia. Hovoríme, že množina $A = \{x; \mu_A(x) = 1\}$ je *podmnožinou* množiny $B = \{x; \mu_B(x) = 1\}$, $A \subseteq B$, vtedy a len vtedy, ak každý element z množiny A patrí aj do množiny B

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) \left((\mu_A(x) = 1) \Rightarrow (\mu_B(x) = 1) \right)$$

Alternatívna definícia podmnožiny je

$$A \subseteq B =_{def} \forall (x \in U) \left((x \in A) \Rightarrow (x \in B) \right)$$

V prípade, že $A \neq B$, potom formula $A \subseteq B$ sa prepíše do tvaru $A \subset B$. Hovoríme, že A je *vlastnou podmnožinou* B , ak $A \subset B$ a $A \neq \emptyset$. Rovnosť medzi množinami $A = B$ platí vtedy a len vtedy, ak $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Definícia. Hovoríme, že množina $A \cup B$ je *zjednotenie množín* A a B , vtedy a len vtedy, ak

$$A \cup B =_{def} \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cup B}(x) = 1\}$$
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Definícia. Hovoríme, že množina $A \cap B$ je *prienik množín* A a B , vtedy a len vtedy, ak

$$A \cap B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cap B}(x) = 1\}$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

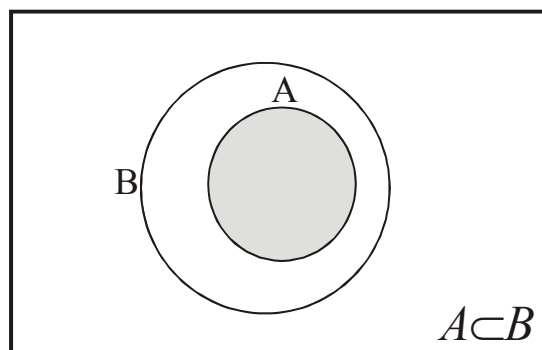
Definícia. Hovoríme, že množina \bar{A} je *doplnok* množiny A (vzhľadom k univerzu U), vtedy a len vtedy, ak

$$\bar{A} =_{def} \{x; x \notin A\} = \{x; \mu_{\bar{A}}(x) = 1\}$$
$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

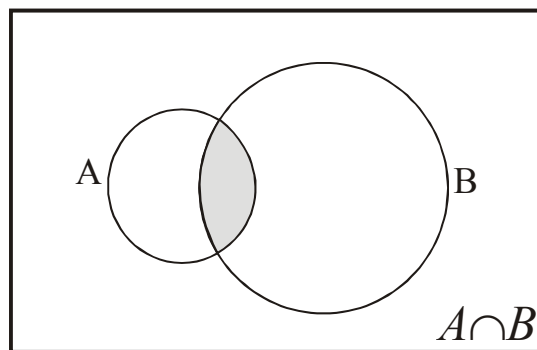
Definícia. Hovoríme, že množina $A - B$ (alebo $A \setminus B$) je *rozdiel množín* (*relatívny doplnok množín*) A a B , vtedy a len vtedy, ak

$$A - B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x; \mu_{A-B}(x) = 1\}$$
$$\mu_{A-B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

