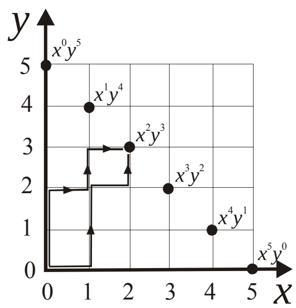
Cvičenia

Cvičenie 4.1. Nájdite rozvoj $(x+y)^5$ pomocou kombinatorických úvah, koľkými spôsobmi vznikajú súčiny $x^i y^j$ pri rozvoji $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$.
Nakreslíme si pomocný obrázok, ortogonálnu mriežku 5 x 5, na tejto mriežke sú vyznačené body ktoré sú interpretované ako súčiny $x^{5-i}y^i$. Každý takýto súčin je realizovaný v rozvoji $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$ toľkokrát, koľko existuje ciest z bodu (0,0) do bodu označenom $x^{5-i}y^i$.



Platí rozvoj

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}x^{5-i}y^i = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

Cvičenie 4.2. Nájdite koeficient x^8y^9 v rozvoji $(3x+2y)^{17}$.

$$(3x+2y)^{17} = \sum_{i=0}^{17}\binom{17}{i}(3x)^{17-i}(2y)^i = \ldots + \binom{17}{9}(3x)^8(2y)^9 + \ldots = \ldots + \binom{17}{9}3^8 2^9\left(x^8y^9\right) + \ldots$$

Potom, hľadaný koeficient stojací pri x^8y^9 má tvar

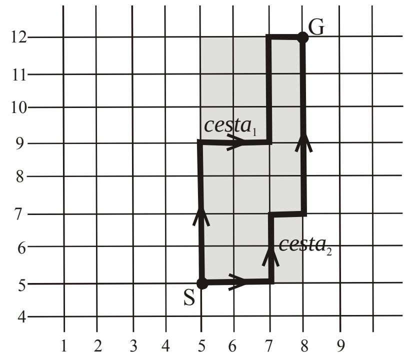
$$\binom{17}{9}3^8 2^9 = 81662929920$$

Cvičenie 4.3. Nech riadok v Pascalovom trojuholníku obsahuje binomické koeficienty $\binom{10}{k}$, pre $0 \le k \le 10$ má tieto členy: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. Použitím Pascalovej identity (4.5d) zostrojte nasledujúci riadok.

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

Cvičenie 4.4. John býva v New Yorku na Manhattane na rohu 5th Avenue a 5th Street. Akú minimálnu vzdialenosť prejde do práce ráno, ak jeho úrad sídli na rohu 8th Avenue a 12th Street? Koľko rôznych ciest má túto minimálnu vzdialenosť?
Minimálna vzdialenosť, ktorú John musí prejsť, je 10 blokov, $|8-5|+|12-5|=10$.



Použijeme identitu (4.4)

$$f_{ij} = \binom{i+j}{i}$$

ktorá špecifikuje počet ciest z bodu (0,0) do bodu (*i*,*j*), v našom prípade hľadaný počet ciest je

$$\binom{10}{3} = 120$$

Cvičenie 4.5. Dokážte platnosť identity $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k\text{-}1)!(n-k)!} = \frac{(n)!}{(k\text{-}1)!(n-k)!}\frac{k}{k} = k\frac{(n)!}{(k)!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

Cvičenie 4.6. Dokážte platnosť identity $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$.

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{k!(r-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-r)!(r-k)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

Cvičenie 4.7. Použitím identity (4.11a) spočítajte postupne binomický koeficient $\binom{15}{4}$, pričom výpočet je inicializovaný „počiatočnou hodnotou“ binomického koeficienta $\binom{15}{0} = 1$.

$$\binom{15}{0+1} = \frac{15-0}{0+1}\binom{15}{0} = 15 \cdot 1 = 15\,,$$

$$\binom{15}{1+1} = \frac{15-1}{1+1}\binom{15}{1} = \frac{14}{2} \cdot 15 = 105\,,$$

$$\binom{15}{2+1} = \frac{15-2}{2+1}\binom{15}{2} = \frac{13}{3}\cdot 105 = 455$$
$$\binom{15}{3+1} = \frac{15-3}{3+1}\binom{15}{3} = \frac{12}{4}\cdot 455 = 1365$$

