8. kapitola

Maticová algebra I – definícia matice, špeciálne matice, maticová algebra, hodnosť matice, inverzná matica

8.1 Definícia matice

V mnohých prípadoch dáta majú štruktúru dvojrozmernej tabuľky, ktorá má m riadkov a n stĺpcov. Jednoduchý príklad dát tohto druhu je tabuľka, ktorá pre päť študentov označených A, B, C, D a E obsahuje známky v bodoch (v rozsahu 0 až 100) z predmetov Matematika, Logika a Programovanie.

		predmet		
		Matematika	Logika	Programovanie
študent	A	88	98	67
	B	75	91	73
	C	92	81	75
	D	98	100	98
	E	55	61	82

Riadky tejto tabuľky sú priradené jednotlivým študentom, zatiaľ čo stĺpce sú priradené predmetom. Na priesečníku daného riadku (študent – predmet) je uvedený počet bodov, ktoré získal daný študent pre daný predmet. Ak z tejto tabuľky odstránime redundantný popis riadkov a stĺpcov dostávame matematickú štruktúru, ktorá sa nazýva ***matica***

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \\ 75 & 91 & 73 \\ 92 & 81 & 75 \\ 98 & 100 & 98 \\ 55 & 61 & 82 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

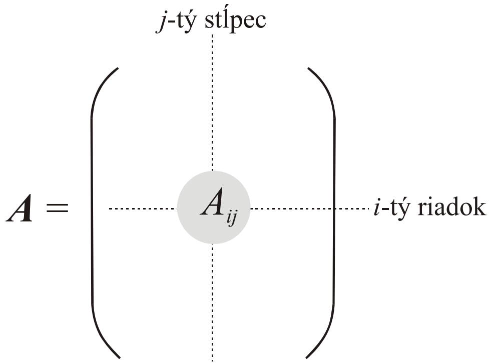
Definícia 8.1. Nech $I=\{1,2,...,m\}$ je množina riadkových indexov a $J=\{1,2,...,n\}$ je množina stĺpcových indexov, pričom m a n sú kladné celé čísla, $m,n\geq 1$. ***Maticou*** nazývame množinu obsahujúcu $m\cdot n$ čísel, ktoré sú špecifikované riadkovým (i) a stĺpcovým (j) indexom

$$\boldsymbol{A}=\{A_{ij}\ ; i\in I, j\in J\} \tag{8.2}$$

Typ matice je usporiadaná dvojica kladných prirodzených čísel, ktoré sú rovné mohutnostiam množín indexov I a J

$$t(\boldsymbol{A})=(m,n) \tag{8.3}$$

Štruktúra matice $\boldsymbol{A}$ môže byť jednoducho znázornená pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov, pričom na priesečníku i-tého riadku a j-tého stĺpca je umiestnený prvok A_{ij}, pozri obr. 8.1. a formulu (8.1).



Obrázok 8.1. Znázornenie matice $\boldsymbol{A}$ pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov.

Niekedy sa používa aj „skratkové" označenie pre maticu $\boldsymbol{A} = \left(A_{ij}\right)$, pričom sa implicitne predpokladá počet riadkov a stĺpcov tejto matice.

Príklad 8.1. Určite typ matice:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{A}\right) = \left(2,2\right)$.

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{A}\right) = \left(2,3\right)$.

(c) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{B}\right) = \left(1,4\right)$.

(d) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{X}\right) = \left(3,1\right)$.

Základná terminológia

(1) Ak m=n, matica sa nazýva ***štvorcová***, v opačnom prípade sa matica nazýva ***obdĺžniková***.

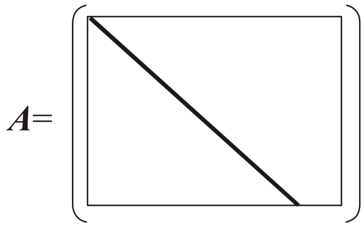
(2) Prvky A_{ii} matice $\boldsymbol{A}$ sa nazývajú ***diagonálne***, všetky diagonálne prvky tvoria (***hlavnú***) ***diagonálu*** matice, pozri obr. 8.2.

(3) Ak všetky prvky matice sú nuly, potom sa matica nazýva ***nulová matica***.

(4) Štvorcová matica, ktorá mimo diagonály má nulové prvky a na diagonále má aspoň jeden nenulový prvok sa nazýva ***diagonálna matica***.

(5) Špeciálny prípad diagonálnej matice je ***jednotková matica*** (budeme ju značiť $\boldsymbol{E}$), kde všetky diagonálne prvky sú jednotky

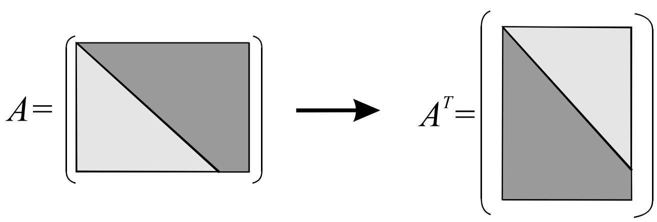
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{pre } i = j) \\ 0 & (\text{pre } i \neq j) \end{cases}$$



Obrázok 8.2. Znázornenie diagonálnych prvkov v matici ***A***, ktorá je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$. Diagonála začína v prvku A_{11} a končí v prvku A_{mm} (ak $m \le n$), alebo v prvku A_{nn} (ak $m > n$). V prípade, že matica je štvorcová ($m = n$), potom diagonála začína v ľavom hornom rohu a končí v pravom dolnom rohu matice.

(6) Nech ***A*** je matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$, potom matica ***transponovaná*** k tejto matici, označená $\boldsymbol{A}^T$, sa vytvorí z matice ***A*** tak, že vzájomne zameníme stĺpce za riadky a naopak, potom $t(\boldsymbol{A}^T) = (n,m)$ (pozri obr. 8.3). Názorne hovoríme, že matica $\boldsymbol{A}^T$ vznikla z matice ***A*** jej preklopením (otočením o 180°) okolo diagonály. Transponovaná matica je ilustrovaná príkladom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$



Obrázok 8.3. Schematické znázornenie vzniku transponovanej matice $\boldsymbol{A}^T$ pootočením pôvodnej matice ***A*** okolo diagonály.