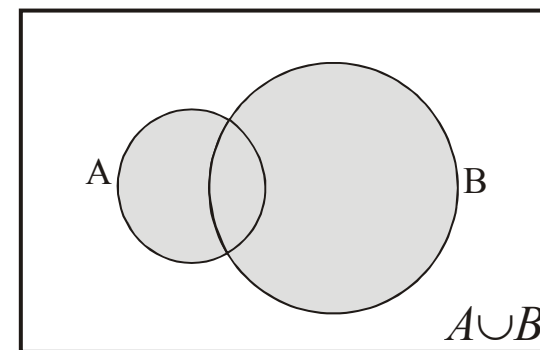
Vennove diagramy



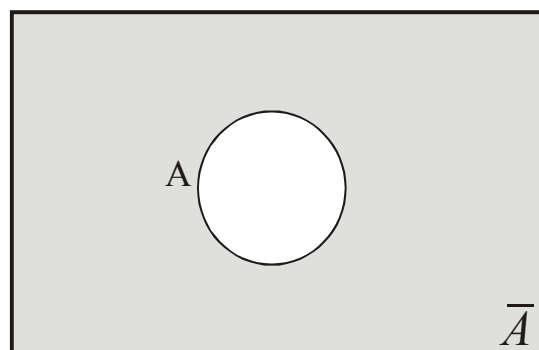
A



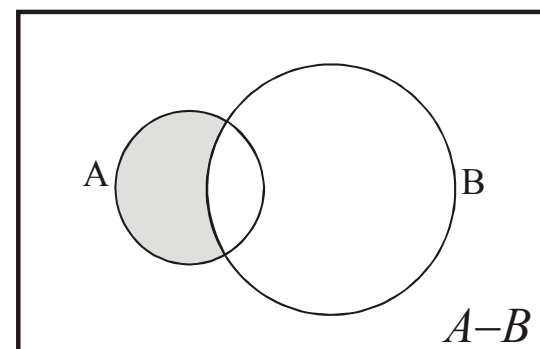
B



C



D

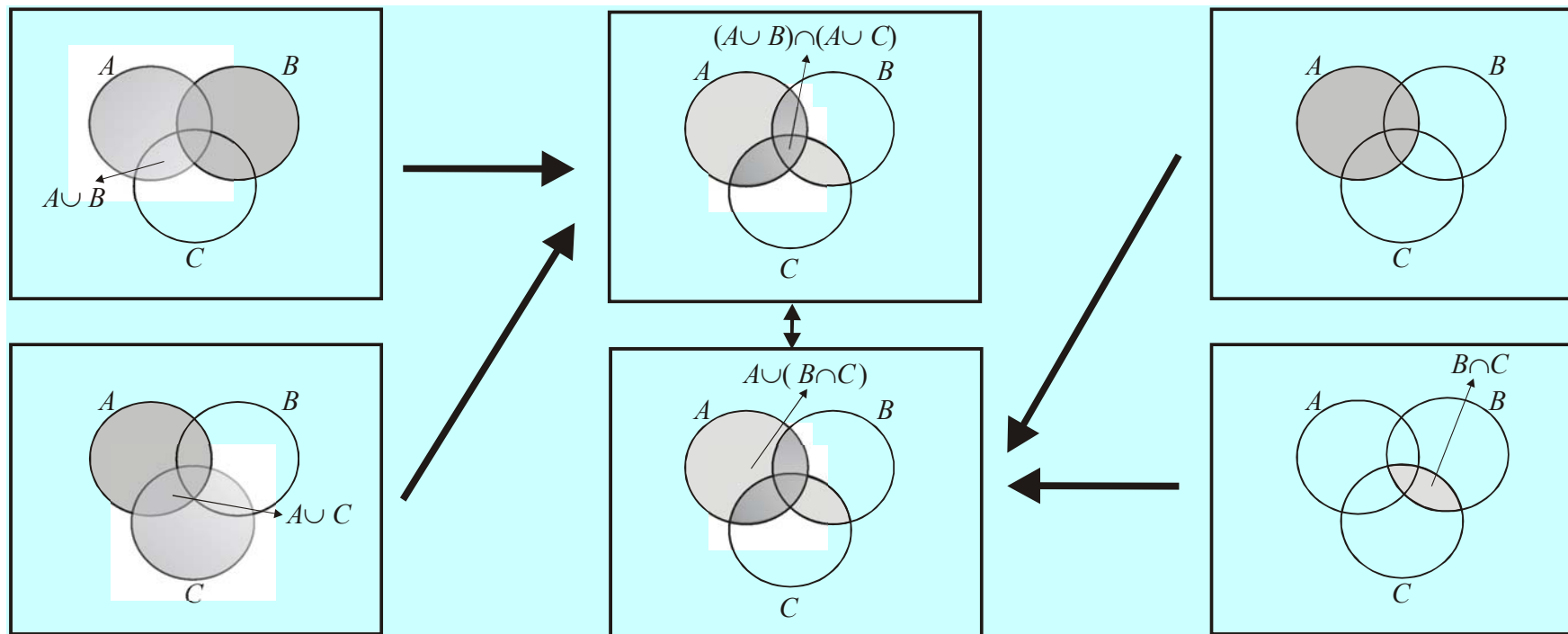


E

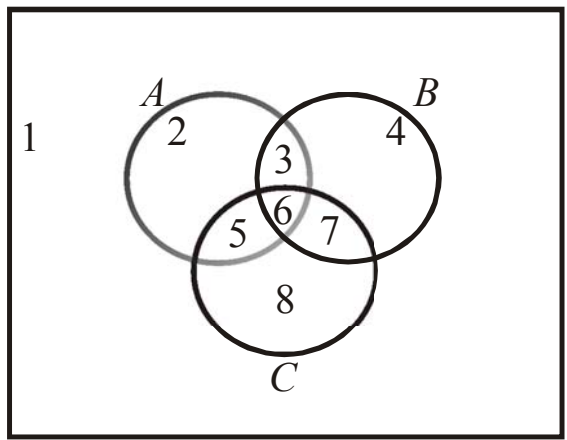
Algebra teórie množín

vlastnosť	formula teórie množín
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
idempotentnosť	$A \cap A = A, A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A, A \cup \emptyset = A$
absorpcia	$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U$
involúcia	$\overline{\bar{A}} = A,$
zákon vylúčenia tretieho	$A \cup \bar{A} = U$
zákon sporu	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
rozdiel množín	$A - B = A \cap \bar{B}$
distributívne zákony pre rozdiel	$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\bar{A} \cup C), A \cup (B - C) = (A \cup B) - (\bar{A} \cap C)$

