Cvičenia

Cvičenie 5.1. Pre každý uvedený prípad, rozhodnite, či symbol $x * y$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

Binárna operácia „súčin“ je definovaná podmienkou

$$\forall(x \in A)\forall(y \in A)\exists!(z \in A)(z = x * y)$$

(a) $x * y = x - y$, $A = \ _{+} = (0,\infty)$. Nie je binárna operácia, pretože pre $x, y \in A$ výsledok binárnej operácie $x * y \notin A$ (napr. pre *x* < y dostaneme záporné *z* = *x* – *y*), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do *A*.

(b) $x * y = x + y$, pre $A = \ = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Je binárna operácia . Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do *A*.

(c) $x * y = x^y$, $A = \ _{+} = (0,\infty)$. Je binárna operácia, $x * y = x^y \in A$

(d) $x * y =$ maximálny spoločný deliteľ x a y, $A = \{1,2,3,4,6,8,24\}$. Je binárna operácia, jej výsledok vždy patrí do *A*.

(e) $x * y = x + y$, $A = \{\text{matice rovnakého typu}\}$. Je binárna operácia, pre každé dve matice $x, y \in A$ je splnená podmienka, aby ich súčet $(x + y) \in A$.

Cvičenie 5.2. Nech binárna operácia na množine obsahujúcej reálne čísla, je definovaná ako rozdiel, $x * y = x - y$. Rozhodnite, či táto operácia je

(a) asociatívna, nie je asociatívna, $x - (y - z) \neq (x - y) - z$.

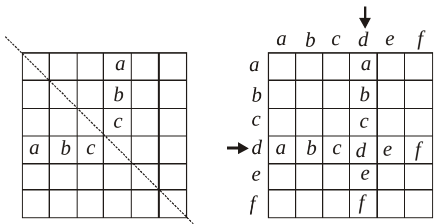
(a) komutatívna, nie komutatívna, $(x - y) \neq (y - x)$.

(b) existuje jednotkový element, neexistuje jednotkový element 1, pre ktorý by platilo $1 * x = x * 1 = x$, potom by v tomto konkrétnom príklade muselo platiť $1 - x = x - 1 = x$, čo nemôže byť splnené.

Cvičenie 5.3. Nech *A* je konečná množina a nech pre túto množinu *A* je binárna operácia definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky. Na základe čoho je možné rozhodnúť pomocou tejto tabuľky, či

(a) binárna operácia je komutatívna, potom multiplikačná tabuľka musí byť symetrická vzhľadom k diagonále tabuľky.

(b) existuje jednotkový element, potom existuje taký riadok a aj stĺpec s rovnakým indexom, že poradie ich elementov je totožné s indexovaním riadkov a stĺpcov.



symetrická matica — jednotkový element

Cvičenie 5.4. Nech $X = \ (A)$, kde $\ (A)$ je potenčná množina, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako prienik množín, $(\forall x, y \in \ (A))(x * y = x \cap y)$, rozhodnite, či

(a) binárna operácia je komutatívna, operácia prieniku je komutatívna, $x \cap y = y \cap x$

(b) čo je jednotkový element, jednotkový element vzhľadom k prieniku je univerzálna množina U,

(c) ktoré elementy majú inverzné elementy (ak existujú)? Inverzný element neexistuje. Ak by sme postulovali komplement $\overline{x}$ ako inverzný element vzhľadom k x, potom platí $x \cap \overline{x} = \overline{x} \cap x = \emptyset$, čo je však v kontradikcii s požiadavkou, aby platilo $x \cap \overline{x} = \overline{x} \cap x = U$ (pre inverzný prvok platí, že $x*x^{-1} = 1$, kde $1 \equiv U$).

Cvičenie 5.6. Nech $X = \ (A)$, binárna operácia nad touto množinou je definovaná ako symetrický rozdiel $(\forall x, y \in \ (A))(x * y = (x - y) \cup (y - x))$.

(a) Dokážte, že operácia $*$ je binárna operácia,

(b) Je táto operácia komutatívna?

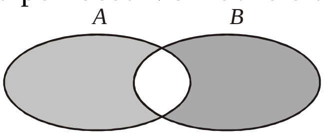
(c) Je táto operácia asociatívna?

