

Algebraické štruktúry I

- algebraické štruktúry
- grupa
- základné vlastnosti grupy
- morfizmy
- Boolova algebra

Binárne operácie

Teória algebraických štruktúr študuje všeobecné vlastnosti systémov, ktoré obsahujú množinu (alebo množiny) elementov, nad ktorým je obvykle definovaná binárna operácia (alebo operácie).

Definícia. *Binárna operácia* na množine X je predpis (funkcia)

$$f : X \times X \rightarrow X$$

ktorá dvom elementom $x, y \in X$ jednoznačne priradí element

$$z = x * y = f(x, y) \in X$$

$$\forall x \forall y \exists ! z (z = x * y = f(x, y))$$

Definícia. Usporiadaná dvojica $(X, *)$ obsahujúca množinu X a binárnu operáciu $*$ nad touto množinou sa nazýva *algebraická štruktúra*.

Príklady

(1) Algebraická štruktúra $(\mathbb{Z}, +)$ obsahuje množina celých čísel \mathbb{Z} a binárnu operáciu súčet nad touto množinou. Podobným spôsobom môžeme definovať ďalšie dve algebraické štruktúry $(\mathbb{Z}, -)$ a (\mathbb{Z}, \times) , ktoré sú založené na binárnych operáciách rozdiel resp. súčin.

(2) Nech $X = \mathcal{P}(A)$ je potenčná množina pre množinu A . Operácia zjednotenia a prieniku priradí dvom podmnožinám z A nejakú podmnožinu z A

$$\cup: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\cap: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

Potom existujú dve jednoduché algebraické štruktúry (X, \cup) a (X, \cap) .

Multiplikačná tabuľka

Binárna operácia ' $*$ ' môže byť špecifikovaná pomocou multiplikačnej tabuľky (ktorá sa v anglosaskej literatúre nazýva Caleyho tabuľka). Napríklad pre $X = \{a, b, c, d\}$ táto tabuľka má tvar

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	c	a	b
c	c	b	a	a
d	d	b	c	a

Definícia.

(1) Binárna operácia $*$ sa nazýva **asociatívna** na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x, y, z \in X$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

(2) Binárna operácia $*$ sa nazýva **komutatívna** na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x, y \in X$

$$x * y = y * x$$

(3) Element $e \in X$ sa nazýva **jednotkový** vzhľadom k binárnej operácii $*$ na množine X vtedy a len vtedy, ak pre každé $x \in X$

$$x * e = e * x = x$$

(4) Element $y \in X$ sa nazýva **inverzný** vzhľadom k elementu $x \in X$ a k binárnej operácii $*$ na množine X vtedy a len vtedy, ak

$$y * x = x * y = e$$

Inverzný element y často značíme symbolom x^{-1} , aby sme zdôraznili je vzťah k elementu x .

Príklady

(1) Pre algebraickú štruktúru $(\mathbb{Z}, +)$ jednotkový element je nula, pre každé celé číslo $x \in \mathbb{Z}$ platí podmienka

$$0 + x = x + 0 = x$$

Pre dané celé číslo $x \in \mathbb{Z}$ existuje inverzný element $(-x) \in \mathbb{Z}$, ktorý spĺňa podmienku

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

(2) Pre algebraickú štruktúru (\mathbb{Z}, \times) jednotkový element je číslo jedna, pre každé celé číslo $x \in \mathbb{Z}$ platí

$$x \times 1 = 1 \times x = x$$

Môžeme si položiť otázku, či každý element $x \in \mathbb{Z}$ má inverzný element? Napríklad, položíme $x = 5$, potom inverzný element y vzhľadom k tomuto prvku je taký, čo vyhovuje podmienke

$$5 \times y = y \times 5 = 1$$

Táto podmienka nemá riešenie v množine celých čísel,

$\neg \exists (y \in \mathbb{Z})(5 \times y = y \times 5 = 1)$. Preto, v rámci algebraického systému (\mathbb{Z}, \times) nemá zmysel hovoriť o inverznom elemente vzhľadom k binárnej operácii 'súčin'.

(3) Študujme algebraickú štruktúru $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$, definovaný pre potenčnú množinu s dvoma binárnymi operáciami 'prienik' a 'zjednotenie'. Jednotkový a inverzný element pre tento algebraický systém musíme zaviesť separátne pre operáciu zjednotenia resp. prieniku. Každá z týchto operácií má svoj jednotkový element, pre každé $x \in \mathcal{P}(A)$

$$x \cap A = A \cap x = x$$

$$x \cup \emptyset = \emptyset \cup x = x$$

To znamená, že pre binárnu operáciu prieniku (zjednotenia) ako jednotkový element je množina A (prázdna množina \emptyset). Komplement $\bar{x} = A - x \in \mathcal{P}(A)$ nie je inverzný element vzhľadom k podmnožine $x \in \mathcal{P}(A)$

$$x \cup \bar{x} = \bar{x} \cup x = A$$

$$x \cap \bar{x} = \bar{x} \cap x = \emptyset$$

pretože na pravých stranách nemáme jednotkové elementy pre dané binárne operácie.

Veta. Nech $*$ je binárna operácia na množine X . Ak existuje jednotkový element $x * e = e * x = x$, pre každé $x \in X$, potom tento jednotkový element existuje jednoznačne.