Verifikácia korektnosti formuly $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Tabuľková metóda pre verifikáciu formúl teórie množín



A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

oblast'	A	B	C	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cap C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	1	0	1	0	0	0

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (\bar{A} \cup C)$$

oblast'	A	B	C	$B - C$	$A \cap B$	$\bar{A} \cup C$	$A \cap (B - C)$	$(A \cap B) - (\bar{A} \cup C)$
1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	0	1	0	0
6	1	1	1	0	1	1	0	0
7	0	1	1	0	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0	1	0	0

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \mathbf{a} \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

A	B	$A \cup B$	\bar{A}	\bar{B}	$A \cap B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B}$	$\bar{A} \cup \bar{B}$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Použitie charakteristických funkcií k dôkazu formúl v teórii množín

Dôkaz De Morganovej formuly $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - \mu_{A \cup B}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

Použitím algebraickej identity

$$1 - \max\{a, b\} = \min\{1 - a, 1 - b\}$$

dokážeme, že formule sú totožné pre ľubovoľné charakteristické funkcie, čiže platí

$$\forall (x \in U) (\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x))$$

Tým sme dokázali, že množiny $\overline{(A \cup B)}$ a $\bar{A} \cap \bar{B}$ sa navzájom rovnajú.

Dôkaz distributívneho zákona $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{B \cap C}(x)\} = \max\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\}$$

$$\begin{aligned}\mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)} &= \min\{\mu_{A \cup B}(x), \mu_{A \cup C}(x)\} \\ &= \min\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\}\end{aligned}$$

Použitím algebraickej identity

$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$$

dostaneme, že vyššie uvedené charakteristické funkcie sa rovnajú

$$\forall (x \in U) \left(\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) = \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)} \right)$$

Tým sme dokázali, že množiny $A \cup (B \cap C)$ a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ sa rovnajú

Definícia. Ak množina A je konečná (obsahuje konečný počet elementov), potom jej *mohutnosť* (*kardinalita*), označená $|A|$, je počet elementov, ktoré obsahuje.

Ak množina obsahuje nekonečný počet elementov, potom jej mohutnosť je nekonečná, $|A| = \infty$.

Príklad

- (a) $A = \{x; x \text{ je celé číslo ohraničené } 1/8 < x < 17/2\}$, $|A| = 8$,
- (b) $A = \{x; \sqrt{x} \text{ je celé číslo}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$, $|A| = \infty$,
- (c) $A = \{x; x^2 = 1 \text{ alebo } 2x^2 = 1\} = \{1, -1, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$, $|A| = 4$,
- (d) $A = \{a, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $|A| = 3$,
- (e) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, $|A| = 3$.
- (f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $|A - B| = 4$.

Enumerácia elementov v množinách

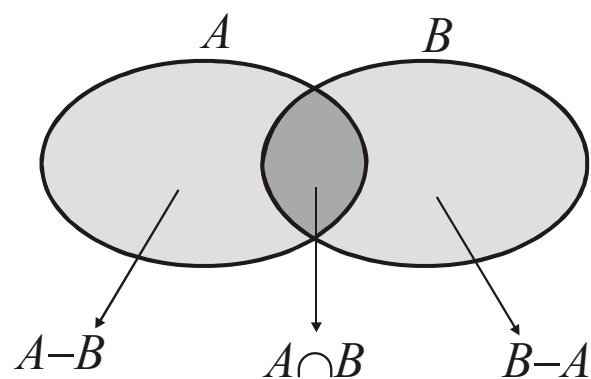
Jednoduchý príklad. Nech A a B sú disjunktné množiny ($A \cap B = \emptyset$), potom mohutnosť ich zjednotenia je určená súčtom mohutností jednotlivých množín

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Veta. Mohutnosť množiny $A \cup B$ je určená formulou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|$$

Mohutnosť samotných množín A a B je určená takto

$$|A| = |A - B| + |A \cap B|$$

$$|B| = |B - A| + |A \cap B|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Príklad