(d) Existuje jednotkový element v množine X ?

(e) Ak existuje jednotkový element, existuje potom ku každému prvku $x \in \ (A)$ inverzný element $x^{-1} \in \ (A)$?

Riešenie:

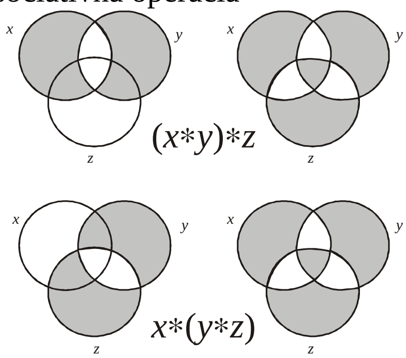
Interpretácia symetrického rozdielu pomocou Vennovho diagramu má tvar



(a) Symetrický rozdiel môže byť použitý ako binárna operácia nad $X = \ (A)$. Pre každé $x, y \in \ (A)$ platí, že $x * y \in \ (A)$.

(b) Symetrický rozdiel je komutatívna operácia, alternatívna definícia je $x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$.

(c) Symetrický rozdiel je asociatívna operácia



Cvičenie 5.7. Nech množina $X=\{a,b,c,d\}$, binárna operácia pre túto množinu je definovaná pomocou multiplikačnej tabuľky

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	a
c	c	a	b	d
d	d	a	b	c

(a) Je táto operácia asociatívna?
(b) Je táto operácia komutatívna?

Riešenie:
(a) Nie je asociatívna operácia, kontrapríklad:
$(c*b)*d=a*d=d$
$c*(b*d)=c*a=c$
(b) Nie je komutatívna operácia, $c*d\neq d*c$

Cvičenie 5.8. Nech množina X obsahuje štvorcové matice majúce dva stĺpce a dva riadky a elementy sú reálne čísla.
(a) Pre túto množinu definujme binárnu operáciu ako súčet dvoch matíc, $(\forall x,y\in X)(x*y=x+y)$. Prečo takto špecifikovaná algebraická štruktúra $(X,+)$ je grupa?
(b) Ak zameníme binárnu operáciu súčtu za súčin, ukážte takto špecifikovaná algebraická štruktúra nie je grupa.

Riešenie:
(a) Množina elementov X je definovaná ako množina štvorcových matíc typu (2,2), operácia ´$*$´ zachováva túto množinu a je asociatívna (súčet troch matíc je vždy asociatívna binárna operácia). Ako jednotkový element slúži matica, ktorá má nulové elementy

$$e=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

potom pre každú maticu $x\in X$ je splnená podmienka $x*e=e*x=x$. Pre každý element $x\in X$, ktorý je reprezentovaný maticou

$$x=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

existuje inverzný element $x^{-1}\in X$ reprezentovaný maticou

$$x^{-1}=\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}$$

pričom platí

$$x*x^{-1}=x^{-1}*x=e=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

To znamená, že binárna operácia je asociatívna, existuje jednotkový prvok a ku každému elementu existuje k nemu jediný inverzný element, čiže algebraická štruktúra $(X,+)$ je grupa.

(b) Binárna operácia ´$*$´ sa definuje ako súčin matíc, je aj potom algebraická štruktúra $(X,+)$ grupa? Táto operácia je asociatívna, existuje jednotkový prvok

$$e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Avšak nie pre každý prvok $x\in X$ existuje inverzný prvok. Existencia tohto inverzného prvku je viazaná s podmienkou regulárnosti matice

$$x=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

musí platiť

$$ad-bc\neq 0$$

Ak elementy matice x nespĺňajú túto podmienku, potom inverzný element (inverzná matica) $x^{-1}\in X$ neexistuje. Napríklad k elementu $x'\in X$, ktorý je reprezentovaný maticou

$$x'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

neexistuje inverzný element. Algebraická štruktúra $(X,+)$ nie je grupa.

Cvičenie 5.9. Nech X je neprázdna množina a binárna operácia definovaná vzťahom $x*y=x$, pre každé $x,y\in X$.

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X,*)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či táto algebraická štruktúra je monoid.