(7) Štvorcová matica sa nazýva ***symetrická*** matica, ak platí $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$. Jednoduchý príklad symetrickej matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

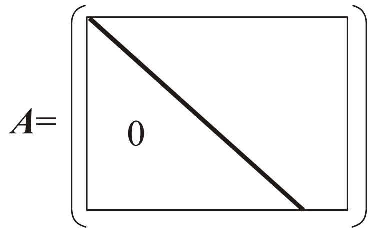
(8) Matica ***A*** typu (m,n) sa nazýva ***trojuholníková matica***[1]**,** ak pod diagonálou má nulové prvky a na diagonále má nenulové prvky (pozri obr. 8.4)

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (\text{pre } i > j, \text{ pod diagonálou sú nulové prvky}) \\ \neq 0 & (\text{pre } i = j, \text{ na diagonále sú nenulové prvky}) \end{cases}$$

Ilustračný príklad trojuholníkovej matice je

[1] V anglickej literatúre sa bežne ako trojuholníková matica berie iba matica typu (n,n).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Obrázok 8.4. Schematické znázornenie trojuholníkovej matice, ktorej prvky na diagonále sú nenulové a pod diagonálou má len nulové prvky.

(9) Ak matica $\boldsymbol{A}$ typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$ má počet riadkov (m) alebo počet stĺpcov (n) rovný 1, potom takáto špeciálna matica sa nazýva ***riadkový vektor*** (m = 1) resp. ***stĺpcový vektor*** (n = 1). Príklady riadkovej a stĺpcovej matice sú

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aplikáciou operácie transpozície, stĺpcový vektor sa mení na riadkový vektor a naopak, pre predchádzajúce dve matice dostaneme

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pomocou riadkových alebo stĺpcových vektorov môžeme vyjadriť každú maticu ako „kompozíciu“ týchto elementárnych matíc. Nech $\boldsymbol{A}$ je matica (8.1) typu $t(\boldsymbol{A})$ = (5,3). Definujme päť riadkových vektorov

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{r}_2 &= \begin{pmatrix} 75 & 91 & 73 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{r}_3 &= \begin{pmatrix} 92 & 81 & 75 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{r}_4 &= \begin{pmatrix} 98 & 100 & 98 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{r}_5 &= \begin{pmatrix} 55 & 61 & 82 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a tri stĺpcové vektory

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 88 \\ 75 \\ 92 \\ 98 \\ 55 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 98 \\ 91 \\ 81 \\ 100 \\ 61 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 67 \\ 73 \\ 75 \\ 98 \\ 82 \end{pmatrix}$$

Pomocou týchto vektorov vyjadríme maticu $\boldsymbol{A}$ (8.1) dvoma alternatívnymi spôsobmi takto

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_4 \\ \boldsymbol{r}_5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_2 & \boldsymbol{s}_3 \end{pmatrix}.$$

8.2 Operácie nad maticami

Nad maticami je možné definovať rôzne binárne operácie, pomocou ktorých sa definuje tzv. algebra matíc, ktorá podstatne uľahčuje a zefektívňuje ich aplikácie v matematike.

Definícia 8.2.
(1) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$. Hovoríme, že tieto matice sa ***rovnajú***, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(A_{ij} = B_{ij}\right) \tag{8.4}$$

(2) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{B}$ je ***α-násobkom*** matice A, $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{A}$, vtedy a len vtedy, ak

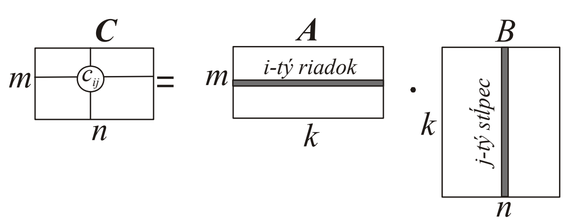
$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(B_{ij} = \alpha\, A_{ij}\right) \tag{8.5}$$

(3) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ a $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je ***súčtom*** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}\right) \tag{8.6}$$

(4) Matica $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,k)$, matica $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{B}) = (k,n)$ a matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je ***súčinom*** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall\left(i \in I\right)\forall\left(j \in J\right)\left(C_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip}B_{pj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ik}B_{kj}\right) \tag{8.7}$$



Obrázok 8.5. Znázornenie súčinu matíc $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ pomocou súčinu riadkového vektora matice $\boldsymbol{A}$ a stĺpcového vektora matice $\boldsymbol{B}$.

Najzložitejšia binárna operácia je súčin dvoch matíc. Definícia (8.7) súčinu dvoch matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ môže byť podstatne zjednodušená použitím riadkových vektorov matice $\boldsymbol{A}$ a stĺpcových vektorov matice $\boldsymbol{B}$ (pozri obr. 8.5). Nech $\boldsymbol{r}_i$ je i-tý riadkový vektor matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{s}_j$ je j-tý stĺpcový vektor matice $\boldsymbol{B}$, potom prvok C_{ij} je zadaný takto

$$C_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \dots \\ B_{kj} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip} B_{pj} \tag{8.8}$$

Príklad 8.2. Násobenie matíc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Definujme riadkové vektory matice ***A*** a stĺpcové vektory matice ***B***

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Potom prvky matice ***C*** = ***AB*** sú určené takto

$$C_{11} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (2)(1) = 1$$

$$C_{12} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(2) = 4$$

$$C_{21} = \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) + (3)(1) = 4$$

$$C_{22} = \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)(0) + (3)(2) = 6$$

Potom súčin ***AB*** je určený

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Podobným spôsobom zostrojíme aj maticu ***BA***

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Vo všeobecnosti platí, že **súčin matíc nie je komutatívna operácia** (pozri príklad 8.2)

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{8.9a}$$

Ďalšia dôležitá vlastnosť je, že jednotková matica E pôsobí ako „jednotka“ pre maticový súčin

$$\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{AE} = \boldsymbol{A} \tag{8.9b}$$

Základné vlastnosti súčtu a súčinu matíc možno zosumarizovať do tvaru tzv. „maticovej algebry“:

(1) Súčet matíc je komutatívny

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{8.10a}$$

(2) Súčet a súčin je asociatívny

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C},\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

(8.10b)

(3) Súčin je distributívny vzhľadom k súčtu matíc

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC} \tag{8.11a}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} \tag{8.11b}$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A} \tag{8.11c}$$

$$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B} \tag{8.11d}$$

(4) Asociatívnosť operácie násobenia matice číslom vzhľadom k operácii súčin matíc

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})=\alpha(\boldsymbol{AB}) \tag{8.12a}$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{A})=(\alpha\beta)\boldsymbol{A} \tag{8.12b}$$

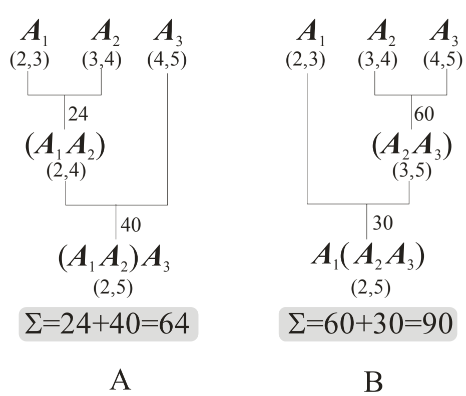
Algoritmus pre násobenie matíc

Nech matica $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,k)$, matica $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{B}) = (k,n)$ a matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Podľa definície 8.2 prvky matice $\boldsymbol{C}$ sú určené vzťahom (8.7), ktorý môže slúžiť aj ako algoritmický podklad pre implementáciu programu pre násobenie dvoch matíc (pozri algoritmus 8.1 napísaný v pseudokóde Pascalu).