Predpokladajme, že existujú dva jednotkové elementy $e_1, e_2 \in X$, potom súčasne platí

$$e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$$

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2,$$

preto musí platiť $e_1 = e_2$

Veta. Nech $*$ je binárna operácia na množine X , ktorá má jednotkový element $e \in X$. Ak pre každý element $x \in X$ existuje inverzný element, $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, potom tento inverzný element existuje jednoznačne.

Predpokladajme, že x má dva inverzné elementy u a v

$$x * u = u * x = e$$

$$x * v = v * x = e$$

Potom

$$u = u * e = u * (x * v) = (u * x) * v = e * v = v$$

Poznamenajme, že dôkaz jednoznačnosti inverzného elementu kľúčovú úlohu hrala podmienka asociatívnosti súčinu $*$, ak tento súčin nie je asociatívny, potom nevieme zabezpečiť túto jednoznačnosť inverzného elementu.

Príklad

Budeme študovať binárnu operáciu $*$ nad množinou $X = \{a, b, c, d\}$, ktorá je určená multiplikatívnou tabuľkou

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	c	a	a
c	c	b	a	d
d	d	b	c	a

Takto definovaná binárna operácia nie je asociatívna.

$$b * (c * d) = b * d = a$$

$$(b * c) * d = a * d = d$$

to znamená, že pre tento konkrétny výber troch elementov z množiny X sme dokázali

$$b * (c * d) \neq (b * c) * d$$

t. j. binárna operácia nie je asociatívna.

Pologrupy, monoidy a grupy

Budeme študovať jednoduché algebraické štruktúry $(G, *)$, kde G je množina a $*$ je binárna operácia nad touto množinou. Jedna z najjednoduchších takýchto algebraických štruktúr je pologrupa.

Definícia. Nech G je neprázdna množina a $*$ je binárna operácia nad touto množinou. Algebraická štruktúra $(G, *)$ sa nazýva ***pologrupa*** vtedy a len vtedy, ak binárna operácia $*$ je asociatívna

$$(\forall x, y, z \in G)((x * y) * z = x * (y * z))$$

Ak binárna operácia $*$ je aj komutatívna, potom algebraická štruktúra sa nazýva ***komutatívna pologrupa*** (alebo ***Abelova pologrupa***).

Príklady

(1) Algebraické štruktúry $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \times) sú komutatívne pologrupy. Binárne operácie súčtu a súčinu nad množinou celých čísel \mathbb{N} sú asociatívne a komutatívne.

Tieto dve algebraické štruktúry môžeme zovšeobecniť na množinu \mathbb{R} reálnych čísiel, potom štruktúry $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \times) sú taktiež komutatívne pologrupy.

(2) Nech $A = \{a, b, c, \dots\}$ je konečná množina symbolov našej abecedy. Reťazce dĺžky n obsahujúce znaky tejto množiny tvoria n -násobný karteziánsky produkt A^n . Množina $A^* = \{\varepsilon\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$, získame množinu, ktorá obsahuje všetky možné reťazce nad A , vrátane prázdneho reťazca ε . Binárna operácia „spojenia“ (konkatenácie) dvoch reťazcov $\alpha, \beta \in A^*$ vytvorí nový reťazec $\gamma = (\alpha + \beta) \in A^*$. Táto binárna operácia je asociatívna a nekomutatívna. Algebraická štruktúra $(A^*, +)$ je nekomutatívna pologrupa.

(3) Pre množinu $A = \{a, b, c\}$ definujme binárnu operáciu pomocou multiplikačnej tabuľky

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Táto multiplikačná tabuľka je symetrická, z čoho plynie skutočnosť, že binárna operácia je komutatívna. Dôkaz asociatívnosti binárnej operácie je netriviálna záležitosť, pre všetky možné usporiadané trojice s opakovaním musíme dokázať, že platí zákon asociatívnosti

$$\forall (x, y, z \in A) (x * (y * z) = (x * y) * z)$$

Dá sa ukázať, že operácia $*$ je asociatívna. Potom, algebraická štruktúra $(A, *)$ je komutatívna pologrupa.

Definícia. Pologrupa $(A, *)$ sa nazýva *monoid* vtedy a len vtedy, ak má jednotkový element.

Príklady

(1) Algebraická štruktúra (\mathbb{N}_+, \times) , kde množina \mathbb{N}_+ obsahuje kladné celé čísla je monoid, existuje jednotkový prvok '1', ktorý zachováva súčin $x * 1 = 1 * x = x$. Podobná algebraická štruktúra $(\mathbb{N}_+, +)$, ktorá je pologrupou, nie je monoid, pre operáciu súčet neexistuje v rámci množiny \mathbb{N}_+ jednotkový prvok '0' (pretože $0 \notin \mathbb{N}_+$), ktorý zachováva súčet $x + 0 = 0 + x = x$.

(2) Nech $(A^*, +)$ je nekomutatívna pologrupa reťazcov nad abecedou A , pričom táto množina obsahuje aj prázdny znak ε . Táto algebraická štruktúra má jednotkový element ε , ktorý je neutrálny vzhľadom k binárnej operácii spojenia reťazcov

$$\forall (x \in A^*) (\varepsilon + x = x + \varepsilon = x)$$

Algebraická štruktúra $(A^*, +)$ je monoid.