Riešenie:

(a) K tomu, aby algebraická štruktúra $(X,*)$ bola pologrupou, binárna operácia ´$*$´ musí byť asociatívna.

$$x*(y*z)=x*y=x$$

$$(x*y)*z=x*z=x$$

týmto sme dokázali asociatívnosť binárnej operácie, čiže algebraická štruktúra $(X,*)$ je pologrupa.

(b) Ak pologrupa $(X,*)$ má jednotkový element, potom je monoid. Nech $e\in X$ je hypotetický jednotkový element, potom z definície binárnej operácie vyplýva $x*e=x$ a $e*x=e$, to znamená, že nemôže existovať jednotkový element, ktorý by vyhovoval podmienke $x*e=e*x=x$. Algebraická štruktúra $(X,*)$ nie je monoid.

Cvičenie 5.10. Nech dve algebraické štruktúry $(X,*)$ a $(Y,\ )$ sú grupy. Definujte na karteziánskym súčinom $X\times Y$ binárnu operáciu takto

$$(x_1,y_1)\ (x_2,y_2)=(x_1*x_2,y_1\ \ y_2)$$

pre každé $x_1,x_2\in X$ a $y_1,y_2\in Y$.

(a) Ukážte, že   je binárna asociatívna operácia na $X\times Y$.
(b) Ako je definovaný jednotkový element na $X\times Y$?
(c) Ako je definovaný inverzný element $(x,y)^{-1}$?

(d) Dokážte, že algebraická štruktúra $(X \times Y, \ )$ je grupa.

Riešenie:

(a) Musíme dokázať, že ak $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, potom aj ich súčin $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2) \in X \times Y$. Táto vlastnosť priamo vyplýva z predpokladu, že algebraické štruktúry $(X, *)$ a $(Y, \ )$ sú grupy. Súčin ´·´ vyhovuje podmienke

$$(x_1, y_1)\ (x_2, y_2) = \Big(\underbrace{x_1 * x_2}_{\in X}, \underbrace{y_1 \ \ y_2}_{\in Y} \Big) \in X \times Y$$

Týmto sme dokázali, že súčin ´·´ definovaný nad karteziánskym súčinom $X \times Y$ zachováva túto množinu, čiže je binárna operácia.

Asociatívnosť tejto binárnej operácie dokážeme priamo z definície

$$\big((x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\big)\ (x_3, y_3) = (x_1 * x_2, y_1 \ \ y_2)\ (x_3, y_3)$$
$$= \big((x_1 * x_2) * x_3, (y_1 \ \ y_2) \ \ y_3\big)$$

Pretože algebraické štruktúry $(X, *)$ a $(Y, \ )$ sú grupy, potom binárne operácie $*$ a   sú asociatívne, čiže

$$\big((x_1 * x_2) * x_3, (y_1 \ \ y_2) \ \ y_3\big) = \big(x_1 * (x_2 * x_3), y_1 \ \ (y_2 \ \ y_3)\big)$$
$$= (x_1, y_1)\ \big((x_2, y_2)\ (x_3, y_3)\big)$$

čo bolo potrebné dokázať.

(b) Pretože algebraické štruktúry $(X, *)$ a $(Y, \ )$ sú grupy, potom množiny X a Y musia obsahovať jednotkové elementy $e_X \in X$ resp. $e_Y \in Y$, potom nad $X \times Y$ môžeme definovať jednotkový element $e = (e_X, e_Y) \in X \times Y$, ktorý vyhovuje dvom podmienkam

$$e\ (x, y) = (e_X, e_Y)\ (x, y) = \Big(\underbrace{e_X * x}_{x}, \underbrace{e_Y \ \ y}_{y} \Big) = (x, y)$$

$$(x, y)\ e = (x, y)\ (e_X, e_Y) = \Big(\underbrace{x * e_X}_{x}, \underbrace{y \ \ e_Y}_{y} \Big) = (x, y)$$

Dokázali sme, že v rámci karteziánskeho súčinu $X \times Y$ existuje jednotkový element.