Dokážte formulu

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

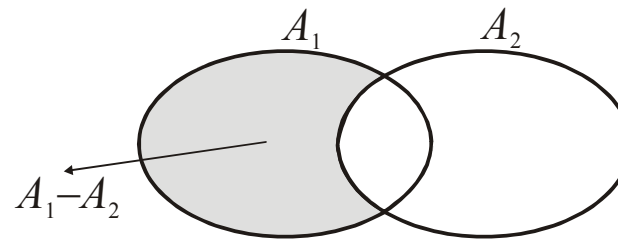
indukciou

$$\begin{aligned} |A \cup (B \cup C)| &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \underbrace{|A \cap A \cap B \cap C|}_A \end{aligned}$$

Príklad

Dokážte formulu

$$|A_1 - A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$$



Dokážte formulu

$$|A_1 \cup \bar{A}_2| = N - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup \bar{A}_2| = |A_1| + |\bar{A}_2| - |A_1 \cap \bar{A}_2| = |A_1| + (N - |A_2|) - \underbrace{|A_1 \cap (U - A_2)|}_{A_1 - A_1 \cap A_2}$$

$$= N + |A_1| - |A_2| - |A_1 - A_1 \cap A_2| = N + |A_1| - |A_2| - (|A_1| - |A_1 \cap A_2|)$$

$$= N - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

Príklad

Každý zo 100 študentov Fakulty informatiky UGBM študuje aspoň jeden z týchto odborov: matematika, informatika a ekonómia. Nech U je množina všetkých študentov FI UGBM, M je množina študentov matematiky, I je množina študentov informatiky a E je množina študentov ekonómie. Počty študentov sú určené tabuľkou:

študenti	symbol	počet
všetci	$ U $	100
matematika	$ M $	65
informatika	$ I $	45
ekonómia	$ E $	42
matematika a informatika	$ M \cap I $	20
matematika a ekonómia	$ M \cap E $	25
informatika a ekonómia	$ I \cap E $	15

(i) **Prvou úlohou** je zistiť, koľko študentov súčasne študuje tri odbory, $|M \cap I \cap E| = ?$

$$|U| = |M \cup I \cup E| = |M| + |I| + |E| - |M \cap I| - |M \cap E| - |I \cap E| + |M \cap I \cap E|$$

Táto formulu nám špecifikuje počet študentov, ktorí súčasne študujú matematiku, informatiku a ekonómiu

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + |M \cap I \cap E|$$

potom $|M \cap I \cap E| = 8$.

(ii) **Druhou úlohou** je zistiť, koľko študentov matematiku a informatiku, ale nie ekonómiu, $|M \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Mohutnosť množiny $M \cap I$ môžeme vyjadriť takto

$$|M \cap I| = |M \cap I \cap E| + |M \cap I \cap \bar{E}| \Rightarrow |M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I|$$

Použitím predchádzajúcich výsledkov dostaneme

$$|M \cap I \cap \bar{E}| = -|M \cap I \cap E| + |M \cap I| = 20 - 8 = 12$$

(iii) Poslednou *tret'ou úlohou* je zistiť, koľko študentov študuje len informatiku, ale nie matematiku a ekonómia, $|\bar{M} \cap I \cap \bar{E}| = ?$ Množinu I rozložíme na štyri disjunktné podmnožiny

$$|I| = |I \cap (M \cup \bar{M}) \cap (E \cup \bar{E})| = \\ |I \cap M \cap E| + |I \cap M \cap \bar{E}| + |I \cap \bar{M} \cap E| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

Platia tieto identity

$$|I \cap \bar{M} \cap E| = |I \cap E| - |I \cap M \cap E| \\ |I \cap M \cap \bar{E}| = |I \cap M| - |I \cap M \cap E|$$

Dosadením týchto výsledkov do predošlého vzťahu dostaneme

$$|I| = -|I \cap M \cap E| + |I \cap E| + |I \cap M| + |I \cap \bar{M} \cap \bar{E}|$$

alebo

$$|I \cap \bar{M} \cap \bar{E}| = |I| + |I \cap M \cap E| - |I \cap E| - |I \cap M| = 45 + 8 - 15 - 20 = 18$$

Upozornenie

- Pojem množina môže byť zovšeobecnený tak, že elementy množiny môžu byť taktiež množiny.
- Ak pristúpime na túto terminológiu, potom je korektný výrok
„množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“
- Russell poukázala na skutočnosť, že takto formulované výroky sú vnútorne rozporné (pokúste sa rozhodnúť, či táto množina obsahuje samu seba)
- Russell navrhol prekonať túto vnútornú kontradikčnosť intuitívnej teórie množín tak, že pojem množina sa môže používať len na *prvej* úrovni, t. j. keď elementami tejto množiny sú elementy, ktoré nemajú svoju štruktúru. Na *druhej úrovni* používal termín „rodina množín“, jej elementy sú množiny z prvej úrovni. Na ďalšej *tretej úrovni* môžeme hovoriť o triede množín, jej elementy sú rodiny množín z predchádzajúcej druhej úrovne.
- Výrok „množina, ktorá obsahuje všetky možné množiny“ je nekorektný, jeho správna forma je „rodina všetkých možných množín“.