(4) Nech (X, \cup) a (X, \cap) , kde $X = \mathcal{P}(A)$, sú algebraické štruktúry. Obe tieto štruktúry sú pologrupy, pretože množinové operácie zjednotenia a prieniku sú asociatívne. Tieto štruktúry tvoria monoidy, pretože prvá (druhá) štruktúra má jednotkový element prázdnu množinu \emptyset (množinu A)

$$\forall (X \in \mathcal{P}(A)) (\emptyset \cup X = X \cup \emptyset = X)$$

$$\forall (X \in \mathcal{P}(A)) (A \cap X = X \cap A = X)$$

Mnohé algebraické štruktúry, ktoré sú monoidy, majú ešte dodatočnú vlastnosť, ku každému prvku z množiny existuje inverzný element. Potom takýto monoid sa nazýva grupa. Algebraické štruktúry tohto typu našli široké uplatnenie nielen v mnohých oblastiach matematiky a informatiky, ale aj vo fyzike, chémii a pod.

Definícia. Monoid $(G,*)$ sa nazýva *grupa* vtedy a len vtedy, ak ku každému elementu $x \in G$ existuje inverzný element $x^{-1} \in G$. Platí teda, že algebraická štruktúra $(G,*)$ je *grupa* vtedy a len vtedy, ak sú splnené tieto tri podmienky:

- (1) binárna operácia $*$ je asociatívna,
- (2) existuje jednotkový element $e \in G$,
- (3) pre každé $x \in G$ existuje inverzný element $x^{-1} \in G$.

Mohutnosť množiny G sa nazýva rád grupy $(G,*)$, označuje sa $|G|$.

Príklady

(1) Algebraická štruktúra $(\mathbb{Z}, +)$, kde \mathbb{Z} je množina celých čísel, je komutatívna grupa. Binárna operácia súčet '+' je asociatívna a komutatívna, číslo $0 \in \mathbb{Z}$ má charakter neutrálneho prvku vzhľadom k operácii '+', $0 + x = x + 0 = x$, pre každé číslo x ; podobne, pre každé číslo $x \in \mathbb{Z}$ existuje 'inverzné' číslo $(-x) \in \mathbb{Z}$ také, že $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

(2) Algebraická štruktúra (\mathbb{R}_+, \times) , kde $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ a použitá binárna operácie je štandardný súčin, je komutatívna grupa. Binárna operácia je asociatívna a komutatívna, existuje neutrálny prvok $1 \in \mathbb{R}_+$, $1 \times x = x \times 1 = x$, pre každý prvok x , a taktiež ku každému x existuje inverzný prvok $x^{-1} = 1/x$, pre ktorý platí $x \times (1/x) = (1/x) \times x = 1$.

Veta. Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom existuje „krátenie“ zľava a zprava, pre každé $a, x, y \in G$ platí

(a) krátenie zľava

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

(b) krátenie sprava

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y.$$

Veta. Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom pre ľubovoľné $a, b \in G$ platí

(a) rovnica $a * x = b$ má jednoznačné riešenie $x = a^{-1} * b$,

(b) rovnica $x * a = b$ má jednoznačné riešenie $x = b * a^{-1}$.

Veta. Ak algebraická štruktúra $(G, *)$ je grupa, potom v multiplikačnej tabuľke binárnej operácie $*$ sa v každom riadku alebo stĺpci vyskytuje každý element z G práve len raz.

	x		y		
	⋮		⋮		
a	⋯	$a*x$	⋯	$a*y$	⋯
	⋮		⋮		

Predpokladajme, že $a*x = a*y$, potom $x = y$, čo je však v spore, že stĺpce sú rôzne. Dôkaz pre stĺpce je podobný.

Definícia. Hovoríme, že algebraická štruktúra $(H, *)$ je *podgrupa* grupy $(G, *)$ vtedy a len vtedy, ak $H \subseteq G$ a $(H, *)$ je grupa, čo budeme zapisovať $(H, *) \subseteq (G, *)$.

- Ak $(H, *) \subseteq (G, *)$, potom obe štruktúry sú grupy a obe binárne operácie sú rovnaké.
- Každá grupa má aspoň dve triviálne podgrupy. Prvá je s množinou $H = \{e\}$ a druhá s množinou $H = G$, všetky ostatné podgrupy (ak existujú) nazývame netriviálne.

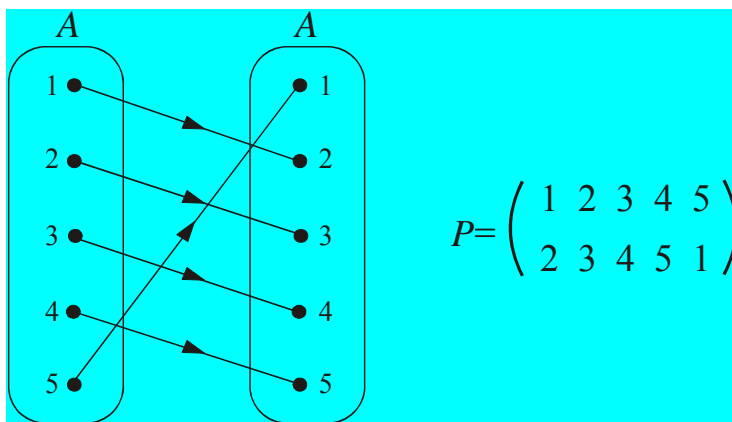
Veta (Lagrangeova). Nech $(H, *) \subseteq (G, *)$, potom rád množiny $|G|$ je deliteľný rádom podmnožiny $|H|$, existuje také kladné celé číslo k , že $|G| = k|H|$

$$((H, *) \subseteq (G, *)) \Rightarrow \exists k (|G| = k|H|)$$

Grupa permutácií

Nech S_n je množina tvorená všetkými permutáciami n objektov. Permutácie sú špecifikované ako 1-1-značné zobrazenie $P : A \rightarrow A$, ktoré každému objektu $i \in A$ priradí objekt $p_i \in A$, pričom z podmienky 1-1-značnosti vyplýva podmienka $\forall (i, j \in A)(i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j)$, permutáciu P vyjadríme formulou

