Cvičenia

Cvičenie 7.1. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou
(a) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0}$.
(b) $x + x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0}$.
(c) $x \cdot \mathbf{1} = x$, $x = \mathbf{1}$ alebo $x = \mathbf{0}$
(d) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$, $x = \mathbf{0}$ alebo $x = \mathbf{1}$.
(e) $x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{0}$ alebo $x = \mathbf{1}$.

Cvičenie 7.2. Zostrojte tabuľku funkčných hodnôt Boolovej funkcie

(a) $f(x,y,z) = \overline{x}y$

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{x}y$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

(b) $f(x,y,z) = x + yz$,

x	y	z	yz	$x+yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

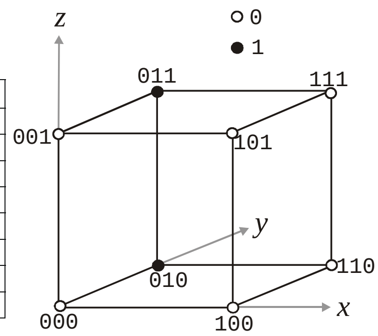
(c) $f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{xyz}$,

x	y	z	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	xyz	$\overline{xyz}$	$x\overline{y} + \overline{xyz}$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

Cvičenie 7.3. Znázornite Boolove funkcie $f(x,y,z)$ z cvičenia 7.2 na 3-rozmernej kocke tak, že hodnoty 1 (0) budú reprezentované na kocke čiernym (bielym) bodom.

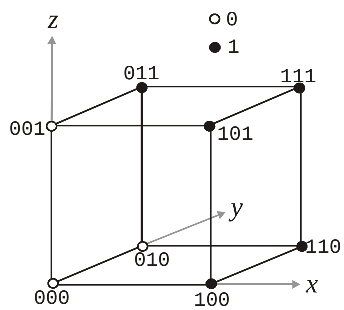
(a)

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x}y$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0



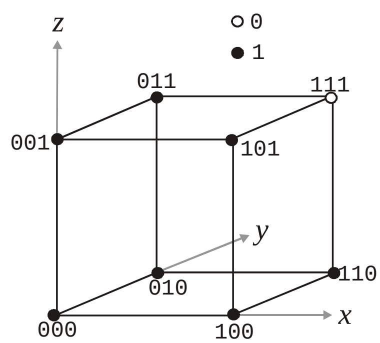
(b)

x	y	z	yz	$x+yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



(c)

x	y	z	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	xyz	$\overline{xyz}$	$x\bar{y}+\overline{xyz}$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0



Cvičenie 7.4. Pre ktoré hodnoty x a y platí $xy = x + y$?
$x = y = 1$ alebo $x = y = 0$,

Cvičenie 7.5. Zostrojte tabuľku všetkých možných binárnych Boolových funkcií a identifikujte v nej známe Boolove binárne operácie súčinu a súčtu. Vyjadrite ostatné binárne operácie pomocou súčtu, súčinu a komplementu.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
			$\cdot$					$\oplus$	$+$								

$f_1(x,y)=\mathbf{0}=x\bar{x}$	$f_2(x,y)=xy$	$f_3(x,y)=x\bar{y}$	$f_4(x,y)=x\bar{y}+xy$
$f_5(x,y)=\bar{x}y$	$f_6(x,y)=\bar{x}y+xy$	$f_7(x,y)=x\bar{y}+\bar{x}y$	$f_8(x,y)=x+y$
$f_9(x,y)=\bar{x}\,\bar{y}$	$f_{10}(x,y)=\bar{x}\,\bar{y}+xy$	$f_{11}(x,y)=\bar{x}\,\bar{y}+x\bar{y}$	$f_{12}(x,y)=x+\bar{y}$
$f_{13}(x,y)=\bar{x}$	$f_{14}(x,y)=\bar{x}+y$	$f_{15}(x,y)=\bar{x}+\bar{y}$	$f_{16}(x,y)=\mathbf{1}=x+\bar{x}$

