Cvičenia

Cvičenie 8.1. Stanovte typ matice jej názov

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $t=(2,2)$, štvorcová matica

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $t=(2,4)$, obĺžniková matica

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $t=(1,4)$, riadkový vektor

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t=(3,1)$, stĺpcový vektor.

Cvičenie 8.2. Nájdite hodnoty a, b, c a d tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 3a & -b \\ c & 2d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

musí platiť:

$3a=1 \Rightarrow a=1/3$, $-b=3 \Rightarrow b=-3$, $c=$ -1, $2d+1=2 \Rightarrow d=1/2$.

Cvičenie 8.3. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

(a) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je symetrická matica}\}$,

Pravdivé tvrdenie, každá jednotková matica je aj symetrická matica.

(b) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je symetrická matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$,

Nepravdivé tvrdenie, symetrická matica nemusí byť diagonálnou maticou.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{\boldsymbol{A};\ A\ \textit{je jednotková matica}\}$,

Pravdivé tvrdenie, pretože $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matica.

(d) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je štvorcová matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$,

Nepravdivé tvrdenie, pretože štvorcová matica nemusí byť diagonálna matica.

(e) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\} \subset \{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$.

Pravdivé tvrdenie, pretože jednotková matica je aj diagonálna matica.

Cvičenie 8.4.

(a) Zostrojte matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ a $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$, typu (3,2), pre ktoré platí

$$A_{ij} = i - j,\ B_{ij} = i - 2j,\ C_{ij} = 4i + 3j.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 14 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

(b) Zostrojte maticu $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ typu (4,4), ktorá je symetrická a má tieto vlastnosti:

$$A_{ii} = i^2,\ A_{13} = A_{24} = 0,\ A_{14} = 3,\ A_{12} = A_{23} = A_{11} + A_{22},\ A_{34} = A_{23} - A_{14}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

(c) Zostrojte maticu, ktorá je súčasne riadkovým a stĺpcovým vektorom.
Matica typu (1,1), $A = (a_{11})$

(d) Nájdite x a y pre maticu

$$\boldsymbol{A} = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} x+y & 10 \\ 2x-y & 4 \end{pmatrix}$$

pre $A_{11} = A_{22}$ a $A_{12} = A_{21}/2$.
$x + y = A_{11}$, $2x - y = A_{21}$, $A_{22} = 4$, $A_{12} = 10$.
Potom platí $x + y = 4$, $2x - y = 20$, sčítaním týchto rovníc dostaneme $3x = 24 \Rightarrow x = 8$, potom z prvej rovnice dostaneme $y = -4$. Matica A má potom tvar

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičenie 8.5. Zostrojte transponované matice k maticiam

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.6. Pre matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)

(a) $2\boldsymbol{A}$, $2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$, neexistuje, pretože matice sú rôzneho typu.

(d) $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

(e) $\boldsymbol{CB}$, neexistuje, pretože matice typu (2,3) a (2,2) nie je možné násobiť.

(f) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.7.

Pre maticu $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ riešte rovnicu

$$2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$

kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}$$

Cvičenie 8.9. Pre riadkové vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ spočítajte $\boldsymbol{uv}^T$ (ak existuje) pre

(a) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{uv}^T=1\cdot 0-2\cdot 2+0\cdot 0-1\cdot 2=-4-2=-6$

(b) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{uv}^T=3$

(c) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{uv}^T=-3$

Cvičenie 8.10. Dokážte pre $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_n\end{pmatrix}$ platí $\boldsymbol{uu}^T\geq 0$, pričom rovnosť platí len pre nulový vektor.

$\boldsymbol{uu}^T=u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2\geq 0$, rovná sa nule len pre $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.11. Pre každú dvojicu matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ určite ich typ a či súčin matíc existuje, ak existuje, tak ho vypočítajte.

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$,

$t(A)=(3{,}2)$, $t(B)=(2{,}3)$, $AB=\begin{pmatrix}17 & 8 & 7\\ 2 & 3 & 0\\ 32 & 13 & 14\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$,

$t(A)=(2{,}2)$, $t(B)=(3{,}2)$, súčin AB neexistuje.