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$$



$$|S_n| = n!$$

Binárna operácia $*$ zobrazuje z dvoch permutácií novú permutáciu

$$*: S_n \times S_n \rightarrow S_n$$

$$\begin{aligned} P'' = P * P' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p'_1 & p'_2 & \dots & p'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p''_1 & p''_2 & \dots & p''_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p''_1 & p''_2 & \dots & p''_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

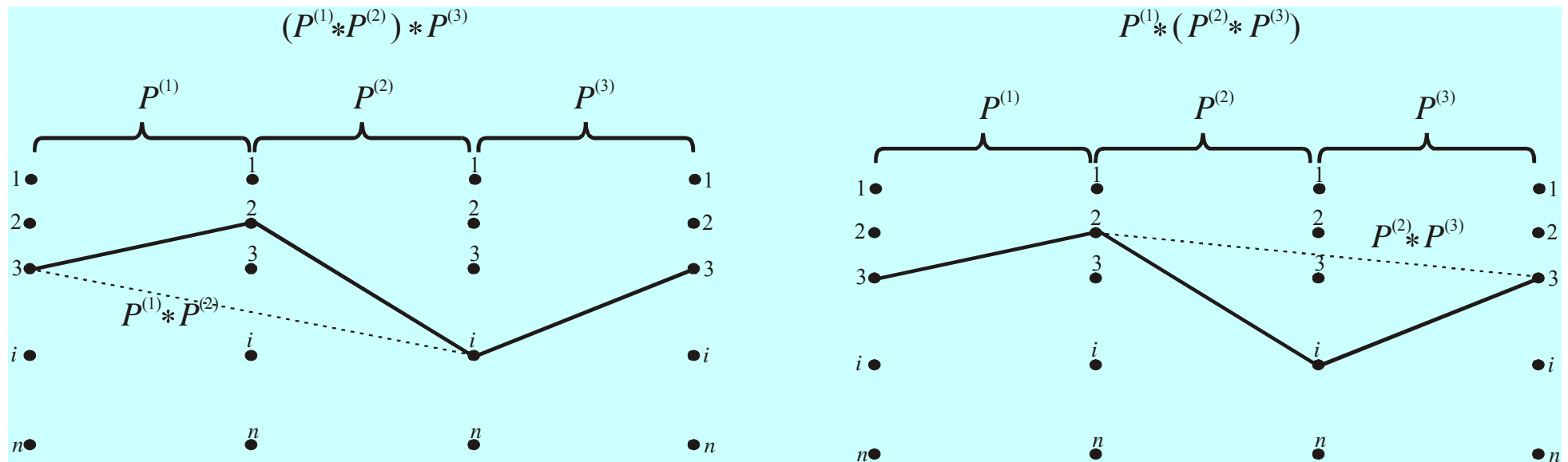
Súčin dvoch permutácií môžeme interpretovať ako kompozíciu dvoch zobrazení P a P' .

Znázornenie súčiny dvoch permutácií $(3\ 2\ 1) * (2\ 1\ 3)$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ \vdots \end{array} \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) & * & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ \vdots \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ \vdots \end{array} \\
 \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right)
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ \vdots \end{array} \\
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) & * & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ \vdots \end{array} \\
 \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Súčin dvoch permutácií musí byť asociatívnou operáciou, pre súčin ľubovoľných troch permutácií P_1, P_2, P_3 platí

$$P_1 * (P_2 * P_3) = (P_1 * P_2) * P_3$$



Inverzná permutácia je zostrojená jednoduchou inverziou tabuľky špecifikujúcej permutáciu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Príklad

Zostrojte multiplikačnú tabuľku permutácií troch objektov. Jednotlivé permutácie označíme takto

$$P_1 = (123), P_2 = (231), P_3 = (312),$$

$$P_4 = (132), P_5 = (321), P_6 = (213)$$

Potom multiplikačná tabuľka pre tieto permutácie má tvar

*	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_3	P_1	P_5	P_6	P_4
P_3	P_3	P_1	P_2	P_6	P_4	P_5
P_4	P_4	P_6	P_5	P_1	P_3	P_2
P_5	P_5	P_4	P_6	P_2	P_1	P_3
P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

Morfizmy

Definícia. Hovoríme, že medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje *izomorfismus* (alebo, že grupy sú *izomorfné*), čo značíme $(G, *) \cong (G', \circ)$, vtedy a len vtedy, ak existuje 1-1-značné zobrazenie $f : G \rightarrow G'$, ktoré