Algoritmus 8.1.

```
procedure matrix_multiplication(A,B,C : matrices);
for i:=1 to m do
for j:=1 to n do
begin sum:=0;
      for p:=1 to k do sum:=sum+A[i,p]*B[p,j];
      C[i,j]:=sum;
end;
```

Vypočítať jeden prvok C_{ij} podľa (8.7) vyžaduje k súčinov a $(k–1)$ súčtov (vyššie uvedený algoritmus má pre `p=1` zbytočný súčet, čo je vyvážené jednoduchosťou pseudokódu). Pretože matica $\boldsymbol{C}$ má mn prvkov, potom algoritmus vyžaduje kmn súčinov a $(k–1)mn$ súčtov. Môžeme teda konštatovať, že zložitosť algoritmu rastie úmerne n^3, pričom sa predpokladá, že dimenzie matíc sú si rovné, $k = m = n$. Je prekvapujúce, že už tak jednoduchý algoritmus ako tento môže byť akcelerovaný. V 60-tych rokoch minulého storočia bol navrhnutý algoritmus, ktorého zložitosť rastie $n^{\sqrt{7}}$, pretože $\sqrt{7} < 3$, tento nový algoritmus je o trochu efektívnejší ako náš algoritmus 8.1. Tento vylepšený algoritmus sa stáva efektívnejším ako klasický algoritmus 8.1 až pre dimenzie matíc rádovo tisíc.



Obrázok 8.6. Výpočet súčinu troch matíc pre dve rôzne zátvorkovania. V prvom prípade A je potrebných 64 súčinov, zatiaľ čo v druhom prípade B je potrebných 90 súčinov. To znamená, že pre výpočet súčinu troch

daných matíc musíme preferovať zátvorkovanie $(A_1A_2)A_3$, ktoré vyžaduje menej elementárnych súčinov než ako druhé zátvorkovanie $A_1(A_2A_3)$.

Problém násobenia reťazca matíc

Pretože násobenie matíc je asociatívna operácia, nezáleží na zátvorkovaní jednotlivých medzivýsledkov. Tak napríklad pre výpočet súčinu troch matíc $A_1A_2A_3$ existujú dva rôzne spôsoby zátvorkovania, avšak v dôsledku asociativity súčinu matíc musí platiť $(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)$. Preto by sme sa mohli domnievať, že z pohľadu algoritmizácie tohto problému výpočtu súčinu reťazca matíc (ktorých dimenzie sú také, že ich súčin existuje) je irelevantný spôsob zátvorkovania. Žiaľ nie je to pravda, aj keď výsledná matica je invariantná vzhľadom k zátvorkovaniu, numerická náročnosť (napríklad celkový počet elementárnych súčinov maticových prvkov) výpočtu je už závislá od spôsobu zátvorkovania. Zvoľme tieto jednoduché typy matíc: $t(A_1)=(2,3)$, $t(A_2)=(3,4)$ a $t(A_3)=(4,5)$. Výpočet súčinov týchto troch matíc je znázornený na obr. 8.6. Z tohto jednoduchého ilustračného príkladu vyplýva, že pre výpočet súčinu reťazca matíc existuje optimálne zátvorkovanie medzivýsledkov, ktoré poskytuje minimálny počet elementárnych súčinov pre výpočet celého reťazca matíc.

Uvažujme n matíc $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ktoré sú typu $t(A_i) = (p_i,q_i)$, pričom pre susedné matice A_i a A_{i+1} musia byť splnené podmienky, aby existoval ich súčin $q_i = p_{i+1}$, kde typ súčinu týchto matíc je $t(A_iA_{i+1}) = (p_i,q_{i+1})$. Pre výpočet maticového súčinu A_iA_{i+1} je potrebných

$$m(A_iA_{i+1}) = p_i \times q_i \times q_{i+1} \tag{8.13}$$

elementárnych súčinov. Týmto sme dospeli k formulácii nasledujúceho problému: ***Ako určiť zátvorkovanie súčinu n matíc $A_1A_2\ldots A_n$ tak, aby počet elementárnych súčinov pri výpočtu súčinu tohto reťazca matíc bol minimálny?***

V prvom kroku upriamime našu pozornosť na enumeračný problém určenia počtu rôznych zátvorkovaní reťazca matíc $A_1A_2\ldots A_n$. Označme počet možných zátvorkovaní reťazca matíc $A_1A_2\ldots A_n$ symbolom $P(n)$. Vytváranie zátvorkovania môžeme uskutočniť jednoduchým rekurentným spôsobom. Nech U_k je množina, ktorá obsahuje reťazce k matíc pre rôzne zátvorkovania, kde $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Potom množinu U_n vytvoríme tak, že pre všetky možné dvojice podmnožín U_{n-k} a U_k vytvoríme možné zátvorkovanie

$$U_n = \overbracket{U_1U_{n-1}} \cup \overbracket{U_2U_{n-2}} \cup \ldots \cup \overbracket{U_{n-2}U_2} \cup \overbracket{U_{n-1}U_1} \tag{8.14}$$

Potom počet rôznych zátvorkovaní reťazca n matíc je

$$P(n) = \begin{cases} 1 & (\text{pre } n=1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & (\text{pre } n \geq 1) \end{cases} \tag{8.15a}$$

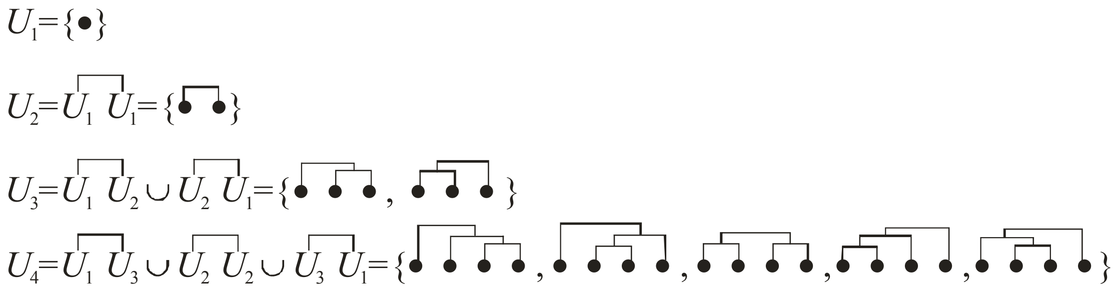
Bolo ukázané, že počet zátvorkovaní je určený pomocou binomického koeficientu

$$P(n) = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n)!(n-1)!} \tag{8.15b}$$

Prvé hodnoty $P(n)$ sú

$$P(1)=1, P(2)=1, P(3)=2, P(4)=5, P(5)=14, \ldots$$

Na obrázku 8.7 je znázornený rekurentný postup konštrukcie množín U_1, U_2, U_3 a U_4.