Rodina množín

Nech $I = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina indexov, ktorá obsahuje prvých n kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre každý index $i \in I$ má definovanú množinu A_i , potom rodina množín je definovaná takto

$$\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

Pre rodinu množín \mathcal{A} môžeme definovať operáciu prieniku a zjednotenie jej množín

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x; \forall i (x \in A_i)\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x; \exists i (x \in A_i)\}$$

Príklad

$A_i = \{\text{množina obsahuje binárne reťazce, ktorých dĺžka nie je väčšia ako } i\}$

$$A_1 = \{0,1\}$$

$$A_2 = \{0,1,00,01,10,11\}$$

.....

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_1$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_n$$

Potenčná množina

Definícia. Množina $\mathcal{P}(A)$ sa nazýva potenčná množina vzhľadom k množine A vtedy a len vtedy, ak obsahuje všetky možné podmnožiny množiny A

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \text{ a } A \in \mathcal{P}(A)$$

Veta. Potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ spĺňa tieto vlastnosti

$$(A \subseteq B) \equiv (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

Príklad

$A = \emptyset$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$
$A = \{a\}$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$
$A = \{a, b\}$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$A = \{a, b, c\}$	$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Poznámka. Pri práci s potenčnými množinami musíme veľmi starostlivo rozlišovať medzi symbolmi \in a \subseteq . Ak $a \in A$, potom $\{a\} \subseteq A$ alebo $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Študujme množinu $A = \{1, 2, \{1\}\}$, potom potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{2, \{1\}\}, \{1, 2, \{1\}\}\}$$

Pripomínáme, že elementy 1 , $\{1\}$ a $\{\{1\}\}$ sú rôzne.

Veta. Mohutnosť *potenčnej množiny* $\mathcal{P}(A)$ je určená jednoduchým vzťahom

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Nech množina A obsahuje n elementov, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, každá podmnožina $A' \subseteq A$ môže byť určená pomocou binárneho vektora dĺžky n , ak v i -tej polohe tohto vektora je 1 (0), potom $a_i \in A'$ ($a_i \notin A'$). Každá podmnožina z potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$ je jednoznačne špecifikovaná binárnym vektorom dĺžky n . Pretože celkový počet rôznych binárnych vektorov dĺžky n je 2^n , toto číslo špecifikuje aj mohutnosť potenčnej množiny, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, kde $|A| = n$. Tento jednoduchý výsledok viedol niektorých autorov k tomu, že potenčnú množinu označili symbolom 2^A , jej mohutnosť sa rovná $2^{|A|}$.

Karteziánsky súčin množín

V mnohých matematických disciplínach alebo v ich aplikáciách vystupujú *usporiadané dvojice elementov*. Napríklad, komplexné číslo môže byť charakterizované, ako usporiadaná dvojica reálnych čísel, $z = (x,y)$, kde x (y) je reálna (komplexná) časť. Základná relácia pre usporiadané dvojice je rovnosť: $(x,y) = (x',y')$, ktorá platí vtedy a len vtedy, ak sú si rovné ich prvé a druhé časti, $x = x'$ a $y = y'$. Táto podmienka rovnosti platí aj pre komplexné čísla, ktoré sú si rovné vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti.

Definícia. Množina $X \times Y$ sa nazýva *kartéziánsky súčin* dvoch množín X a Y vtedy a len vtedy, ak

$$X \times Y = \{(x,y); x \in X \text{ a } y \in Y\}$$

Poznámky

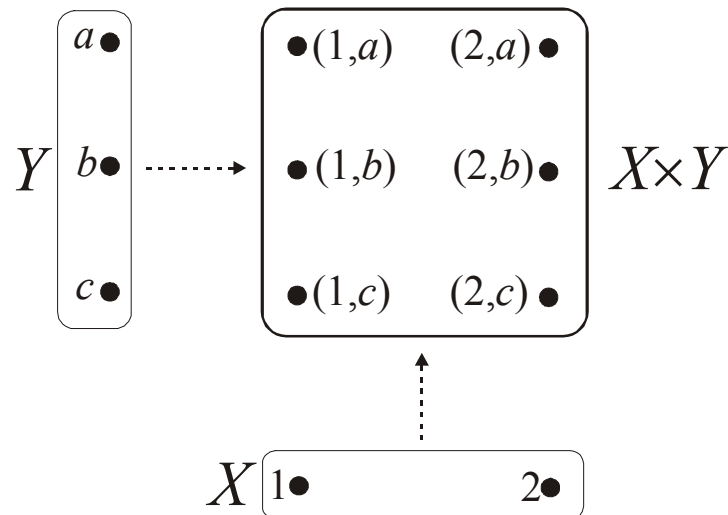
- V prípade, že $X = Y$, potom $X \times X = X^2$.
- Ak aspoň jedna z množín X alebo Y je prázdna množina, potom aj karteziánsky súčin $X \times Y$ je prázdny.
- Ak množiny X a Y sú obe neprázdné, potom $X \times Y = Y \times X$ vtedy a len vtedy, ak $X = Y$