Cvičenie 7.6. Niekedy je výhodné v Boolovej algebre definovať novú binárnu operáciu označenú symbolom ⊕, jej tabuľka funkčných hodnôt má tvar

$\oplus$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Poznamenajme, že vo výrokovej logike je podobná logická spojka označovaná „exkluzívna disjunkcia“ (XOR). Zjednodušte tieto výrazy

(a) $x\oplus\mathbf{0}$, $x\oplus\mathbf{0}=x$

(b) $x\oplus\mathbf{1}$, $x\oplus\mathbf{1}=\bar{x}$,

(c) $x\oplus x$, $x\oplus x=\mathbf{0}$,

(d) $x\oplus\bar{x}$, $x\oplus\bar{x}=\mathbf{1}$.

Cvičenie 7.7. Dokážte, že platia rovnosti

(a) $x\oplus y=(x+y)\left(\overline{xy}\right)$,

x	y	$x+y$	xy	$\overline{xy}$	$(x+y)\overline{xy}$	$x\oplus y$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

(b) $x\oplus y=\bar{x}y+x\bar{y}$.

x	y	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y+x\bar{y}$	$x\oplus y$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Cvičenie 7.8. Zostrojte duálne výrazy k týmto Boolovym funkciam

(a) $x+y$, $f(x,y)=x+y \Rightarrow f_d(x,y)=xy$

(b) $\bar{x}\,\bar{y}$, $f(x,y)=\bar{x}\,\bar{y} \Rightarrow f_d(x,y)=\bar{x}+\bar{y}$

(c) $xyz+\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, $f(x,y,z)=xyz+\bar{x}\bar{y}\,\bar{z} \Rightarrow f_d(x,y,z)=(x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

Cvičenie 7.9. Dokážte, že duálny tvar $f_d(x_1,x_2,...,x_n)$ k Boolovej funkcii $f(x_1,x_2,...,x_n)$ vyhovuje podmienke $f_d(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f\,(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}$.

Dôkaz tohto vzťahu vykonáme indukciou vzhľadom k podformulám $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

(a) $f(x_1,x_2,...,x_n)=\Phi(x_1,x_2,...,x_n)+\Psi(x_1,x_2,...,x_n)$, duálny tvar tejto formuly je

$$\begin{aligned} f_d(x_1,x_2,...,x_n) &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)+\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}\cdot\overline{\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \Phi_d(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\Psi_d(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

(b) $f(x_1,x_2,...,x_n)=\Phi(x_1,x_2,...,x_n)\cdot\Psi(x_1,x_2,...,x_n)$, duálny tvar tejto formuly je

$$\begin{aligned} f_d(x_1,x_2,...,x_n) &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)\cdot\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \overline{\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}+\overline{\Psi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)} \\ &= \Phi_d(x_1,x_2,...,x_n)+\Psi_d(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

Tento postup opakujeme tak dlho, až dosiahneme elementárne výrazy, ktoré obsahujú podformuly rovné premenným, kde konštrukciu duálnych formúl vykonáme jednoducho pomocou De Morganových vzťahov a negáciou konštánt

$$\overline{\bar{x}_i+\bar{x}_j}=x_i\cdot x_j,\ \overline{\bar{x}_i\cdot\bar{x}_j}=x_i+x_j,\ \overline{\mathbf{0}}=\mathbf{1}\ \text{ a }\ \overline{\mathbf{1}}=\mathbf{0}.$$

Týmto indukčným postupom sme dokázali formulu $f_d(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f\,(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)}$.

Cvičenie 7.10. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným *x*, *y* a *z*, ktorá má hodnotu **1** vtedy a len vtedy, ak

(a) $x=y=\mathbf{0},z=\mathbf{1}$, $f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}\,z$.

(b) $x=\mathbf{0},y=\mathbf{1},z=\mathbf{0}$, $f(x,y,z)=\bar{x}\,y\,\bar{z}$.