$$\forall (x, y \in G) (f(x * y) = f(x) \circ f(y))$$

Príklad

Uvažujme dve grupy $(\mathbb{R}, +)$ a grupu (\mathbb{R}_+, \times) , kde $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Dokážte, že funkcia $f(x) = 2^x$ definuje izomorfizmus medzi týmito dvoma grupami, $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+, \times)$. Funkcia $f(x) = 2^x$ je monotónne rastúca, čiže je aj 1-1-značná. Funkcia má zaujímavú vlastnosť, $(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, pomocou ktorej sa jednoducho zostrojí izomorfizmus medzi grupami, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- Veta.** Ak $f : G \rightarrow G'$ je izomorfizmus medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) , potom
- (1) Ak e je jednotkový element v grupe $(G, *)$, potom $f(e)$ je jednotkový element v grupe (G', \circ) .
 - (2) Grupa $(G, *)$ je komutatívna vtedy a len vtedy, ak (G', \circ) je komutatívna grupa.
 - (3) Ak x^{-1} je inverzný element vzhľadom k elementu x v grupe $(G, *)$, potom $f(x^{-1})$ je inverzný element vzhľadom k elementu $f(x)$ v grupe (G', \circ) .
 - (4) Inverzné zobrazenie $f^{-1} : G' \rightarrow G$ definuje izomorfizmus z grupy (G', \circ) do grupy $(G, *)$.
 - (5) Ak $(H, *)$ je podgrupa grupy $(G, *)$, potom (H', \circ) , kde $H' = \{f(x); x \in H\}$, je podgrupa grupy (G', \circ) a $(H, *) \cong (H', \circ)$.

Príklad

Dokážte, že ak $A = \{a, b\}$, potom monoidy $(\mathcal{P}(A), \cup)$ a $(\mathcal{P}(A), \cap)$ sú izomorfné.

Multiplikatívne tabuľky pre tieto monoidy sú

\cup	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$

\cap	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$
$\{b\}$	\emptyset	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$

1-1-značná funkcia $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, ktorá zobrazuje prvú tabuľku na druhú má tvar

$$f(\emptyset) = \{a, b\}, f(\{a\}) = \{a\}, f(\{b\}) = \{b\}, f(\{a, b\}) = \emptyset$$

Potom medzi monoidami $(\mathcal{P}(A), \cup)$ a $(\mathcal{P}(A), \cap)$ existuje izomorfizmus.

Definícia. Hovoríme, že medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) existuje *morfizmus* vtedy a len vtedy, ak existuje zobrazenie $f : G \rightarrow G'$, ktoré

$$\forall (x, y \in G)(f(x * y) = f(x) \circ f(y))$$

Ak medzi dvoma algebraickými štruktúrami existuje izomorfizmus, potom tieto štruktúry sú „skoro totožné“. Ak odstránime podmienku 1-1-značnosti funkcie $f : G \rightarrow G'$, potom táto „skoro totožnosť“ sa stráca, druhá algebraická štruktúra (G', \circ) stráca niektoré detaily prvej štruktúry.

- Veta 2.10.** Ak $f : G \rightarrow G'$ je *morfizmus* medzi grupami $(G, *)$ a (G', \circ) , potom
- (1) Ak e je jednotkový element v grupe $(G, *)$, potom $f(e)$ je jednotkový element v grupe (G', \circ) .
 - (2) Grupa $(G, *)$ je komutatívna vtedy a len vtedy, ak (G', \circ) je komutatívna grupa.
 - (3) Ak x^{-1} je inverzný element vzhľadom k elementu x v grupe $(G, *)$, potom $f(x^{-1})$ je inverzný element vzhľadom k elementu $f(x)$ v grupe (G', \circ) .

Príklad

Uvažujme množinu $A = \{a, b, c\}$, množina A^* obsahuje všetky možné reťazce (včítane prázdneho reťazca ε). Algebraická štruktúra $(A^*, *)$, kde binárna operácia $*$ reprezentuje spájanie reťazcov, je monoid (existuje jednotkový element reprezentovaný prázdny reťazcom ε). Nech existuje funkcia $f : A^* \rightarrow \mathbb{N}$, kde \mathbb{N} je množina nezáporných celých čísel, táto funkcia je definovaná takto

$$f(x) = \text{dĺžka reťazca } x$$

Ukážte, že toto zobrazenie f je morfizmus z $(A^*, *)$ na $(\mathbb{N}, +)$.

Z definície funkcie f vyplýva, že platí

$$f(x * y) = f(x) + f(y)$$

t. j. dĺžka spojeného reťazca $x * y$ sa rovná súčtu dĺžok je zložiek x a y . Táto funkcia evidentne nie je 1-1-značná.

Boolova algebra

Elektronické obvody v počítačoch a v podobných zariadeniach sú charakterizované binárnymi vstupmi a výstupmi (rovnajúcimi sa 0 alebo 1), transformácia vstupu na výstupu sa uskutočňuje prostredníctvom elektronického obvodu, ktorý tvorí jadro tohto „transformačného“ zariadenia.



Všeobecná definícia *Boolovej funkcie* je

$$f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$$

Môžeme si položiť otázku, ako realizovať túto Boolovu funkciu, aby mala vopred špecifikované vlastnosti? Tento problém je realizovaný pomocou Boolovej algebry, ktorá pomocou premenných s 0-1 ohodnotením (t. j. binárnych) premenných a pomocou dvoch elementárnych algebraických operácií a jednej unárnej algebraickej operácie je schopná dostatočne všeobecne modelovať Boolove funkcie s vopred špecifikovanými vlastnosťami.