Znázornenie kartézianského súčinu pomocou Vennových diagramov

Nech $X = \{1,2\}$ a $Y = \{a,b,c\}$, potom

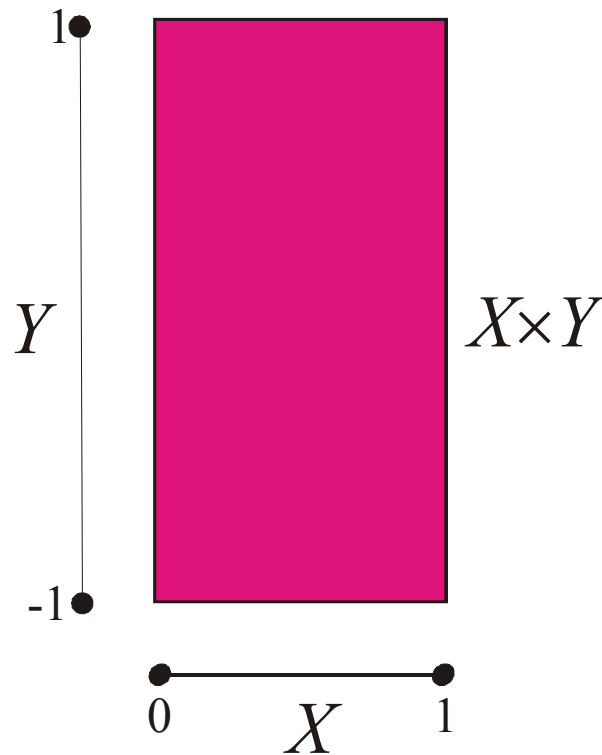
$$X \times Y = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

reprezentácia tohto súčinu pomocou Vennovho diagramu je znázornená



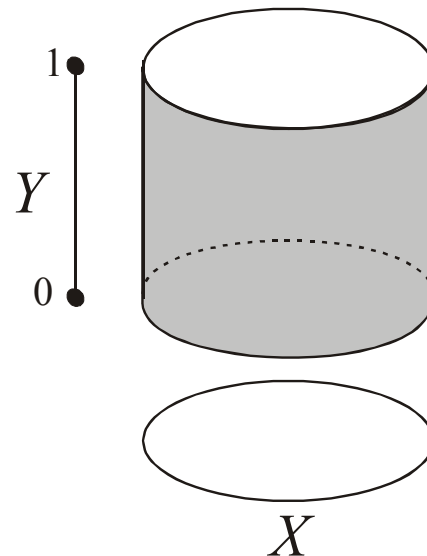
Príklad

Nech $X = [0,1]$ a $Y = [-1,1]$ sú uzavreté intervaly reálnych čísel, karteziánsky súčin týchto dvoch intervalov poskytuje obdĺžnikovú oblasť reálnych čísel



Príklad

Nech $X = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ je kružnica o polomere 1 so stredom v centre súradnicového systému a $Y = [0, 1]$ je jednotková úsečka, karteziánsky súčin týchto dvoch oblastí produkuje povrch valca dĺžky 1 a s polomerom 1



Koncepcia usporiadanej dvojice môže byť zovšeobecnená na usporiadanú n -ticu, pomocou karteziánskeho súčinu n množín.

$$\left((x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \right) \equiv \forall i (x_i = x'_i)$$

Definícia. Množina $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ sa nazýva karteziánsky súčin n množín X_1, X_2, \dots, X_n vtedy a len vtedy, ak

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n \right\}$$

Ak všetky množiny z karteziánskeho súčinu sa rovnajú množine X , potom výraz $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ je zjednodušený na X^n . Karteziánsky súčin môžeme taktiež vyjadriť symbolicky takto

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

Príklad

Nech $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ a $C = \{\alpha, \beta\}$, potom karteziánsky súčin týchto množín má tvar

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

Príklad

Nech $X_1 = X_2 = \dots = X_n = R$, kde R je množina reálnych čísel. Potom R^n je množina obsahujúca n -tice reálnych čísel

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

a môže byť interpretovaná ako ***n -rozmerný lineárny priestor***.