(c) $y=z=\mathbf{1}$, $f(x,y,z)=x\,y\,z+\bar{x}\,y\,z=\left(\underbrace{x+\bar{x}}_{1}\right)yz=yz$.

Cvičenie 7.11. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným *x*, *y* a *z* (DNF forme), ktorá je ekvivalentná s funkciou $F(x,y,z)$.

(a) $F(x,y,z)=x+y+\overline{z}$,

DNF tvar tejto Boolovej funkcie je

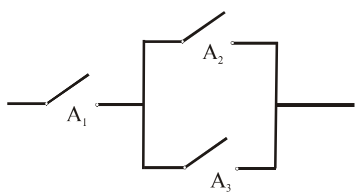
$$\begin{aligned}F(x,y,z)=x+y+\overline{z}&=x(y+\overline{y})(z+\overline{z})+(x+\overline{x})y(z+\overline{z})+(x+\overline{x})(y+\overline{y})\overline{z}\\&=x\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,z+x\,\overline{y}\,\overline{z}\\&+x\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,z+\overline{x}\,y\,\overline{z}\\&+x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\\&=x\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,z\end{aligned}$$

(b) $F(x,y,z)=x\overline{z}$.

$$F(x,y,z)=x(y+\overline{y})\overline{z}=x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}$$

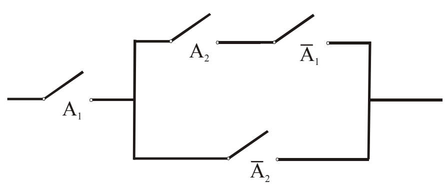
Cvičenie 7.12. Zostrojte spínacie funkcie pre spínacie obvody

(a)



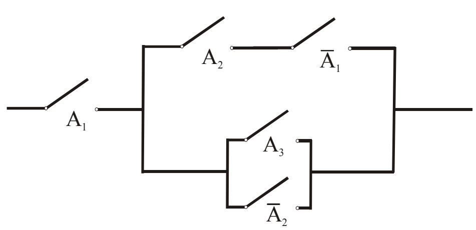
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1(x_2+x_3)$

(b)



$f(x_1,x_2)=x_1(x_2\overline{x}_1+\overline{x}_2)=x_1\overline{x}_2$

(c)

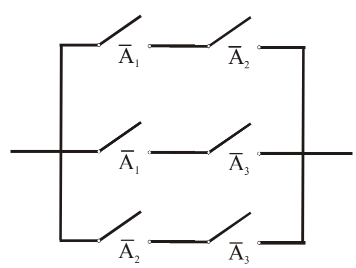


$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\left(x_2\overline{x}_1+(x_3+\overline{x}_2)\right)=x_1(x_3+\overline{x}_2)$

Cvičenie 7.13. Ústredné kúrenie v rodinnom dobe je riadené troma termostatmi, ktoré sú umiestnené v každej izbe domu. termostaty sú nastavené na 18°C, pričom z dôvodu šetrenia energiou sa požaduje, aby systém ústredného kúrenia bol zapnutý len ak teplota aspoň v dvoch izbách je menšia ako 18°C, v opačnom prípade systém je vypnutý. Navrhnite spínačový systém, ktorý prijíma signály z termostatov a ktorý riadi ústredné kúrenie. Pokúste sa minimalizovať navrhnutý systém, aby bol čo najjednoduchší.