(c) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\\ 3 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$,

$t(A)=(1{,}4)$, $t(B)=(4{,}2)$, $AB=\begin{pmatrix}29 & 3\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.12.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ a $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, vypočítajte

(a) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$,

(b) $3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-18 & -15\\ -12 & 3\end{pmatrix}$,

(c) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$,

(d) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

(e) $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}8 & -13\\ 4 & -5\end{pmatrix}$,

(f) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})=\begin{pmatrix}6 & 21\\ 6 & 9\end{pmatrix}$,

(g) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -11\\ -4 & 5\end{pmatrix}$,

(h) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

(i) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -14 & -2\end{pmatrix}$,

(j) $(\boldsymbol{AB})^T=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.13.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sú diagonálne matice, vypočítajte $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{B}^2$.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Cvičenie 8.14. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica, potom $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ je symetrická matica.
Nech $C=A+A^T$, potom $C_{ij}=A_{ij}+A_{ij}^T=A_{ij}+A_{ji}$, potom $C_{ij}=C_{ji}$, $\boldsymbol{C}$ je symetrická matica.

Cvičenie 8.15. Dokážte tieto vlastnosti transponovanej matice:

(a) $\left(\boldsymbol{A}^T\right)^T=\boldsymbol{A}$,

Nech $B=A^T$, potom $B_{ij}^T=B_{ji}=A_{ji}^T=A_{ij}$.

(b) $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$,

Nech $C=A+B$, potom $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$, alebo $C_{ij}^T=C_{ji}=A_{ji}+B_{ji}=A_{ij}^T+B_{ij}^T$

(c) $\left(\boldsymbol{AB}\right)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$,

Nech $C=AB$, potom $C_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}\Rightarrow C_{ij}^T=C_{ji}=\sum_k A_{jk}B_{ki}=\sum_k B_{ik}^T A_{kj}^T\Rightarrow C^T=B^T A^T$

Cvičenie 8.16. Stanovte hodnosť matíc

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $h(A)=3$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $h(A)=3$.

(c) Pre ktoré hodnoty p, má matica $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & -1\end{pmatrix}$ hodnosť 1?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & -1\end{pmatrix}\cdot(-p) \sim \begin{pmatrix}-p & -2p\\ p & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-p & -2p\\ 0 & -1-2p\end{pmatrix}$$

Trojuholníková matica na pravej strane má $h(A) = 1$ len vtedy, ak druhý riadok je nulový, čiže $p = -1/2$.

(d) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $h(A) = 3$.

(e) Pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ p & 1 & 1 & 1\\ q & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$ hodnosť 2?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ p & 1 & 1 & 1\\ q & 1 & -3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & p & 1 & 1\\ 1 & q & -3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & q & -3 & 3\\ \boxed{1} & 2 & -1 & 2\\ \boxed{1} & p & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & q & -3 & 3\\ 0 & 2-q & 2 & -1\\ 0 & p-q & 4 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & q\\ 0 & -1 & 2 & 2-q\\ 0 & \boxed{-2} & 4 & p-q\\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & q\\ 0 & -1 & 2 & 2-q\\ 0 & 0 & 0 & -4+p+q\\ 0 & 0 & 0 & -1+q\end{pmatrix}$$

Ak v poslednej matici položíme $p = 3$ a $q = 1$, potom matica má tvar v ktorom sú posledné dva riadky nulové

$$A \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

To znamená, že $h(A) = 2$ pre $p = 3$ a $q = 1$.

Cvičenie 8.17. Nájdite inverznú maticu (ak existuje) k matici:

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}7/8 & 9/2 & -5/4\\ 3/8 & 3/2 & -1/4\\ 1/4 & 2 & -1/2\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$, matica nie je rugulárna, $h(A) < 3$, inverzná matica neexistuje.

(c) $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

(d) $A=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/4 & 2\\ -1/4 & 1\end{pmatrix}$.

(e) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, matica nie je rugulárna, $h(A)<2$, inverzná matica neexistuje.

(f) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(g) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, matica nie je rugulárna, $h(A)<3$, inverzná matica neexistuje.