Boolova algebra má dva známe modely, prvým je výroková logika a druhým algebra teórie množín. Medzi zákonmi výrokovej logiky a formulami teórie množín existuje „dualizmus“

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Vo všeobecnosti, dualizmus medzi výrokovou logikou a algebrou teórie množín môžeme zosumarizovať takto

výrokové premenné $p, q, r, \dots \Leftrightarrow$ množiny A, B, C, \dots

spojka negácie $\neg \Leftrightarrow$ operácia doplnku $\bar{\quad}$

spojka konjunkcie $\wedge \Leftrightarrow$ operácia prieniku \cap

spojka disjunkcie $\vee \Leftrightarrow$ operácia zjednotenia \cup

spojka ekvivalentnosti $\equiv \Leftrightarrow$ relácia rovnosti $=$

Definícia. Boolova algebra je algebraická štruktúra špecifikovaná usporiadanou 6-ticou $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, kde $B = \{a, b, \dots, x, y, \dots\}$ je neprázdna množina prvkov (premenných Boolovej algebry), ktorá obsahuje dva špeciálne odlišené prvky - konštanty $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in B$ a nad ktorou sú definované binárne operácie súčinu a súčtu

$$\cdot : B \times B \rightarrow B \quad \text{a} \quad + : B \times B \rightarrow B$$

a unárna operácia komplementu

$$\bar{} : B \rightarrow B$$

ktoré vyhovujú týmto podmienkam

(1) komutatívnosť:

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \text{a} \quad x + y = y + x$$

(2) asociatívnosť:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \text{a} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

(3) distributívnosť:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{a} \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

(4) vlastnosť konštanty $\mathbf{0}$:

$$x = x + \mathbf{0} \quad \text{a} \quad x \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$$

(5) vlastnosť konštanty $\mathbf{1}$: $x = x \cdot \mathbf{1}$ a $x + \bar{x} = \mathbf{1}$

Príklad

Najjednoduchšia Boolova algebra (s veľkým významom v informatike a v logike) je založená na dvojprvkovej množine $B = \{0,1\}$. Binárne operácie súčinu, súčtu a unárna operácia komplementu sú pomocou multiplikačných tabuliek definované takto

$+$	0	1	\perp	0	1	b	\bar{b}
0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Jednoducho sa môžeme presvedčiť, že algebraická štruktúra $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ je Boolova algebra.

Príklad

Nech $B = \mathcal{P}(A)$, kde $A = \{a, b, c, \dots\}$ je neprázdna množina. Operácie \cdot a $+$ sú realizované pomocou množinových operácií \cap resp. \cup , operácia komplementu je realizovaná ako množinový komplement vzhľadom k množine A , $\bar{x} = A - x$:

- (a) binárne operácie sú asociatívne, komutatívne,
- (b) medzi binárnymi operáciami platia distributívne zákony,
- (c) prázdna množina \emptyset má vlastnosti neutrálneho prvku pre operáciu \cup

$$(\forall X \in B)(X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X)$$

- (d) množina A má vlastnosti neutrálneho prvku pre operáciu \cap

$$(\forall X \in B)(X \cap A = A \cap X = X)$$

- (e) pre každé $X \in B$ existuje komplement $\bar{X} \in B$ taký, že

$$(\forall X \in B)(X \cap \bar{X} = \emptyset)$$

$$(\forall X \in B)(X \cup \bar{X} = A)$$

To znamená, algebraická štruktúra $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A)$ je Boolova algebra.

Príklad

Nech $B = \{p, q, r, \dots\}$ je množina výrokových formúl, ktorá je uzavretá vzhľadom k binárnym operáciám konjunkcie (\wedge), disjunkcie (\vee) a k unárnej operácii negácie (\neg). Pre túto množinu je definovaná aj relácia ekvivalentnosti ' \equiv ', dve formuly sú ekvivalentné vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú pravdivostnú interpretáciu (logicky ekvivalentné). Z množiny B vyberieme formulu kontradikciu (napr. $p \wedge \neg p$) a označíme ju symbolom 0 ; podobne formula tautológia (napr. $p \vee \neg p$) je označená symbolom 1 . To znamená, že symboly 0 a 1 patria do množiny B . Pre každú formulu p platia tieto vzťahy

$$p \vee 0 = 0 \vee p = p \quad \text{a} \quad p \wedge 1 = 1 \wedge p = p$$

Pretože logické spojky konjunkcie a disjunkcie sú komutatívne a asociatívne, pre tieto operácie platia taktiež distributívne zákony, algebraická štruktúra $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ tvorí Boolovu algebru.

Vlastnosti Boolovej algebry

Ukážeme, že tento princíp duality je aplikovateľný aj pre Boolove algebry.

Postulujeme nejakú formulu Boolovej algebry, duálnu formu dostaneme tak, že urobíme zámenu symbolov

$$\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot, \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} \text{ a } \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}$$

Uvažujme formulu Boolovej algebry, $(x + y) \cdot x \cdot \bar{y} = \mathbf{0}$, duálny tvar tejto formuly je $(x \cdot y) + x + \bar{y} = \mathbf{1}$.

Axiómy Boolovej algebry sú uvedené po dvojiciach duálnych formúl. To znamená, že ak v rámci Boolovej algebry odvodíme nejakú formulu, tak potom aj jej duálna forma je odvoditeľná pomocou postupu, ktorý je „duálny“ k postupu prvej formuly.

Veta (princíp duality). Každá veta Boolovej algebry je taktiež vetou aj v duálnej forme.

V Boolovej algebre neutrálne prvky 1 a 0 existujú jednoznačne, podobne, komplementárny prvok existuje jednoznačne.

Veta. Neutrálne prvky 1 a 0 existujú jednoznačne.