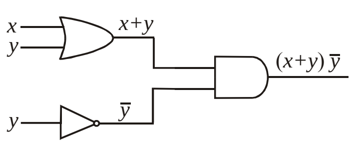
x_1	x_2	x_3	$F(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\ &= \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2\underbrace{(\bar{x}_3+x_3)}_{1}+\bar{x}_1\underbrace{(x_2+\bar{x}_2)}_{1}\bar{x}_3+\underbrace{(\bar{x}_1+x_1)}_{1}\bar{x}_2\bar{x}_3 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_3+\bar{x}_2\bar{x}_3\end{aligned}$$



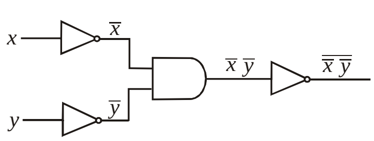
Cvičenie 7.14. Zostrojte tabuľku výstupov logických obvodov

(a)



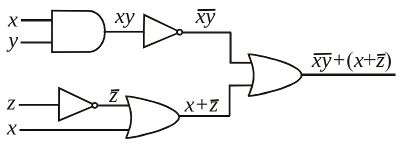
x	y	$\bar{y}$	$x+y$	$(x+y)\bar{y}$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

(b)



x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{\overline{x}\,\overline{y}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

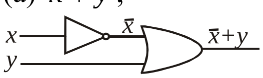
(c)



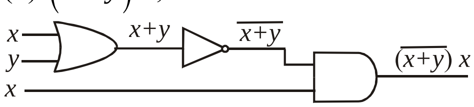
x	y	z	xy	$\overline{xy}$	$\overline{z}$	$x+\overline{z}$	$\overline{xy}+\left(x+\overline{z}\right)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Cvičenie 7.15. Zostrojte logické obvody, ktoré simulujú Boolove funkcie

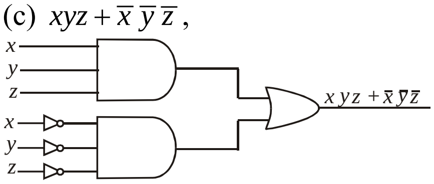
(a) $\overline{x}+y$,



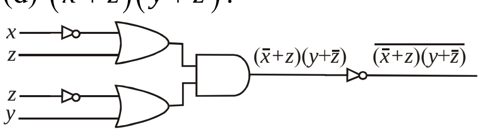
(b) $\left(\overline{x+y}\right)x$,



(c) $xyz+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$,

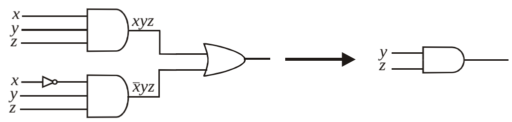


(d) $\overline{\left(\overline{x}+z\right)\left(y+\overline{z}\right)}$.



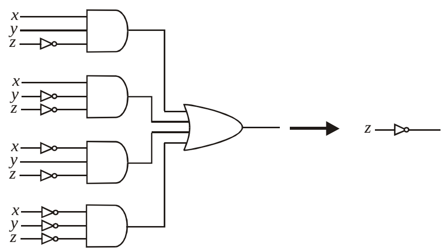
Cvičenie 7.16. Zjednodušte logické obvody

(a)



$$f\left(x,y,z\right)=xyz+\overline{x}yz=\left(x+\overline{x}\right)yz=yz$$

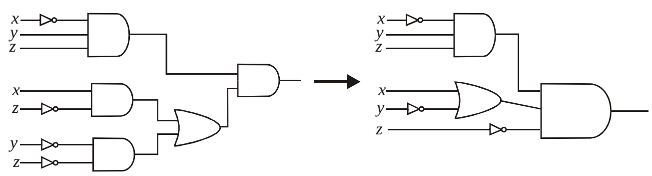
(b)



$$f\left(x,y,z\right)=xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}=xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\left(y+\overline{y}\right)\overline{z}=xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,\overline{z}$$

$$=x\left(y+\overline{y}\right)\overline{z}+\overline{x}\,\overline{z}=x\overline{z}+\overline{x}\,\overline{z}=\overline{z}$$

(c)



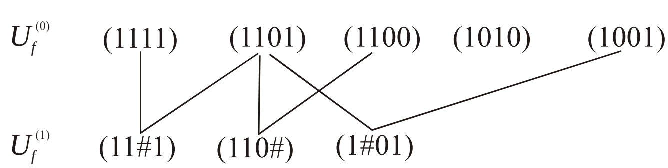
$$f\left(x,y,z\right)=\overline{x}yz\cdot\left(x\overline{z}+\overline{y}\,\overline{z}\right)=\overline{x}yz\left(x+\overline{y}\right)\overline{z}$$

Táto Boolova funkcia sa identicky rovná „nule“, čo jasne plynie z upravenej pravej strany, ktorá v konjunkcii obsahuje premennú z a jej negáciu $\overline{z}$. Preto obvod, ktorý ju simuluje, môže byť pokladaný za „podivný“.