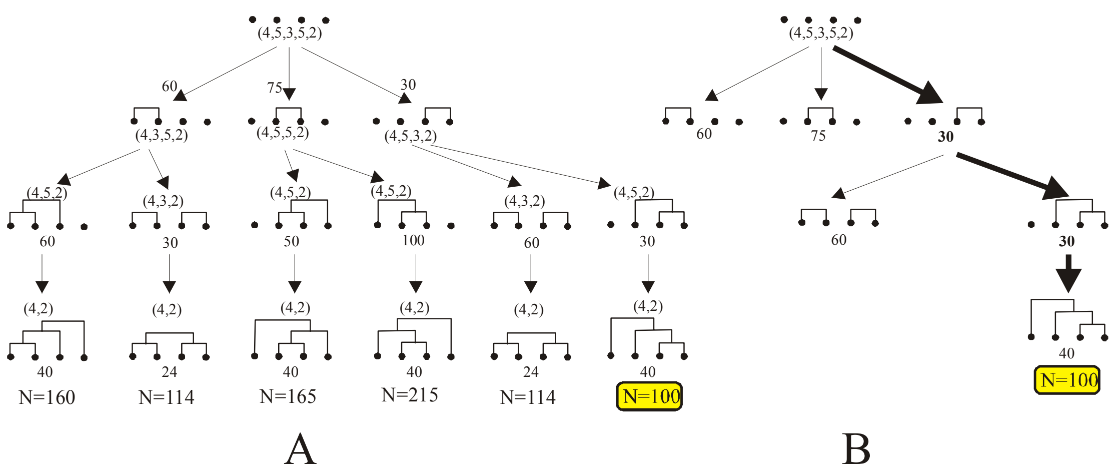


Obrázok 8.7. Rekurentný postup konštrukcie prvých štyroch množín U_1, U_2 , U_3 a U_4.

Konštrukciu optimálneho zátvorkovania budeme realizovať pomocou jednoduchej heuristiky, ktorá sa nazýva „greedy" algoritmus. Pre hľadanie optimálneho zátvorkovania spočíva jeho podstata v tom, že postupne v danej etape vyberieme také zátvorky, ktoré poskytujú minimálny výsledok, tento postup opakujeme tak dlho, až zostrojíme kompletné zátvorkovanie celého reťazca $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2...\boldsymbol{A}_n$. Tento postup budeme ilustrovať pomocou reťazca súčinu štyroch matíc $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, ktorých typy nech sú špecifikované takto

$$t\left(\boldsymbol{A}_1\right)=\left(4,5\right), t\left(\boldsymbol{A}_2\right)=\left(5,3\right), t\left(\boldsymbol{A}_3\right)=\left(3,5\right), t\left(\boldsymbol{A}_4\right)=\left(5,2\right)$$

Pre tieto matice vytvoríme postupnosť dimenzií matíc (predpokladáme, že podmienky $q_i = p_{i+1}$ pre existenciu súčinu matíc $\boldsymbol{A}_i\,\boldsymbol{A}_{i+1}$ sú splnené) (4,5,3,5,2), ktorá sa v priebehu algoritmu využíva k výpočtu aktuálneho počtu elementárnych súčinov, pozri obrázok 8.8. V texte, ktorý doprevádza tento obrázok, sú špecifikované aj základné myšlienky „greedy" algoritmu. Z uvedeného ilustračného príkladu vyplýva, že aj napriek jednoduchosti tohto algoritmu je v tomto prípade výsledok totožný s optimálnym výsledkom.



Obrázok 8.8. (A) Ľavý obrázok vyjadruje metódu spätného prehľadávania pre konštrukciu úplného stromu riešení. Vo vrchole tohto stromu je reťazec matíc $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ bez zátvorkovania. Na ďalšej úrovni si vždy zvolíme dvojicu susedných matíc $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_{i+1}$ pre ktoré vykonáme súčin (reprezentovaný spojkou ⌐¬), výsledný počet elementárnych súčinov je uvedený pod každým reťazcom matíc. Tento proces opakujeme tak dlho, až sú vykonané súčiny dvojíc matíc (v tomto prípade tri). Každá vetva stromu riešení nám špecifikuje jedno možné zátvorkovanie pôvodného reťazca matíc, jej výsledné ohodnotenie N je tvorené sumou počtu elementárnych súčinov na každej úrovni stromu. Zo stromu vyplýva, že optimálne zátvorkovanie je $\left(\boldsymbol{A}_1\left(\boldsymbol{A}_2\left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)\right)\right)$, ktoré obsahuje minimálny počet elementárnych súčinov N=100. (B) Pravý obrázok vznikol ako výsek ľavého úplného stromu riešení a reprezentuje podstatu „greedy" algoritmu, ktorá podstatne redukuje veľkosť stromu riešení. Na každej úrovni vyberieme lokálne minimálnu možnosť súčinu susedných matíc. Týmto spôsobom strom riešení

má len jednu úplnú vetvu, ktorá reprezentuje výsledné riešenie „greedy“ algoritmu, v našom prípade celkové ohodnotenie tejto vetvy je N=100, čo je výsledok totožný s presným riešením z celkového stromu riešení.

Na záver tejto podkapitoly poznamenajme, že heuristika „greedy“ je veľmi efektívna, v mnohých prípadoch nám umožňuje jednoducho a rýchlo získať riešenie, ktoré nie je vzdialené od optimálneho riešenia. Možno konštatovať, že patrí medzi najefektívnejšie heuristiky, ako približne riešiť zložité kombinatorické problémy.