(c) Inverzný element vzhľadom k $(x, y) \in X \times Y$ je definovaný vzťahom $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$, potom musí platiť

$$(x, y)\ (x, y)^{-1} = (x, y)\ (x^{-1}, y^{-1}) = \Big(\underbrace{x * x^{-1}}_{e_X}, \underbrace{y \ \ y^{-1}}_{e_y} \Big) = (e_X, e_Y) = e$$

$$(x, y)^{-1}\ (x, y) = (x^{-1}, y^{-1})\ (x, y) = \Big(\underbrace{x^{-1} * x}_{e_X}, \underbrace{y^{-1} \ \ y}_{e_y} \Big) = (e_X, e_Y) = e$$

Dokázali sme, že pre každý $(x, y) \in X \times Y$ existuje inverzný element $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1}) \in X \times Y$.

(d) Dôkazom vlastností (a), (b) a (c) sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X \times Y, \ )$ je grupa.

Cvičenie 5.11. Nech $(\quad ,*)$ je algebraická štruktúra, kde je množina obsahujúca nezáporné celé čísla. Binárna operácia je definovaná takto

$$x*y = max\{x,y\}$$

(a) Dokážte, že algebraická štruktúra $(\quad ,*)$ je pologrupa.

(b) Rozhodnite, či $(\quad ,*)$ je monoid.

Riešenie:

(a) K dôkazu, že algebraická štruktúra $(\quad ,*)$ je pologrupa musíme dokázať, že binárna operácia ´*´ je asociatívna. K dôkazu asociatívnosti binárnej operácie použijeme metódu vymenovania prípadov (pozri kapitolu 1.4)

(a1) $x < y < z$

$$(x*y)*z = y*z = z$$

$$x*(y*z) = x*z = z$$

(a2) $x < z < y$

$$(x*y)*z = y*z = y$$

$$x*(y*z) = x*y = y$$

(a3) $y < x < z$

$$(x*y)*z = x*z = z$$

$$x*(y*z) = x*z = z$$

....

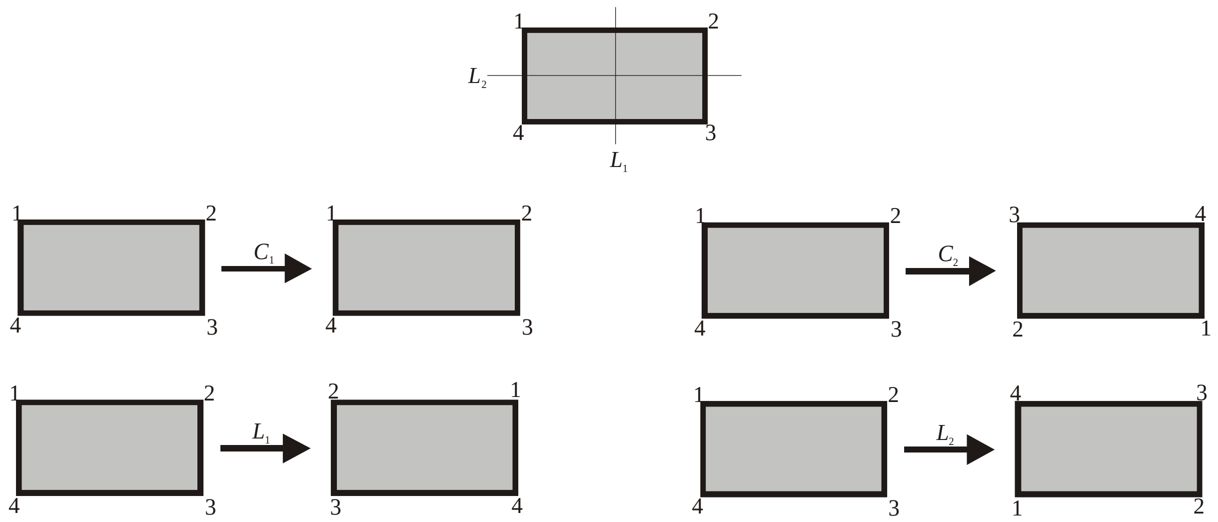
Vo všetkých 6 prípadoch sme dostali vždy rovnosť $(x*y)*z = x*(y*z)$, z čoho vyplýva, že binárna operácia je asociatívna, t. j. algebraická štruktúra $(\quad ,*)$ je pologrupa .