(h) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1 & -1/2\\ -1 & 2 & 0\\ -5/2 & 4 & -1/2\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.18. Dokážte matematickou indukciou formulu
$\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n\right)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\ldots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

Východiskový indukčný predpoklad je $\left(A_1A_2\right)^{-1}=A_2^{-1}A_1^{-1}$. Predpokladajme, že formula platí pre n-1, $\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_{n-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\ldots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$. Potom

$$\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n\right)^{-1}=\left(\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_{n-1}\right)\boldsymbol{A}_n\right)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_{n-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\ldots\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

Cvičenie 8.19. Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ sú štvorcové matice rovnakého typu (n,n). Dokážte, že ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom zo vzťahu $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ vyplýva $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.
Z predpokladu regulárnosti matice $\boldsymbol{A}$ vyplýva existencia inverznej matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, potom rovnicu $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ môžeme zľava vynásobiť inverznou maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AB}\right)=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AC}\right)\Rightarrow\underbrace{\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{B}=\underbrace{\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{EC}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

Cvičenie 8.20. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové maticerovnakého typu (n,n) a $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$.

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\underbrace{\boldsymbol{AA}^{-1}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$$

Cvičenie 8.21. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu (n,n) a $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^n=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$, každé kladné celé číslo n.
Dôkaz vykonáme pomocou indukcie, v predchádzajúcom príklade bola dokázaná formula pre $n=2$, nech formula platí pre $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^{n-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{n-1}\boldsymbol{A}$, potom

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^n=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^{n-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{n-1}\boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$$

Cvičenie 8.22. Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, ukážte, že $\left(\boldsymbol{A}^n\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^n$.

Dôkaz vykonáme pomocou indukcie, musíme dokázať, že táto formula platí aj pre hodnotu $n=2$, $\left(\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$. Pretože inverzná matica existuje jednoznačne, potom predpokladajme, že platí $\left(\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$, správnosť tejto formuly dokážeme tak, že preveríme dosadením platnosť $A^2\left(A^2\right)^{-1}=AAA^{-1}A^{-1}=E$; podobne by sme dokázali aj $\left(A^2\right)^{-1}A^2=A^{-1}A^{-1}AA=E$.

Nech platí formula $\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n-1}$, potom

$$\left(\boldsymbol{A}^n\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{n-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^n,$$

čo bolo potrebné dokázať.

Cvičenie 8.23. Nech matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ majú blokovú štruktúru

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|ccc}4 & 2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 0 & -2 & 3\end{array}\right) \text{ a } \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & -1\\ \hline 3 & -2 & 0\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Potom ich formálne môžeme písať v tvare

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix} \text{ a } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$$

Vypočítajte $\boldsymbol{AB}$ a ukážte

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4\end{pmatrix}$$

Ukážte taktiež

$$\boldsymbol{B}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1^T & \boldsymbol{B}_3^T\\ \boldsymbol{B}_2^T & \boldsymbol{B}_4^T\end{pmatrix}$$

Dôkaz prvej formuly vyplýva priamo z definície súčinu matíc, druhá formula vyplýva priamo z definície transponovanej matice.

Cvičenie 8.24.

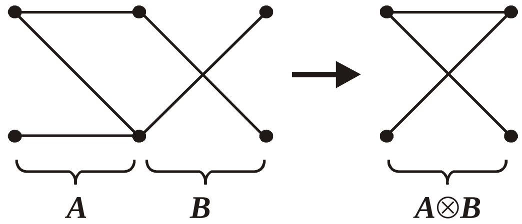
Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

(C) $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Tento výsledok môžeme jednoducho graficky znázorniť pomocou grafickej reprezentácie matíc A a B ako binárnych relácií (pozri obr. 8.6)



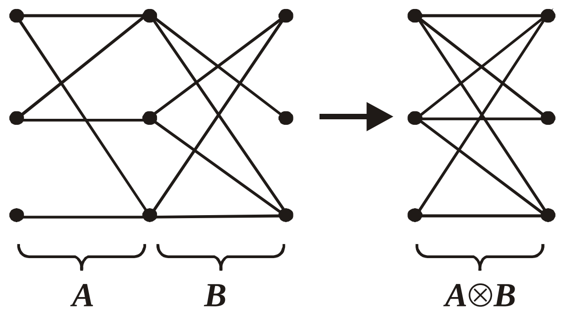
Cvičenie 8.25.

Nech $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(C) $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$



Cvičenie 8.26. Nech **A** je binárna matica, dokážte $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. Tieto vlastnosti vyplývajú zo skutočnosti, že operácie konjunkcie a disjunkcie sú idepotetné, čiže $x\wedge x=x$ a $x\vee x=x$.