Binárne matice

Matica $\boldsymbol{A}$, ktorá obsahuje len binárne prvky 0-1 sa nazýva binárna matica. Algebraické operácie nad takýmito maticami sú založené na logických spojkách konjunkcie a disjunkcie

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & (\text{ak } a = b = 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases} \tag{8.16a}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & (\text{ak } a = 1 \text{ alebo } b = 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases} \tag{8.16b}$$

Nad binárnymi maticami definujeme tri binárne operácie:

(1) Nech $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$, potom matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sa nazýva ***konjunkcia matíc A* a *B***, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$, jej maticové prvky sú

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = A_{ij} \wedge B_{ij}\right) \tag{8.17}$$

(2) Nech $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$, potom matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sa nazýva ***disjunkcia matíc A* a *B***, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$, jej maticové prvky sú

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = A_{ij} \vee B_{ij}\right) \tag{8.18}$$

(3) Nech binárna matica $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,k)$, binárna matica $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{B}) = (k,n)$ a binárna matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je ***súčinom*** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$, jej maticové prvky sú

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = \left(A_{i1} \wedge B_{1j}\right) \vee \left(A_{i2} \wedge B_{2j}\right) \vee \ldots \vee \left(A_{ik} \wedge B_{kj}\right)\right) \tag{8.19}$$

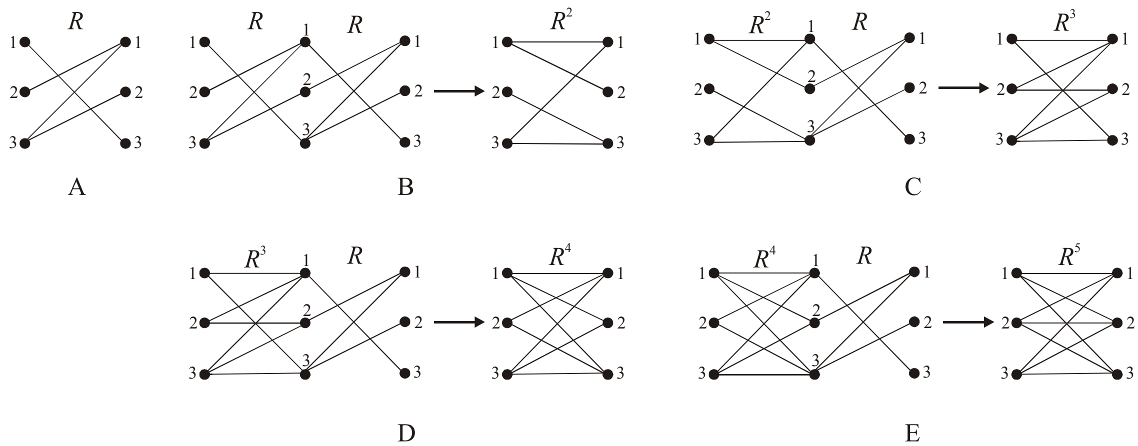
Pretože súčin binárnych matíc je asociatívna operácia, môžeme definovať r-tú mocninu štvorcovej binárnej matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, kde r je kladné celé číslo $r > 1$

$$\boldsymbol{A}^r = \underbrace{\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{A}}_{r-krát} \tag{8.20}$$

Ako interpretovať operácie nad binárnymi maticami? Binárna matica môže byť chápaná ako maticová reprezentácia binárnej relácie $R \subseteq X \times X$, kde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Prvok $A_{ij} \neq 0$ implikuje, že usporiadaná dvojica $(x_i, x_j) \in R$ (pozri kapitolu 3.1). Jednoduchými úvahami je možné dokázať, že matica $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}$ je reprezentáciou kompozície $R^2 = R \circ R$. Formulu (8.16) prepíšeme do tvaru

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = \max_l \min\{A_{il}, B_{lj}\}\right) \tag{8.21}$$

kde sme použili formule $a \wedge b = \min\{a,b\}$ a $a \vee b = \max\{a,b\}$ (pozri kapitolu 11 v učebnom texte *Matematická logika* [xx]). Ak porovnáme (8.21) s definíciou kompozície dvoch binárnych relácií (3.8), dospejeme k záveru, že definícia súčinu binárnej matice (8.19) je formálne totožná s kompozíciou $R^2 = R \circ R$. Pomocou grafovej interpretácie relácie R a jej mocnín (pozri obr. 8.9) môžeme potom alternatívne interpretovať n-té mocniny matice $\boldsymbol{A}$ tak, že ak má jednotkový prvok v pozícii (i,j), potom existuje postupnosť n hrán z i-tého vrcholu grafu do j-tého vrcholu grafu.



Obrázok 8.9. Grafová reprezentácia relácie R (diagram A) a jej mocnín R^2 (diagram B), R^3 (diagram C), R^4 (diagram D) a R^5 (diagram E). Diagramy B – E obsahujú aj rekurentnú tvorbu relácií R^n z predchádzajúceho výsledku R^{n-1}.

Príklad 8.3. Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú binárne matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zostrojte súčin $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad 8.4. Zostrojte všetky mocniny matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V prvom kroku spočítame $\boldsymbol{A}^2$

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupne v ďalších krokoch spočítame vyššie mocniny matice

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2 \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznamenajme, že tieto mocniny matice $\boldsymbol{A}$ môžeme jednoducho určiť pomocou grafovej interpretácie relácie R, pozri obr. 8.9. Potom vyššie mocniny matice $\boldsymbol{A}$ sú určené

$$\forall (n \geq 5)\left(A^n = A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

8.3 Hodnosť matice

Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ je celé kladné číslo označené $h(\boldsymbol{A})$, ktoré patrí medzi dôležité charakteristiky matíc. Než pristúpime k definícii tejto veličiny, zavedieme ďalší dôležitý pojem lineárnej závislosti/nezávislosti stĺpcových (riadkových vektorov). Pre jednoduchosť budeme tieto úvahy uskutočňovať pre stĺpcové vektory, automaticky budú platiť aj pre riadkové vektory, a naopak.

Definícia 8.3. Nech $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ je n stĺpcových (riadkových) vektorov z $\mathbb{R}^p$ (t. j. vektory majú p prvkov). Hovoríme, že tieto vektory sú ***lineárne závislé*** vtedy a len vtedy, ak existujú také koeficienty (čísla) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, z ktorých je aspoň jeden nenulový, aby ich lineárna kombinácia bola rovná nulovému vektoru $\boldsymbol{0}$

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + ... + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{8.22}$$

Veta 8.1. Stĺpcové (riadkové) vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ sú lineárne závislé práve vtedy, ak jeden z nich môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov, napr.

$$\boldsymbol{a}_1 = \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + ... + \beta_n \boldsymbol{a}_n \tag{8.23}$$

Dôkaz tejto vety je veľmi jednoduchý. Na základe definície 8.3 z predpokladu lineárnej závislosti vektorov $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ vyplýva, že aspoň jeden koeficient je nenulový. Predpokladajme, že $\alpha_1 \neq 0$, potom (8.22) môžeme upraviť do tvaru

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_n$$

Týmto sme dokázali, že z predpokladu $\alpha_1 \neq 0$ vyplýva (8.23), čím je dôkaz zavŕšený.