Veta. Mohutnosť karteziánskeho súčinu $X \times Y$ dvoch množín X a Y s konečnou mohutnosťou, $|X| = m$ a $|Y| = n$, sa rovná súčinu mohutností jej zložiek

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = m \cdot n$$

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

Veta. Karteziánsky súčin množiny A s prienikom alebo zjednotením dvoch množín X a Y vyhovuje podmienkam distributívnosti

$$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$$

$$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A)$$

$$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$$

$$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A)$$

Dôkaz vlastnosti $A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$

Nech $(a, x) \in A \times (X \cap Y)$, potom $a \in A$ a $x \in (X \cap Y)$. Z posledného výrazu vyplýva, že x sa súčasne vyskytuje v X a taktiež aj v Y . Potom $(a, x) \in A \times X$ a taktiež aj $(a, x) \in A \times Y$, čiže $(a, x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$, čo bolo potrebné dokázať.

Príklad

Nech $A = \{a, b\}$, $X = \{x, y\}$ a $Y = \{y, z\}$.

$$\begin{aligned} A \times (X \cap Y) &= \{a, b\} \times (\{x, y\} \cap \{y, z\}) = \{a, b\} \times \{y\} \\ &= \{(a, y), (b, y)\} \end{aligned}$$

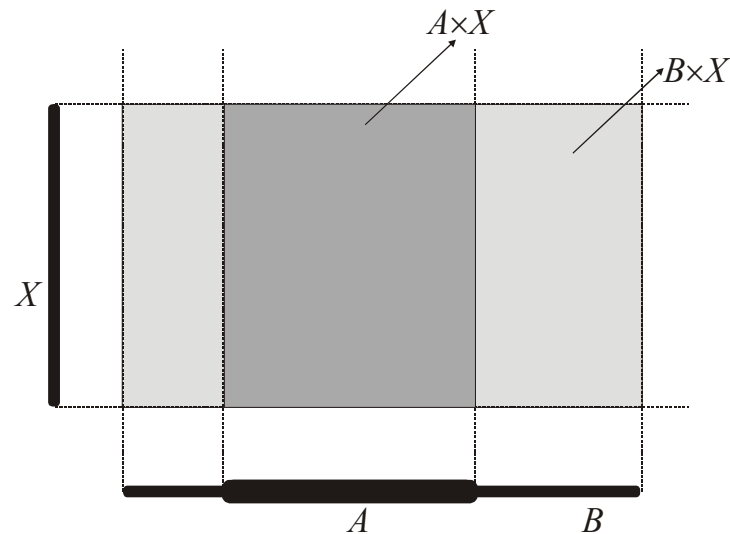
$$\begin{aligned} (A \times X) \cap (A \times Y) &= (\{a, b\} \times \{x, y\}) \cap (\{a, b\} \times \{y, z\}) \\ &= \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\} \cap \{(a, y), (a, z), (b, y), (b, z)\} \\ &= \{(a, y), (b, y)\} \end{aligned}$$

Veta. Pre ľubovoľné tri množiny A , B a X platí implikácia

$$(A \subseteq B) \Rightarrow ((A \times X) \subseteq (B \times X))$$

Ak X je neprázdna množina, potom

$$((A \times X) \subseteq (B \times X)) \Rightarrow (A \subseteq B)$$



Množina ako dátová štruktúra v informatike

- V mnohých aplikáciách množinová dátová štruktúra podstatne uľahčuje implementáciu algoritmov, ktoré sú založené na formalizme teórie množín. Ako príklad takýchto algoritmov môže slúžiť teória grafov, ktorej jednoduchá a súčasne aj elegantná teória je založená na množinách.
- Základný prístup k implementácii dátovej štruktúry množiny je jej charakteristická binárna funkcia, ktorá môže byť reprezentovaná binárnym vektorom. Maximálna dĺžka tohto vektora (napr. $2^8 = 256$) špecifikuje maximálnu mohutnosť implementovanej množiny.

Uvažujme binárne vektory dĺžky $2^3 = 8$, ktoré určujú množiny v rámci univerzálnej množiny $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Binárny vektor (11001100) špecifikuje množinu $A = \{1, 2, 5, 6\}$.

Ak binárny vektor obsahuje len nuly, potom množina $A = \emptyset$; ak binárny vektor obsahuje len jednotky, potom $A = U$.