(b) K tomu, aby sme dokázali, že algebraická štruktúra $(\quad ,*)$ je monoid, stačí dokázať, že existuje jednotkový element $e = 0$, ktorý patrí do množiny

$$x*e = max\{x,0\} = x$$

$$e*x = max\{0,x\} = x$$

Cvičenie 5.12. Uvažujme neštvorcový obdĺžnik, ktorého vrcholy sú označené číslicami 1, 2, 3 a 4.



Tento obdĺžnik má štyri operácie symetrie

C_1 : rotácia o 0° stupňov okolo stredu obdĺžnika,
C_2 : rotácia o 180° stupňov okolo stredu obdĺžnika,
L_1 : reflexia priamkou L_1 a
L_2 : reflexia priamkou L_2.

Pre lepšie pochopenie týchto elementov symetrie budem špecifikovať ich aplikácie na postupnosť (1,2,3,4)

$$C_1(1,2,3,4)=(1,2,3,4)$$
$$C_2(1,2,3,4)=(3,4,1,2)$$
$$L_1(1,2,3,4)=(2,1,4,3)$$
$$L_2(1,2,3,4)=(4,3,2,1)$$

Pre takto definované elementy môžeme zostrojiť ich kompozíciu (binárnu operáciu), napríklad

$$C_2 * L_1(1,2,3,4)=C_2\left(L_1(1,2,3,4)\right)=C_2(2,1,4,3)=(4,3,2,1)=L_2$$

(a) Zostavte multiplikačnú tabuľku pre kompozíciu dvoch operácií symetrie.

(b) Dokážte, že algebraická štruktúra $\left(A=\{C_1,C_2,L_1,L_2\},*\right)$ je grupa.

Riešenie:

(a) Multiplikačná tabuľka má tvar

$*$	C_1	C_2	L_1	L_2
C_1	C_1	C_2	L_1	L_2
C_2	C_2	C_1	L_2	L_1
L_1	L_1	L_2	C_1	C_2
L_2	L_2	L_1	C_2	C_1

(b1) Binárna operácia $*$ je asociatívna. K dôkazu tejto vlastnosti by sme mali preskúmať 4^3 trojíc elementov z množiny $A=\{C_1,C_2,L_1,L_2\}$, či je splnená vlastnosť $(x*y)*z=x*(y*z)$. Iný postup k dôkazu tejto vlastnosti je, že elementy z množiny $A=\{C_1,C_2,L_1,L_2\}$ môžeme formálne interpretovať ako permutácie nad 4 objektmi. Ako bolo ukázané v kapitole 6.2,

súčin permutácií môže byť interpretovaný ako kompozícia 1-1-značných funkcií, ktorý je asociatívny.
(b2) V množine $A=\{C_1,C_2,L_1,L_2\}$ prvok $e=C_1$ môže byť interpretovaný ako jednotkový element, ktorý vyhovuje podmienke $\forall(x\in A)(e*x=x*e=x)$, splnenie tejto podmienky je jednoducho verifikované multiplikačnou tabuľkou, kde prvý riadok a prvý stĺpec je totožný s „indexovaním“ tabuľky.
(b3) Z tabuľky taktiež vyplýva, že ku každému $x\in A$ existuje práve jeden prvok $x^{-1}\in A$, ktorý vyhovuje podmienke $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$. Z multiplikačnej tabuľky vyplýva, že $\forall(x\in A)(x^{-1}=x)$.
Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(A=\{C_1,C_2,L_1,L_2\},*)$ je grupa.

Cvičenie 5.13. Nech $(X,*)$ je komutatívny monoid. Ukážte, že množina idempotentných elementov $X'=\{x;(x\in X)\wedge(x*x=x)\}$ tvorí algebraickú štruktúru $(X',*)$, ktorá je submonoid.