Veta 8.2. Stĺpcové (riadkové) vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ sú ***lineárne nezávislé*** vtedy a len vtedy, ak

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + ... + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{8.24}$$

len pre nulové koeficienty, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Táto veta je jednoduchým dôsledkom definície 8.3.

Príklad 8.5. Majme trojicu stĺpcových vektorov

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ľahko dokážeme, že tieto vektory sú lineárne nezávislé. Uvažujme podmienku (8.24) z vety 8.2.

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnaním posledných vektorov dostaneme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že táto lineárna kombinácia sa rovná nulovému stĺpcovému vektoru len pre nulové koeficienty, potom podľa vety 8.2 vektory sú lineárne nezávislé.

Definícia 8.4. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{A}$ má ***stĺpcovú*** (***riadkovú***) ***hodnosť*** rovnú k vtedy a len vtedy, ak má maximálne k lineárne nezávislých stĺpcových (riadkových) vektorov.

$$h_{s(r)}\left(\boldsymbol{A}\right) = k \tag{8.25}$$

Veta 8.3. Pre každú maticu $\boldsymbol{A}$ typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$ riadková a stĺpcová hodnosť sú rovnaké, pričom hodnosť je zdola ohraničená 0 (pre nulové matice) a zhora ohraničená minimálnou hodnotou m a n

$$0 \le h_s\left(A\right) = h_r\left(A\right) = h\left(A\right) \le min\left\{m,n\right\} \tag{8.26}$$

Príklad 8.6. Majme maticu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riadkové vektory tejto matice majú tvar

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Študujme lineárnu kombináciu

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Koeficienty sú určené rovnicami

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0 \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že riadkové vektory sú lineárne nezávislé, maximálny počet lineárne nezávislých vektorov je 3, t. j. riadková hodnosť matice je 3.

Stĺpcové vektory matice $\boldsymbol{A}$ sú

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich lineárna kombinácia sa rovná nulovému stĺpcovému vektoru

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koeficienty sú určené rovnicami

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostaneme $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory sú lineárne nezávislé, čiže matica ma stĺpcovú hodnosť 3.

Týmto sme dokázali, že matica A má stĺpcovú a riadkovú hodnosť 3, čiže hodnosť matice je 3, $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

Definícia 8.5. Hovoríme, že matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú ***ekvivalentné***, $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú hodnosť, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Veta 8.4. Nech matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ pomocou jednej z týchto 4 operácií:
1. vzájomnou výmenou poradia dvoch riadkov (stĺpcov),
2. vynásobením riadku (stĺpca) nenulovým číslom,
3. pripočítaním riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu),
4. vynechaním riadku (stĺpca), ktorý buď obsahuje len nulové prvky alebo je lineárnou kombináciou ostatných riadkov (stĺpcov).

Potom matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú ekvivalentné, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Jednotlivé kroky z tejto vety budeme ilustrovať pomocou matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, ..., \boldsymbol{s}_n)$, kde $\boldsymbol{s}_i$ je i-tý stĺpcový vektor:

(1) Výmena poradia dvoch stĺpcov

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_j, ..., \boldsymbol{s}_n) \to \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_j, ..., \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_n)$$

(2) Stĺpec je vynásobený číslom $\alpha \neq 0$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_n) \to \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \alpha \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_n)$$

(3) Vynechaním stĺpca, ktorý je buď lineárnou kombináciou ostatných stĺpcov alebo je nulový

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_{i+1j}, ..., \boldsymbol{s}_n) \to \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_{i-1}, \boldsymbol{s}_{i+1j}, ..., \boldsymbol{s}_n)$$

(4) K stĺpcu pripočítame iný stĺpec

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_j, ..., \boldsymbol{s}_n) \to \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{s}_1, ..., \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_j + \boldsymbol{s}_i, ..., \boldsymbol{s}_n)$$

Podobné znázornenie elementárnych operácií môže byť vykonané aj pre riadkové vektory matice $\boldsymbol{A}$.

Dôkaz vety 8.4 vyplýva priamo zo skutočnosti, že 4 povolené operácie nad riadkami alebo stĺpcami matice nemenia jej hodnosť, t.j. zachovávajú počet lineárne nezávislých riadkových a aj stĺpcových vektorov.

Veta 8.5. Trojuholníková matica $\boldsymbol{A}$ typu $t(\boldsymbol{A})=(m,n)$, kde $m \le n$, má hodnosť
$$h(\boldsymbol{A}) = m \tag{8.27}$$

Pri dôkaze tejto vety pre jednoduchosť predpokladajme, že trojuholníková matica $\boldsymbol{A}$ má rovnaký počet riadkov a stĺpcov, $m = n$. Vyjadríme ju pomocou riadkových vektorov
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$
Pripomeňme, že jej diagonálne prvky $A_{ii} \neq 0$. Študujme lineárnu kombináciu jej riadkových vektorov, ktorú položíme rovnú riadkovému nulovému vektoru $\boldsymbol{0}$
$$\alpha_1 \boldsymbol{r}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{r}_2 + \dots + \alpha_m \boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{0}$$
Koeficienty sú určené systémom rovníc
$$\begin{aligned} &\alpha_1 A_{11} && = 0 \\ &\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} && = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\ &\alpha_1 A_{1m} + \alpha_2 A_{2m} + \dots + \alpha_m A_{mm} && = 0 \end{aligned}$$
Pretože, ako už bolo poznamenané, diagonálne prvky trojuholníkovej matice sú nenulové, $A_{ii} \neq 0$, systém môžeme postupne riešiť, dostaneme
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$
Týmto sme dokázali, že riadky trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé, čiže platí $h(\boldsymbol{A}) = m$.

Veta 8.5 v kombinácii s vetou 8.4 umožňuje implementáciu efektívneho algoritmu pre stanovenie hodnosti matice. Pre danú maticu $\boldsymbol{A}$ budeme pomocou vety 8.4 vykonávať také elementárne transformácie (ktoré nemenia jej hodnosť), aby výsledná matica bola trojuholníková, potom pomocou vety 8.5 hodnosť výslednej matice sa rovná počtu riadkov.