Veta. Pre každý prvok $x \in B$ existuje jednoznačne prvok $\bar{x} \in B$ taký, že $x \cdot \bar{x} = 0$ a $x + \bar{x} = 1$.

Veta. Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra, potom platia tieto formule:

(1) Involutivnosť komplementu

$$(\forall x \in B)(\overline{\overline{x}} = x)$$

(2) Idempotentnosť

$$(\forall x \in B)(x \cdot x = x) \text{ a } (\forall x \in B)(x + x = x)$$

(3) De Morganove zákony

$$(\forall x, y \in B)(\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}) \text{ a } (\forall x, y \in B)(\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y})$$

(4) Nulitnosť

$$(\forall x \in B)(x + \mathbf{1} = \mathbf{1}) \text{ a } (\forall x \in B)(x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0})$$

(5) Absorpcia

$$(\forall x, y \in B)(x + (x \cdot y) = x) \text{ a } (\forall x \in B)(x \cdot (x + y) = x)$$

(6) Komplementary konštant

$$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1} \text{ a } \overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

(7) Vlastnosti konštant vzhľadom k binárnym operáciám

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1} \text{ a } \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Boolove funkcie

V úvode k tejto kapitole bola Boolova funkcia definovaná ako funkcia nad binárnymi premennými $\{0,1\}$. Tento pomerne zjednodušený pohľad na Boolovu funkciu bude teraz rozšírený tak, aby koncepcia Boolovej funkcie bola časťou Boolovej algebry.

Definícia. Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra. Potom,

- (1) **Boolova premenná** je taká premenná, ktorá nadobúda hodnoty z množiny B ,
- (2) **komplement premennej** x , označený \bar{x} , je taká premenná, ktorej hodnota sa rovná komplementu hodnoty premennej x (t. j. ak $x = b \in B$, potom $\bar{x} = \bar{b} \in B$,
- (3) **literál** je Boolova premenná x alebo jej komplement \bar{x}

$$x^e = \begin{cases} x & (\text{pre } e = 1) \\ \bar{x} & (\text{pre } e = 0) \end{cases}.$$

Definícia. Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra. Potom *Boolova formula*, obsahujúca Boolove premenné x_1, x_2, \dots, x_n , je definovaná takto:

- (1) konštanty $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$ sú Boolove formuly,
- (2) Boolove premenné x_1, x_2, \dots, x_n sú Boolove formuly,
- (3) ak X a Y sú Boolove formuly, potom aj výrazy $(X \cdot Y)$, $(X + Y)$, \bar{X} a \bar{Y} sú Boolove formuly.

Rastúca priorita operácií: (1) súčet, (2) súčin a (3) komplement. Napríklad, formulu $((x \cdot y) + z)$ môžeme pomocou tejto konvencie vyjadriť v zjednodušenom tvare bez zátvoriek $x \cdot y + z$. Konečne, podobne ako v štandardnej algebre, budeme vynechávať znak súčinu, napríklad predchádzajúci ilustračný príklad má tvar $xy + z$.

Príklad

Zjednodušte formulu $((x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}))$. Použitím distributívneho zákona a zákona nulitnosti

$$((x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})) = (x \cdot \bar{x}) + (x \cdot \bar{y}) + (y \cdot \bar{x}) + (y \cdot \bar{y}) = \underbrace{x\bar{x}}_0 + x\bar{y} + y\bar{x} + \underbrace{y\bar{y}}_0 = x\bar{y} + \bar{x}y$$

Definícia. Dve Boolove formuly sú *ekvivalentné* (alebo *rovné*) vtedy a len vtedy, ak jedna formula je pomocou konečného počtu aplikácií axióm Boolovej algebry pretransformovaná na druhú formulu.

Podľa predošlého príkladu $\varphi_1 = (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$ a $\varphi_2 = x\bar{y} + \bar{x}y$ sú ekvivalentné, pretože druhú formulu získame z prvej použitím konečného počtu aplikácií axióm Boolovej algebry, potom $\varphi_1 = \varphi_2$.

Definícia. Nech $(B, +, \cdot, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ je Boolova algebra.

- (1) **Boolova funkcia** premenných x_1, x_2, \dots, x_n , pre danú, je funkcia $f : B^n \rightarrow B$, pričom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je Boolova formula.
- (2) Všetky Boolove formule, ktoré sú navzájom ekvivalentné, definujú rovnakú funkciu.

Z tejto definície vyplýva, že ekvivalentné Boolove formule špecifikujú rovnakú Boolovu formulu. Napríklad, máme dve funkcie

$$\begin{array}{ll} f : B^2 \rightarrow B & f(x_1, x_2) = x_1(\bar{x}_1 + x_2) \\ g : B^2 \rightarrow B & g(x_1, x_2) = x_1x_2 \end{array}$$

Použitím distribučného zákona ľahko dokážeme, že formule sú ekvivalentné, $x_1(\bar{x}_1 + x_2) = x_1x_2$, potom funkcie f a g sú rovnaké.

Definícia. *Súčinová klauzula* premenných x_1, x_2, \dots, x_n je Boolova formula, ktorá obsahuje súčin n literálov (t. j. premennú alebo jej komplement) pre každú premennú.