Operácia zjednotenia množín A a B , $C = A \cup B$, ktoré sú reprezentované binárnymi vektormi

$$\mu_A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mu_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

je realizovaná pomocou binárnej operácie 'disjunkcie'

$$\mu_{A \cup B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \vee (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \max\{a_i, b_i\}$$

Operácia prieniku množín A a B , $C = A \cap B$, je realizovaná pomocou binárnej operácie 'konjunkcie'

$$\mu_{A \cap B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \min\{a_i, b_i\}$$

Operácia rozdielu množín A a B , $C = A - B$, je realizovaná pomocou binárnej operácie 'rozdielu'

$$\mu_{A-B} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) - (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

kde

$$c_i = \min\{a_i, 1 - b_i\}$$

Operácia komplementu množiny A , $C = \bar{A}$, je realizovaná pomocou binárnej operácie 'komplementu'

$$\mu_{\bar{A}} = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n)$$

Príklad

Definujme dva binárne vektory dĺžky 8 (t. j. univerzum $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$)

$$\mu_A = (11001111) \Leftrightarrow A = \{1,2,5,6,7,8\}$$

$$\mu_B = (00011001) \Leftrightarrow B = \{4,5,8\}$$

Zjednotenie $A \cup B$ je určené pomocou binárnej operácie 'disjunkcie'

$$(11001111) \vee (00011001) = (11011111)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{1,2,4,5,6,7,8\}$.

Prienik $A \cap B$ je určený pomocou binárnej operácie 'konjunkcie'

$$(11001111) \wedge (00011001) = (00001011)$$

Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{5,7,8\}$.

Rozdiel $A-B$ je určené pomocou binárnej operácie 'rozdiel'

$$(11001111) - (00011001) = (11000110)$$

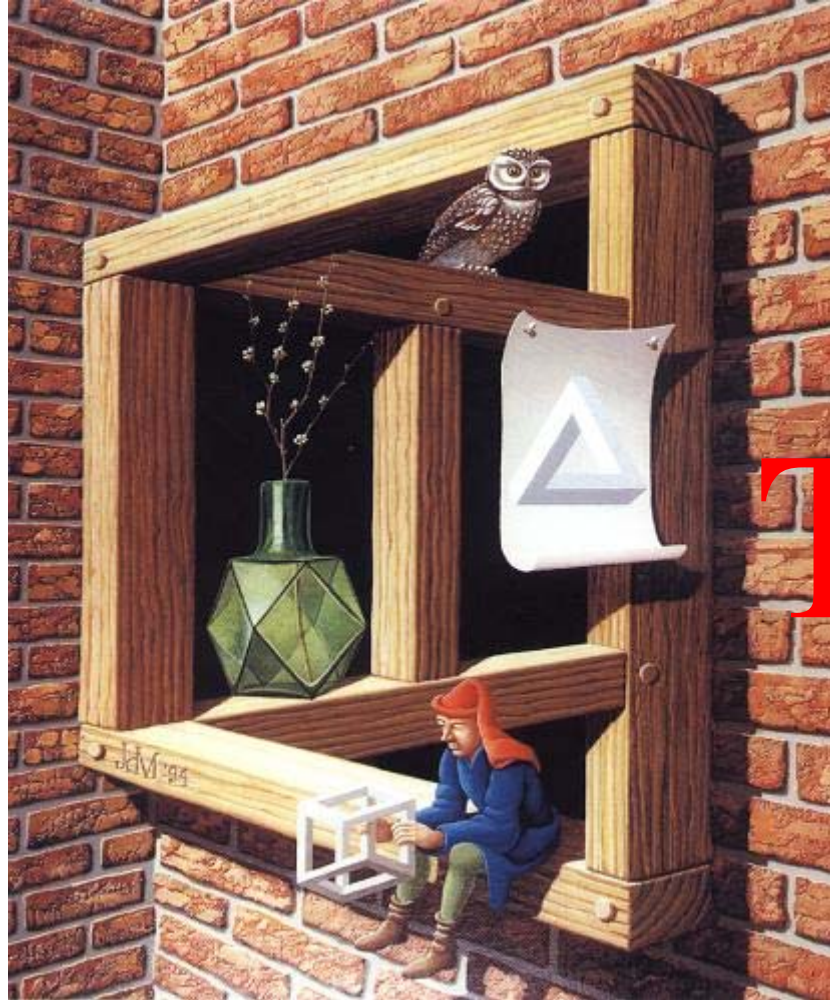
Výsledný vektor špecifikuje množinu $C = \{1,2,6,7\}$.

Komplementy \bar{A} a \bar{B} sú vykonané pomocou operácie negácie pre binárne vektory

$$\mu_{\bar{A}} = -(11001111) = (00110000)$$

$$\mu_{\bar{B}} = -(00011001) = (11100110)$$

Výsledné vektory reprezentujú množiny $C = \bar{A} = \{3,4\}$ a $C = \bar{B} = \{1,2,3,6,7\}$.



Jos de Mey (1927 - 2007)

The End