Cvičenie 4.8. Postup výpočtu binomického koeficientu z cvičenia 4.7 zovšeobecnite do tvaru algoritmu špecifikovaného napr. v PseudoPascale pre výpočet binomického koeficientu $\binom{i}{j}$, kde $i \geq j \geq 0$. Diskutujte význam tohto algoritmu vzhľadom k algoritmu, ktorý počíta binomické koeficienty pomocou ich definície, $\binom{i}{j} = i!/\left(j!(i-j)!\right)$.

$$\binom{i}{j+1} = \frac{i-j}{j+1}\binom{i}{j} \Rightarrow \binom{i}{j} = \frac{i-j+1}{j}\binom{i}{j-1}$$

```
function Binomial_coefficient(i,j:integer):integer;
var sum,jj:integer;
begin sum:=1;
     for jj:=1 to j do sum:=(sum*(i-jj+1)) div jj;
     Binomial_coefficient:=sum;
end;
```

```
function Bcoeff(i,j:integer):integer;
begin if j=0 then Bcoeff:=1 else
     Bcoeff:=((i-j+1)*Bcoeff(i,j-1)) div j;
end;
```

Nie je vhodné k výpočtu binomických koeficientov používať priamo formulu $\binom{i}{j} = i!/\left(j!(i-j)!\right)$, pretože pre väčšie hodnoty argumentov *i* alebo *j* je potrebné poznať ich faktoriály, čo môže spôsobovať preplnenie aritmetickej jednotky počítača, ktorá pracuje len s konečnou presnosťou.

Cvičenie 4.9. V Pascalovom trojuholníku je pre *n*-tý riadok určená počiatočná časť členov, zostrojte nasledujúci člen tejto postupnosti: 1, 9, 36, 84.

$$\binom{i}{j} = \frac{i-j+1}{j}\binom{i}{j-1}$$

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = 9$, z tejto podmienky určíme aj *n*, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n\text{-}1)!1!} \Rightarrow n = 9$

$\binom{n}{2} = 36$, $\binom{n}{3} = 84$, $\binom{n}{4} = \frac{n-3}{4}84 = \frac{6}{4}84 = 126$

Cvičenie 4.10. Zostrojte koeficient člena $x^3y^2z^5$ z rozvoja $(x+y+z)^{10}$.
K riešeniu tohto problému použijeme multinomickú vetu pre n=3

$$(x+y+z)^{10} = \sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\geq 0 \\ (n_1+n_2+n_3=10)}} \frac{10!}{n_1!n_2!n_3!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$$

Potom koeficient pri súčine $x^3y^2z^5$ je určený zlomkom $\frac{10!}{3!2!5!} = 2520$

Cvičenie 4.11. Nech $A = \{a, b, c, d\}$, vytvorte

(a) všetky permutácie vzhľadom k tejto množine: 24 permutácií
(*abcd*), (*abdc*), (*acbd*), (*acdb*), (*adbc*), (*adcb*),
(*bacd*), (*badc*), (*bcad*), (*bcda*), (*bdac*), (*bdca*),
(*cabd*), (*cadb*), (*cbad*), (*cbda*), (*cdab*), (*cdba*),
(*dabc*), (*dacb*), (*dbac*), (*dbca*), (*dcab*), (*dcba*).

(b) všetky permutácie, ktoré končia znakom *a*,
(*bcda*), (*bdca*), (*cbda*), (*cdba*), (*dbca*), (*dcba*).

(c) všetky permutácie, ktoré majú znak *a* práve raz.
(*abcd*), (*abdc*), (*acbd*), (*acdb*), (*adbc*), (*adcb*),
(*bacd*), (*badc*), (*bcad*), (*bcda*), (*bdac*), (*bdca*),
(*cabd*), (*cadb*), (*cbad*), (*cbda*), (*cdab*), (*cdba*),
(*dabc*), (*dacb*), (*dbac*), (*dbca*), (*dcab*), (*dcba*).