Príklad 8.7. Nech matica $\boldsymbol{A}$ má tvar
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
1. krok. Vykonáme také elementárne transformácie, ktoré budú viesť k zániku nenulového prvku 2 v prvom stĺpci pod diagonálou. Tretí riadok vynásobíme číslom -1 a potom k tomuto riadku pripočítame prvý riadok
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. krok. Vykonáme vynulovanie prvkov pod diagonálou v druhom stĺpci. Štvrtý riadok vynásobíme číslom -1 a potom k tretiemu a k štvrtému riadku pripočítame druhý riadok

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. krok. V tomto poslednom kroku vynecháme štvrtý riadok, ktorý obsahuje len nulové prvky

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupnými elementárnymi úpravami sme pretransformovali pôvodnú maticu A na trojuholníkovú maticu, ktorá obsahuje tri riadky, potom

$$h(\boldsymbol{A})=3$$

Pri týchto úpravách treba dať pozor na prípad, kedy by sme dostali maticu, ktorá má pod diagonálou nuly a na diagonále tiež nulu, ale v tom istom riadku má ešte nenulové prvky, potom treba prehodiť stĺpce, aby na diagonále bol nenulový prvok.

8.4 Inverzná matica

Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, problém existencie takej matice $\boldsymbol{B}$, pre ktorú platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, nie je zaručený pre ľubovolnú štvorcovú maticu, ale len pre určité špeciálne matice, ktoré nazývame regulárne matice.

Definícia 8.6. Štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, sa nazýva ***regulárna*** vtedy a len vtedy, keď pre jej hodnosť platí $h(\boldsymbol{A}) = n$.

Z definície regulárnej matice plynie, že tak stĺpcové ako aj riadkové vektory sú lineárne nezávislé. Môžeme teda parafrázovať definíciu regulárnej matice takto: štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ je regulárna vtedy a len vtedy, ak jej riadkové (stĺpcové) vektory sú lineárne nezávislé. Tento pohľad na regulárnosť matice $\boldsymbol{A}$ nám bude nápomocný, keď budeme hľadať pomocou determinantov (pozri 9. kapitolu) algebraické kritérium regulárnosti.

Definícia 8.7. Matica $\boldsymbol{A}^{-1}$ sa nazýva ***inverznou maticou*** vzhľadom k regulárnej matici $\boldsymbol{A}$ vtedy a len vtedy, ak spĺňa podmienku $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Definícia inverznej matice v mnohom pripomína definíciu 3.16 inverznej funkcie, kde sa požaduje, aby funkcia bola bijektívna. Možno konštatovať, že analógiou k tejto podmienke v teórii matíc je podmienka regulárnosti.

Veta 8.6. Pre regulárnu maticu $\boldsymbol{A}$ existuje práve jedna inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Tento dôkaz jednoznačnosti inverznej matice vykonáme nepriamo. Budeme predpokladať, že vzhľadom k regulárnej matici $\boldsymbol{A}$ existujú dve rôzne inverzné matice označené $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} \qquad (\spadesuit)$$

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{E} \qquad (\clubsuit)$$

Zo vzťahu ($\spadesuit$) vyberieme $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$, ktorý vynásobíme sprava maticou $\boldsymbol{C}$, dostaneme

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B}\underbrace{\boldsymbol{AC}}_{\boldsymbol{E}} = \underbrace{\boldsymbol{EC}}_{\boldsymbol{C}} \Rightarrow \underbrace{\boldsymbol{BE}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

Veta 8.7. Inverzná matica vyhovuje vzťahom

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A} \qquad (8.28a)$$

$$\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \qquad (8.28b)$$

Vzťah (8.28a) vyplýva priamo z definičnej podmienky $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, ktorú môžeme interpretovať tak, že matica $\boldsymbol{A}$ je inverznou maticou k matici $\boldsymbol{A}^{-1}$, t. j. musí platiť $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$. Vzťah (8.28b) dokážeme pomocou vzťahu $\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$. Počítajme: $\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$. Týmto sme dokázali, že súčin $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ dáva výsledky aké by dávala matica $\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}$. Pretože podľa vety 8.6 inverzná matica existuje jednoznačne, tak potom relácia (8.28b) určuje inverznú maticu jednoznačne.

Zostávajúcu časť tejto kapitoly venujeme metóde konštrukcie inverznej matice, ktorá je veľmi podobná metóde stanovenia hodnosti matice. Budeme študovať dvojicu matíc $\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right)$, nad maticami tejto dvojice budeme vykonávať postupnosť elementárnych operácií z vety 8.4 tak, že vybraná elementárna operácia je súčasne aplikovaná na obe matice, pričom sa snažíme používať také elementárne operácie, ktoré transformujú ľavú maticu $\boldsymbol{A}$ na jednotkovú maticu $\boldsymbol{E}$. Každá elementárna transformácia aplikovaná na nejakú maticu $\boldsymbol{X}$ je vyjadriteľná pomocou súčinu matíc $\boldsymbol{BX}$, formálne

$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{ele.transf.} \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{BX}$$

Keď dvojicu $\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right)$ transformujeme postupnosťou n elementárnych transformácií určených maticami $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_n$, dostaneme

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right) \to \left(\boldsymbol{B}_n...\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{B}_n...\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}\right)$$

Ako už bolo povedané, tieto elementárne transformácie sú vykonané s cieľom transformácie matice $\boldsymbol{A}$ na jednotkovú maticu

$$\underbrace{\boldsymbol{B}_n...\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1}_{\boldsymbol{A}^{-1}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}_n...\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1$$

Potom dostaneme

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right) \to \left(\underbrace{\boldsymbol{B}_n...\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{E}}\middle|\underbrace{\boldsymbol{B}_n...\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{A}^{-1}}\right) \to \left(\boldsymbol{E}\middle|\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

Postupnosť elementárnych transformácií rozdelíme na tri etapy:

1. etapa – nulovanie maticových prvkov pod diagonálou (podobne ako v metóde stanovenia hodnosti matice),
2. etapa – nulovanie maticových prvkov nad diagonálou,
3. etapa – násobenie riadkov číslami tak, aby na diagonále zostali len jednotkové prvky.

V prípade, že táto postupnosť nie je vykonateľná (napr. dostaneme nulový riadok), procedúru transformácie ukončíme, pretože matica nie je regulárna (teda ani invertibilná). Naznačený spôsob konštrukcie inverznej matice môže byť použitý ako konštruktívny dôkaz vety 8.8, ktorá je zoslabením vety 8.6 (nehovorí sa v nej o jednoznačnosti).