Ako príklad súčinovej klauzuly premenných x_1, x_2, x_3 sú tieto formuly: $x_1 x_2 x_3$, $x_1 x_2 \bar{x}_3$, $x_1 \bar{x}_2 x_3$, $\bar{x}_1 x_2 x_3, \dots, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

Ak použijeme formalizmus x^e , potom súčinovú klauzulu premenných x_1, x_2, \dots, x_n , ktorá je špecifikovaná binárnym vektorom $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, má tvar

$$l_e = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$$

Napríklad, pre $e = (11011)$ súčinová klauzula má tvar

$$l_{(11011)} = x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^1 x_5^1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$$

Definícia. *Súčtová klauzula* premenných x_1, x_2, \dots, x_n je Boolova formula, ktorá obsahuje súčet n literálov (t. j. premennú alebo jej komplement) pre každú premennú.

Podobne ako pre súčinovú klauzulu, môžeme aj súčtovú klauzulu pre premenné x_1, x_2, \dots, x_n špecifikovať binárnym vektorom x_1, x_2, \dots, x_n

$$L_e = x_1^{1-e_1} + x_2^{1-e_2} + \dots + x_n^{1-e_n}$$

Pre $e = (10100)$ súčtová klauzula má tvar

$$L_e = x_1^0 + x_2^1 + x_3^0 + x_4^1 + x_5^1 = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4 + x_5$$

Veta. Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorá sa identicky nerovná nule, môže byť špecifikovaná ako suma súčinových klauzúl

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} \\ &= \sum_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} \\ &= \sum_e f(e) l_e \end{aligned}$$

Naznačíme jednoduchý konštruktívny dôkaz. Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je vlastne špecifikovaná jej funkčnými hodnotami $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ pre všetky hodnoty binárneho vektora $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Hovoríme, že funkcia f je špecifikovaná tabuľkou funkčných hodnôt, ktorá obsahuje 2^n riadkov

#	$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$	$l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}$
1	(00.....00)	0
2	(00.....01)	1
.....		
i	$(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)})$	1/0
.....		
2^n	(11.....11)	0

Súčinová klauzula $l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ má zaujímavú vlastnosť, jej funkčná hodnota sa rovná **1** len pre $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, kde $e_i \in \{0, 1\}$, pre všetky iné prípady funkčná hodnota je **0**

$$l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \mathbf{1} & \left(\text{pre } (x_1, x_2, \dots, x_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \right) \\ \mathbf{0} & \left(\text{pre } (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (e_1, e_2, \dots, e_n) \right) \end{cases}$$

To znamená, že pre Boolovu funkciu sú dôležité len funkčné hodnoty **1**, funkčné hodnoty **0** nie sú podstatné pre náš konštruktívny dôkaz. Zostrojíme Boolovu formulu ako sumáciu týchto klauzúl (t. j. v DNF tvare)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_e f(e_1, e_2, \dots, e_n) l_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

Boolove funkcie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sú ekvivalentné, t. j. majú rovnaké funkčné hodnoty pre rôzne hodnoty argumentov.

Príklad

Zostrojte Boolovu funkciu $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ v tvare DNF. Podľa dokázanej vety tvar tejto funkcie je

$$f(x_1, x_2) = f(\mathbf{0}, \mathbf{0})\bar{x}_1\bar{x}_2 + f(\mathbf{0}, \mathbf{1})\bar{x}_1x_2 + f(\mathbf{1}, \mathbf{0})x_1\bar{x}_2 + f(\mathbf{1}, \mathbf{1})x_1x_2$$

kde jednotlivé funkčné hodnoty sú uvedené v tabuľke

#	e_1	e_2	$f(e_1, e_2)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

Potom funkcia f má ekvivalentný DNF tvar

$$F(x_1, x_2) = \mathbf{0}\bar{x}_1\bar{x}_2 + \mathbf{1}\bar{x}_1x_2 + \mathbf{1}x_1\bar{x}_2 + \mathbf{1}x_1x_2 = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2$$

Veta. Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorá sa identicky nerovná jednotke, môže byť špecifikovaná ako súčin sumačných klauzúl

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_e \left(f(e_1, e_2, \dots, e_n) + x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + \dots + x_n^{e_n} \right) \\ &= \prod_e \left(f(e_1, e_2, \dots, e_n) + L_{(1-e_1, 1-e_2, \dots, 1-e_n)} \right) \\ &= \prod_e \left(f(e) + L_{\bar{e}} \right) \end{aligned}$$

Táto veta reprezentuje hlavný duálny výsledok tejto kapitoly, že každá Boolova funkcia môže byť jednoznačne vyjadrená ako súčin súčtových klauzúl (tento tvar sa nazýva vo výrokovej logike *konjunktívna normálna forma*, skratka KNF).

Príklad

Vyjadrite $f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2)$ v KNF tvare. Tabuľku funkčných hodnôt tejto Boolovej funkcie má tvar

#	e_1	e_2	$e_1 + e_2$	$e_1(e_1 + e_2)$
1	0	0	0	0
2	0	1	1	0
3	1	0	1	1
4	1	1	1	1

Použitím vety zostrojíme Boolovu funkciu, ktorá je ekvivalentná funkcii

$$f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2)$$

$$f(x_1, x_2) =$$

$$= \left(\underbrace{\cancel{f(0,0)}}_0 + x_1 + x_2 \right) \cdot \left(\underbrace{\cancel{f(0,1)}}_0 + x_1 + \bar{x}_2 \right) \cdot \underbrace{\left(\underbrace{f(1,0)}_1 + \bar{x}_1 + x_2 \right)}_1 \cdot \underbrace{\left(\underbrace{f(1,1)}_1 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \right)}_1$$

$$= (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2)$$



The End

*"Nobody on the Internet knows
I am a dog."*