Riešenie: Je potrebné dodefinovať pojem „submonoid“ v duchu teórie grúp. Nech algebraická štruktúra $(X,*)$ je monoid, potom ak pre neprázdnu podmnožinu $X'\subseteq X$ algebraická štruktúra $(X',*)$ je taktiež monoid, hovoríme, že $(X',*)$ je submonoid, $(X',*)\subseteq(X,*)$.
(A1) Musíme dokázať, že podmnožina $X'=\{x;(x\in X)\wedge(x*x=x)\}$ je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$. Nech $x,y\in X'$, potom

$$x*y=(x*x)*(y*y)=(x*y)*(x*y)$$

potom aj $x*y\in X'$. Pri dôkaze tejto vlastnosti bola použitá komutatívnosť binárnej operácie.
(A2) Existencia jednotkového elementu v podmožine $X'=\{x;(x\in X)\wedge(x*x=x)\}$, ktorá obsahuje idempotentné elementy je zabezpečená tým, že jednotkový element $e\in X$ musí z definície byť idempotentný, $e*e=e$, čiže $e\in X'$.
Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X',*)$ je submonoid.

Cvičenie 5.14. Nech algebraická štruktúra $(X,*)$ je grupa. Stred tejto štruktúry je definovaný ako podmnožina X, ktorá obsahuje elementy komutujúce so všetkými elementami X, $X_{center}=\{x;(x\in X)\wedge(\forall y(x*y=y*x))\}$. Dokážte, že algebraická štruktúra $(X_{center},*)$ je podgrupa grupy $(X,*)$, $(X_{center},*)\subseteq(X,*)$.

Riešenie:
(A1) Musíme dokázať, že množina $X_{center}=\{x;(x\in X)\wedge(\forall y(x*y=y*x))\}$ je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$. Nech $u,v\in X_{center}$, potom pre každé $y\in X$ by malo platiť

$$(u*v)*y=y*(u*v)$$

Táto vlastnosť je priamym dôsledkom, že $u,v\in X_{center}$

$$(u*v)*y=u*(v*y)=u*(y*v)=(u*y)*v=(y*u)*v=y*(u*v)$$

Týmto sme dokázali, že $(u * v) \in X_{center}$, t. j. podmnožina X_{center} je uzavretá vzhľadom k binárnej operácii $*$.

(A2) Množina X_{center} obsahuje jednotkový element, pretože $\forall (x \in X)(e * x = x * e = x)$, čiže $e \in X_{center}$.

(A3) Pre každé $x \in X_{center}$ existuje $x^{-1} \in X_{center}$, že $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Dôkaz budeme robiť sporom. Predpokladajme, že $x^{-1} \notin X_{center}$ a teda existuje také $y \in X$, pre ktoré platí $x^{-1} * y \neq y * x^{-1}$. Aplikujme na túto nerovnicu x.

$x * (x^{-1} * y) \neq x * (y * x^{-1})$. Keďže ide o grupu, platí asociatívnosť, teda

$(x * x^{-1}) * y \neq x * (y * x^{-1})$

$e * y \neq x * (y * x^{-1})$

$y \neq x * (y * x^{-1})$

Keďže platí aj to, že x komutuje so všetkými prvky, môžeme ho presunúť

$y \neq (y * x^{-1}) * x$

$y \neq y * (x^{-1} * x)$

$y \neq y * e$

$y \neq y$

Týmto sme ukázali, že predpoklad viedol ku kontradikcii, a teda že $x^{-1} \in X_{center}$.

Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X_{centre}, *)$ je podgrupa.

Cvičenie 5.15. Nech X je množina, ktorá obsahuje matice $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde n je celé číslo.

(a) Ukážte, že algebraická štruktúra $(X, *)$, kde binárna operácia $*$ je priradená maticovému súčinu, je grupa.

(b) Dokážte, že zobrazenie $f : X \to$, kde je množina celých čísel, ktoré je definované

$$f\left[\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = n$$

je izomorfizmus medzi $(X, *)$ a $(\; , +)$.

Riešenie:

(a1) Množina X je uzavretá vzhľadom k maticovému súčinu

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X$$

(a2) Jednotkový element je matica

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a3) Pre každú maticu $x=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in X$ existuje inverzná matica $x^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in X$, ktorá vyhovuje podmienke $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$.
Týmto sme dokázali, že algebraická štruktúra $(X,*)$ je grupa.