Cvičenie 7.17. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

(a) $wxyz+wx\overline{y}z+wx\overline{y}\,\overline{z}+w\overline{x}y\overline{z}+w\overline{x}\,\overline{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(11#1)
2	(1101)		2	(2,3)	(110#)
3	(1100)		3	(2,5)	(1#01)
4	(1010)				
5	(1001)				



Klauzule z 1. etapy sú minimálne a pokrývajú až na 4. klauzulu všetky klauzuly z 0. etapy, preto vyberieme klauzuly ktoré pokrývajú pôvodnú množinu klauzúl takto

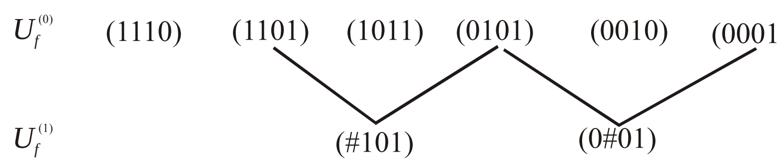
$$\tilde{V}=\{(11\#1),(110\#),(1\#01),(1010)\}$$

Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar

$$f(w,x,y,z)=wxz+wx\overline{y}+w\overline{y}z+w\overline{x}y\overline{z}$$

(b) $wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}yz+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$,

0. etapa			1. etapa		
1	(1110)		1	(2,4)	(#101)
2	(1101)		2	(4,6)	(0#01)
3	(1011)				
4	(0101)				
5	(0010)				
6	(0001)				

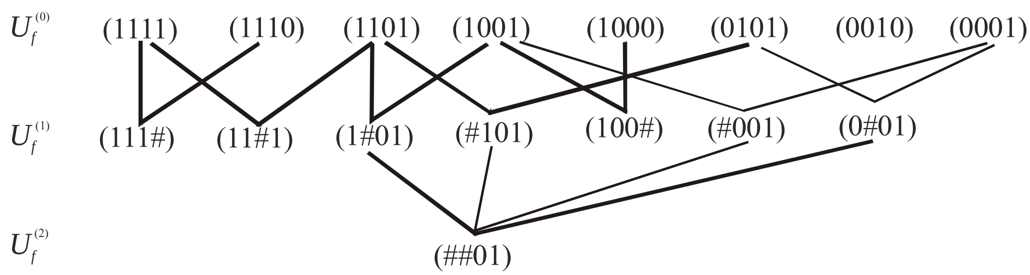


$$\tilde{V}=\{(\#101),(0\#01),(1110),(1011),(0010)\}$$

$$f(w,x,y,z)=x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{y}z+wxy\overline{z}+w\overline{x}yz+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$

(c) $wxyz+wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$.

0. etapa			1. etapa				2. etapa		
1	(1111)		1	(1,2)	(111#)		1	(3,7)	(##01)
2	(1110)		2	(1,3)	(11#1)		2	(4,6)	(##01)
3	(1101)		3	(3,4)	(1#01)				
4	(1001)		4	(3,6)	(#101)				
5	(1000)		5	(4,5)	(100#)				
6	(0101)		6	(4,8)	(#001)				
7	(0010)		7	(6,8)	(0#01)				
8	(0001)								



$$\tilde{V} = \{(111\#), (\#\#01), (100\#), (0010)\}$$

$$f(w,x,y,z) = wxy + \overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y} + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$$