Veta 8.8. Ku každej regulárnej matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Príklad 8.8. Nájdite inverznú maticu k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zostrojíme dvojicu matíc

$$X_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

V prvej etape vykonáme takú elementárnu operáciu, ktorá nuluje prvok pod diagonálou, vykonáme elementárnu operáciu ep_1, že druhý riadok vynásobíme –2 a k takto upravenému druhému riadku pripočítame prvý riadok

$$ep_1 : \boldsymbol{r}_2 = -2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1$$

Dvojica X_0 sa pretransformuje na X_1

$$X_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

V druhej etape budeme nulovať prvky nad diagonálou, vykonáme elementárnu operáciu ep_2, že k prvému riadku pripočítame druhý riadok

$$ep_2 : \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$$

Dvojica X_1 sa pretransformuje na X_2

$$X_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

V tretej etape prvý riadok vynásobíme $1/2$ a druhý riadok vynásobíme $-1/4$, dostaneme finálnu dvojicu

$$X_3 = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\boldsymbol{E}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}^{-1}} \end{array}\right)$$

Potom inverzná matica má tvar

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ľahko sa presvedčíme, že táto matica je inverzná

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1/4 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Cvičenia

Cvičenie 8.1. Stanovte typ matice a jej názov

(a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.2. Nájdite hodnoty *a*, *b*, *c* a *d* tak, aby platilo

$\begin{pmatrix}3a & -b\\ c & 2d+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Cvičenie 8.3. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení:

(a) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\}\subset\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je symetrická matica}\}$,

(b) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je symetrická matica}\}\subset\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$,

(c) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\}$,

(d) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je štvorcová matica}\}\subset\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$,

(e) $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je jednotková matica}\}\subset\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{A}\ \textit{je diagonálna matica}\}$.

Cvičenie 8.4.

(a) Zostrojte matice $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(B_{ij})$ a $\boldsymbol{C}=(C_{ij})$, typu (3,2), pre ktoré platí

$$A_{ij}=i-j,\ B_{ij}=i-2j,\ C_{ij}=4i+3j.$$

(b) Zostrojte maticu $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$ typu (4,4), ktorá je symetrická a má tieto vlastnosti:

$$A_{ii}=i^2,\ A_{13}=A_{24}=0,\ A_{14}=3,\ A_{12}=A_{23}=A_{11}+A_{22},\ A_{34}=A_{23}-A_{14}.$$

(c) Zostrojte maticu, ktorá je súčasne riadkovým a stĺpcovým vektorom.

(d) Nájdite *x* a *y* pre maticu

$$\boldsymbol{A}=\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}x+y & 10\\ 2x-y & 4\end{pmatrix}$$

pre $A_{11}=A_{22}$ a $A_{12}=A_{21}/2$.

Cvičenie 8.5. Zostrojte transponované matice k maticiam

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.6. Pre matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)
(a) $2\boldsymbol{A}$,
(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$,
(d) $\boldsymbol{AC}$,
(e) $\boldsymbol{CB}$,
(f) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}$.

Cvičenie 8.7. Pre maticu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ riešte rovnicu

$$2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$$

kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

Cvičenie 8.8. Pre riadkové vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ spočítajte $\boldsymbol{uv}^T$ (ak existuje) pre
(a) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
(b) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
(c) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.9. Dokážte, že pre $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$ platí $\boldsymbol{uu}^T \geq 0$, pričom rovnosť platí len pre nulový vektor.

Cvičenie 8.10. Pre každú dvojicu matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ určite ich typ a či súčin matíc existuje, ak existuje, tak ho vypočítajte.

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.11. Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vypočítajte

(a) $A + 2B$,
(b) $3A - 6B$,
(c) AB,
(d) A^2,
(e) BA,
(f) $B(AB)$,
(g) (AB)A,
(h) $A(A\text{-}B)$,
(i) $A^T B$,
(j) $(AB)^T$.

Cvičenie 8.12. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú diagonálne matice, vypočítajte AB, BA, A^2 a B^2.

Cvičenie 8.13. Nájdite greedy algoritmom také zátvorkovanie produktu týchto matíc, aby sa vykonal čo možno najmenší počet elementárnych súčinov (greedy algoritmus nezaisťuje globálne minimum).
(a) Nech matice majú typ $t(A_1) = (4,5)$, $t(A_2) = (5,8)$, $t(A_3) = (8,3)$ a $t(A_4) = (3,2)$.

(b) Nech matice majú typ $t(A_1) = (2,3)$, $t(A_2) = (3,8)$, $t(A_3) = (8,2)$, $t(A_4) = (2,5)$, $t(A_5) = (5,4)$.

Cvičenie 8.14. Ukážte, že ak A je štvorcová matica, potom A+A^T je symetrická matica.

Cvičenie 8.15. Dokážte tieto vlastnosti transponovanej matice:
(a) $\left(A^T\right)^T = A$,
(b) $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$,
(c) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

Cvičenie 8.16. Stanovte hodnosť matíc

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) pre ktoré hodnoty p, má matica $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ p & -1\end{pmatrix}$ hodnosť 1,

(d) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

(e) pre ktoré hodnoty parametrov p a q má matica $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ p & 1 & 1 & 1\\ q & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$ hodnosť 2.

Cvičenie 8.17. Nájdite inverznú maticu (ak existuje) k matici:

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 3\end{pmatrix}$,

(b) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$,

(c) $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

(d) $A=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}$,

(e) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$,

(f) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

(g) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$,

(h) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Cvičenie 8.18. Dokážte matematickou indukciou formulu
$\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n\right)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\ldots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

Cvičenie 8.19. Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ sú štvorcové matice rovnakého typu (n,n). Dokážte, že ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom zo vzťahu $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ vyplýva $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

Cvičenie 8.20. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové rovnakého typu (n,n) a $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^2 = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}$.

Cvičenie 8.21. Ukážte, že ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové rovnakého typu (n,n) a $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, potom $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\right)^n = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$, pre každé kladné celé číslo n.

Cvičenie 8.22. Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica, ukážte, že $\left(\boldsymbol{A}^n\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^n$

Cvičenie 8.23. Nech matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ majú blokovú štruktúru

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Potom ich formálne môžeme písať v tvare

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $\boldsymbol{AB}$ a ukážte

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}$$

Ukážte taktiež

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1^T & \boldsymbol{B}_3^T \\ \boldsymbol{B}_2^T & \boldsymbol{B}_4^T \end{pmatrix}$$

Cvičenie 8.24. Nech $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$,
(b) $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$.

Cvičenie 8.25. Nech $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú binárne matice, zostrojte

(a) $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$,
(b) $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$.

Cvičenie 8.26. Nech **A** je binárna matica, dokážte $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.