(b1) Nech $x=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a $y=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, kde $x*y=\begin{pmatrix}1 & n+m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, potom

$$f(x*y)=m+n=f(x)+f(y)=m+n$$

Týmto sme dokázali základnú vlastnosť pre izomorfizmus, existenciu zobrazenia f, ktoré zachováva súčin elementov, $f(x*y)=f(x)+f(y)$. Týmto sme aj dokázali, že grupy $(X,*)$ a $(\;\; ,+)$ sú izomorfné.

Cvičenie 5.16. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou
(a) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$, x = **0**.
(b) $x+x=\mathbf{0}$, x = **0**.
(c) $x\cdot\mathbf{1}=x$, x = **1** alebo x = **0**
(d) $x+\bar{x}=\mathbf{1}$, x = **0** alebo x = **1**.
(e) $x\cdot\bar{x}=\mathbf{0}$, x = **0** alebo x = **1**.

Cvičenie 5.17. Zostrojte tabuľku funkčných hodnôt Boolovej funkcie

(a) $f(x,y,z)=\bar{x}y$

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x}y$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

(b) $f(x,y,z)=x+yz$,

x	y	z	yz	$x+yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

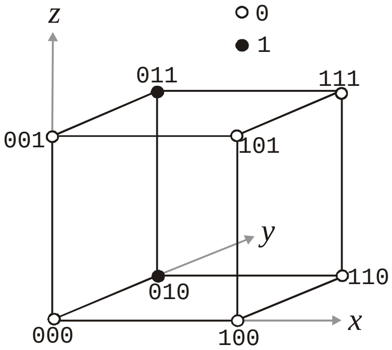
(c) $f(x,y,z)=x\bar{y}+\overline{xyz}$,

x	y	z	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	xyz	$\overline{xyz}$	$x\overline{y}+\overline{xyz}$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

Cvičenie 5.18. Znázornite Boolove funkcie $f(x,y,z)$ z cvičenia 7.2 na 3-rozmernej kocke tak, že hodnoty 1 (0) budú reprezentované na kocke čiernym (bielym) bodom.

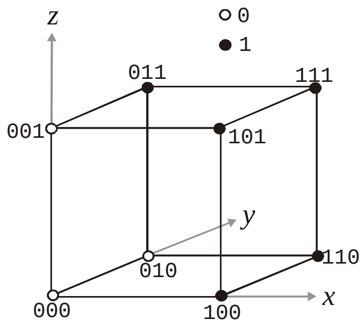
(a)

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{x}y$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0



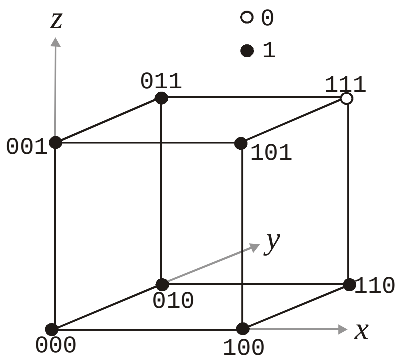
(b)

x	y	z	yz	$x+yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



(c)

x	y	z	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	xyz	$\overline{xyz}$	$x\overline{y}+\overline{xyz}$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0



Cvičenie 5.19. Pre ktoré hodnoty x a y platí $xy = x + y$?
$x = y = 1$ alebo $x = y = 0$,

Cvičenie 5.20. Zostrojte tabuľku všetkých možných binárnych Boolových funkcií a identifikujte v nej známe Boolove binárne operácie súčinu a súčtu. Vyjadrite ostatné binárne operácie pomocou súčtu, súčinu a komplementu.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
			$\cdot$					$\oplus$	$+$								

$f_1(x,y) = \mathbf{0} = x\overline{x}$	$f_2(x,y) = xy$	$f_3(x,y) = x\overline{y}$	$f_4(x,y) = x\overline{y} + xy$
$f_5(x,y) = \overline{x}y$	$f_6(x,y) = \overline{x}y + xy$	$f_7(x,y) = x\overline{y} + \overline{x}y$	$f_8(x,y) = x + y$
$f_9(x,y) = \overline{x}\,\overline{y}$	$f_{10}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + xy$	$f_{11}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y}$	$f_{12}(x,y) = x + \overline{y}$
$f_{13}(x,y) = \overline{x}$	$f_{14}(x,y) = \overline{x} + y$	$f_{15}(x,y) = \overline{x} + \overline{y}$	$f_{16}(x,y) = \mathbf{1} = x + \overline{x}$