Cvičenie 4.12. Aký je počet 5-permutácií nad množinou *A*, ktorá obsahuje 8 elementov, |A| = 8 ?

$$N(8,5) = \frac{8!}{(8\text{-}5)!} = \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6720$$

Cvičenie 4.13. Koľko možností existuje pre prvé tri pozície v konských dostihoch pre 12 koňov?

$$N(12,3) = \frac{12!}{(12\text{-}3)!} = \frac{12!}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$$

Cvičenie 4.14. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 10, ktoré

(a) obsahujú práve jednu jednotku, 10

(b) maximálne tri jednotky, $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$

(c) minimálne tri jednotky,

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=$$

$$120+210+252+210+120+45+10+1=968$$

$$2^{10}-\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}\right)=1024-1-10-45=968$$

(d) rovnaký počet jednotiek a núl.

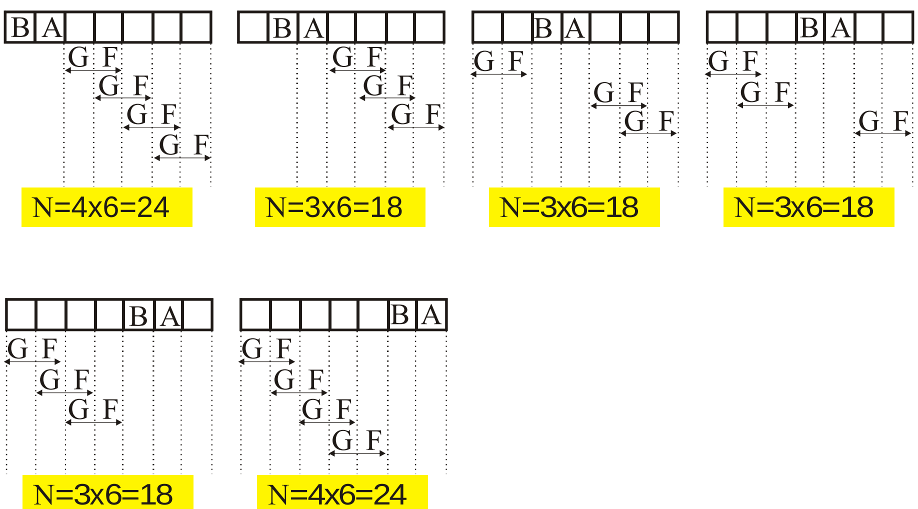
$$\binom{10}{5}=252$$

Cvičenie 4.15. Koľko existuje permutácií nad reťazcom ABCDEFG, ktoré

(a) obsahujú podreťazec BCD, $5!=120$

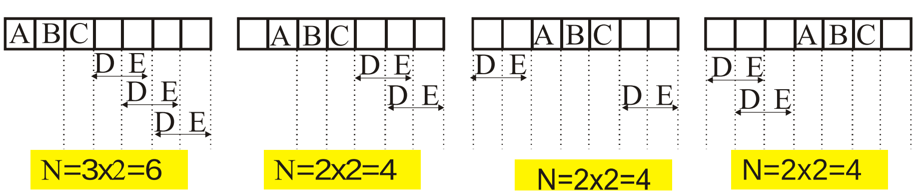
(b) obsahujú podreťazec CFGA, $4!=24$

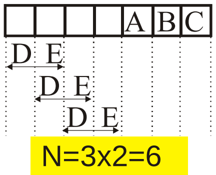
(c) obsahujú dva podreťazce BA a GF,



Celkový počet reťazcov je 2×24+4×18 = 120.

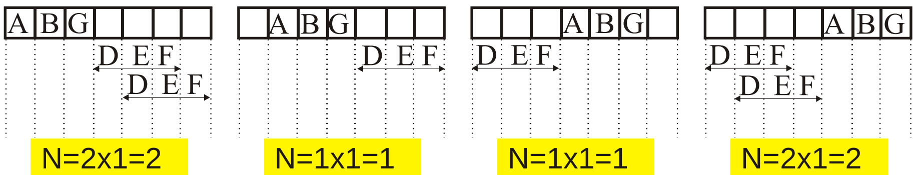
(d) obsahujú dva podreťazce ABC a DE,





Celkový počet reťazcov je 2×6+3×4 = 24.