Cvičenie 5.21. Niekedy je výhodné v Boolovej algebre definovať novú binárnu operáciu označenú symbolom ⊕, jej tabuľka funkčných hodnôt má tvar

$\oplus$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Poznamenajme, že vo výrokovej logike je podobná logická spojka označovaná „exkluzívna disjunkcia“ (XOR). Zjednodušte tieto výrazy

(a) $x \oplus \mathbf{0}$, $x \oplus \mathbf{0} = x$

(b) $x \oplus \mathbf{1}$, $x \oplus \mathbf{1} = \overline{x}$,

(c) $x \oplus x$, $x \oplus x = \mathbf{0}$,

(d) $x \oplus \overline{x}$, $x \oplus \overline{x} = \mathbf{1}$.

Cvičenie 5.22. Dokážte, že platia rovnosti

(a) $x \oplus y = (x + y)\left(\overline{xy}\right)$,

x	y	$x+y$	xy	$\overline{xy}$	$(x+y)\overline{xy}$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

(b) $x \oplus y = \overline{x}y + x\overline{y}$.

x	y	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y+x\bar{y}$	$x\oplus y$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Cvičenie 5.23. Zostrojte duálne výrazy k týmto Boolovym funkciam

(a) $x+y$, $f(x,y)=x+y \Rightarrow f_d(x,y)=xy$

(b) $\bar{x}\,\bar{y}$, $f(x,y)=\bar{x}\,\bar{y} \Rightarrow f_d(x,y)=\bar{x}+\bar{y}$

(c) $xyz+\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}\bar{y}\,\bar{z} \Rightarrow f_d(x,y,z)=(x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

Cvičenie 5.24. Dokážte, že duálny tvar $f_d(x_1,x_2,...,x_n)$ k Boolovej funkcii $f(x_1,x_2,...,x_n)$ vyhovuje podmienke $f_d(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f\,(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}$.

Dôkaz tohto vzťahu vykonáme indukciou vzhľadom k podformulám $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

(a) $f(x_1,x_2,...,x_n)=\Phi(x_1,x_2,...,x_n)+\Psi(x_1,x_2,...,x_n)$, duálny tvar tejto formuly je

$$\begin{aligned} f_d(x_1,x_2,...,x_n) &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)+\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}\cdot\overline{\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \Phi_d(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\Psi_d(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

(b) $f(x_1,x_2,...,x_n)=\Phi(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\Psi(x_1,x_2,...,x_n)$, duálny tvar tejto formuly je

$$\begin{aligned} f_d(x_1,x_2,...,x_n) &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)\cdot\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}+\overline{\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \Phi_d(x_1,x_2,...,x_n)+\Psi_d(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

Tento postup opakujeme tak dlho, až dosiahneme elementárne výrazy, ktoré obsahujú podformuly rovné premenným, kde konštrukciu duálnych formúl vykonáme jednoducho pomocou De Morganových vzťahov a negáciou konštánt

$$\overline{\bar{x}_i+\bar{x}_j}=x_i\cdot x_j,\ \overline{\bar{x}_i\cdot\bar{x}_j}=x_i+x_j,\ \bar{\mathbf{0}}=\mathbf{1}\ \text{ a }\ \bar{\mathbf{1}}=\mathbf{0}.$$

Týmto indukčným postupom sme dokázali formulu $f_d(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f\,(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}$.

Cvičenie 5.25. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným *x*, *y* a *z*, ktorá má hodnotu **1**vtedy a len vtedy, ak

(a) $x=y=\mathbf{0},z=\mathbf{1}$, $f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}\,z$.

(b) $x=\mathbf{0},y=\mathbf{1},z=\mathbf{0}$, $f(x,y,z)=\bar{x}\,y\,\bar{z}$.

(c) $y = z = \mathbf{1}$, $f\left(x,y,z\right) = x\,y\,z + \overline{x}\,y\,z = \left(\underbrace{x + \overline{x}}_{1}\right) yz = yz$.