(e) obsahujú dva podreťazce DEF a ABG.



Celkový počet reťazcov je 2×2+2×1 = 6.

Vo všetkých týchto prípadoch môžeme tak jednotlivé písmeno, ako aj podreťazec chápať ako jednotku, ktorej pozíciu presúvame, takže potom máme počet permutácií nezávislých „jednotiek“, čo je vždy faktoriál ich počtu. Napríklad u príkladu (d) môžeme namiesto podreťazca ABC nahradiť písmenom Y a namiesto DE dať písmeno Z, potom teda máme permutácie reťazca YZFG, teda permutáciu 4 prvkov, čo je 4!.

Cvičenie 4.16. Koľkými spôsobmi môžeme usporiadať 8 mužov a 5 žien tak, aby dve ženy nestáli vedľa seba?
Máme 7 pozícií medzi za sebou zoradenými mužmi, a 1 pozíciu pred prvým mužom a jednu pozíciu za posledným mužom, kde môžeme umiestniť ženy tak, aby nestáli vedľa inej ženy. Samozrejme predpokladáme, že mužov medzi sebou a ženy medzi sebou nerozlišujeme, inak by výsledok musel byť vynásobený ešte 8! a 5!.

$$\binom{9}{5}=126$$

Cvičenie 4.17. Na skúške z diskrétnej matematiky bolo nutné vyhodnotiť 40 jednoduchých otázok tak, že musia byť označené ako pravdivé alebo nepravdivé, pričom 17 otázok je nepravdivých. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu byť označené jednotlivé príklady za pravdivé a nepravdivé?

$$\frac{40!}{17!\,23!}=88732378800$$

Cvičenie 4.18. Na Ústave kognitívnej vedy našej fakulty je zamestnaných sedem žien a deväť mužov.
(a) Koľkými spôsobmi môžem vytvoriť štátnicovú komisiu, ktorá má šesť členov tak, aby mala rovnaký počet mužov a žien?

$$\binom{7}{3}\binom{9}{3}=2940$$

(b) Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť päťčlennú vedeckú radu ústavu, tak, aby obsahovala aspoň jedného muža a jednu ženu?

$$\binom{7}{1}\binom{9}{4}+\binom{7}{2}\binom{9}{3}+\binom{7}{3}\binom{9}{2}+\binom{7}{4}\binom{9}{1}=4221$$

Cvičenie 4.19. Anglická abeceda má 21 spoluhlások a 5 samohlások. Koľko reťazcov dĺžky 6 môžeme zostaviť nad touto abecedou tak, aby

(a) obsahovali práve jednu samohlásku? $5^1 \times 21^5 \times 6 = 122523030$

(b) obsahovali práve dve samohlásky? $5^2 \times 21^4 \times \binom{6}{2} = 72930375$

(c) obsahovali maximálne jednu samohlásku? $5^0 \times 21^6 + 5^1 \times 21^5 \times 6 = 208289151$

(d) obsahovali maximálne dve samohlásky? $5^0 \times 21^6 + 5^1 \times 21^5 \times 6 + 5^2 \times 21^4 \times \binom{6}{2} = 281219526$

Cvičenie 4.20. Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť postupnosť piatich znakov nad množinou, ktorá obsahuje tri elementy, ak opakovanie je povolené? $3^5 = 243$

Cvičenie 4.21. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať päť elementov do postupnosti z množiny obsahujúcich päť elementov, pričom opakovanie je povolené? $5^5 = 3125$

Cvičenie 4.22. Koľko reťazcov obsahujúcich šesť rôznych písmen môže byť vytvorených? Anglická abeceda obsahuje 26 písmen, potom reťazcov obsahujúci 6 znakov je $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 165765600$

Cvičenie 4.23. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 8 mincí z detskej sporiteľničky (prasiatka), ktorá obsahuje 100 jednokorunových mincí a 50 dvojkorunových mincí? (Mince sú inak nerozlíšiteľné a nezáleží na poradí výberu mincí, iba na sume ich hodnôt.)
$M_i = \left(i \times 1 + (8 - i) \times 2\right)$, pre i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, t.j. 9 rôznych spôsobov výberu mincí.