Maticová algebra I

- definícia matice
- špeciálne matice
- maticová algebra
- hodnosť matice
- inverzná matica

Matice

V mnohých prípadoch dáta majú štruktúru dvojrozmernej tabuľky, ktorá má *m* riadkov a *n* stĺpcov.

		predmet		
		Matematika	Logika	Programovanie
študent	A	88	98	67
	B	75	91	73
	C	92	81	75
	D	98	100	98
	E	55	61	82

Riadky tejto tabuľky sú priradené jednotlivým študentom, zatiaľ čo stĺpce sú priradené predmetom. Na priesečníku daného riadku (študent – predmet) je uvedený počet bodov, ktoré získal daný študent pre daný predmet.

Ak z tejto tabuľky odstránime redundantný popis riadkov a stĺpcov dostávame matematickú štruktúru, ktorá sa nazýva ***matica***

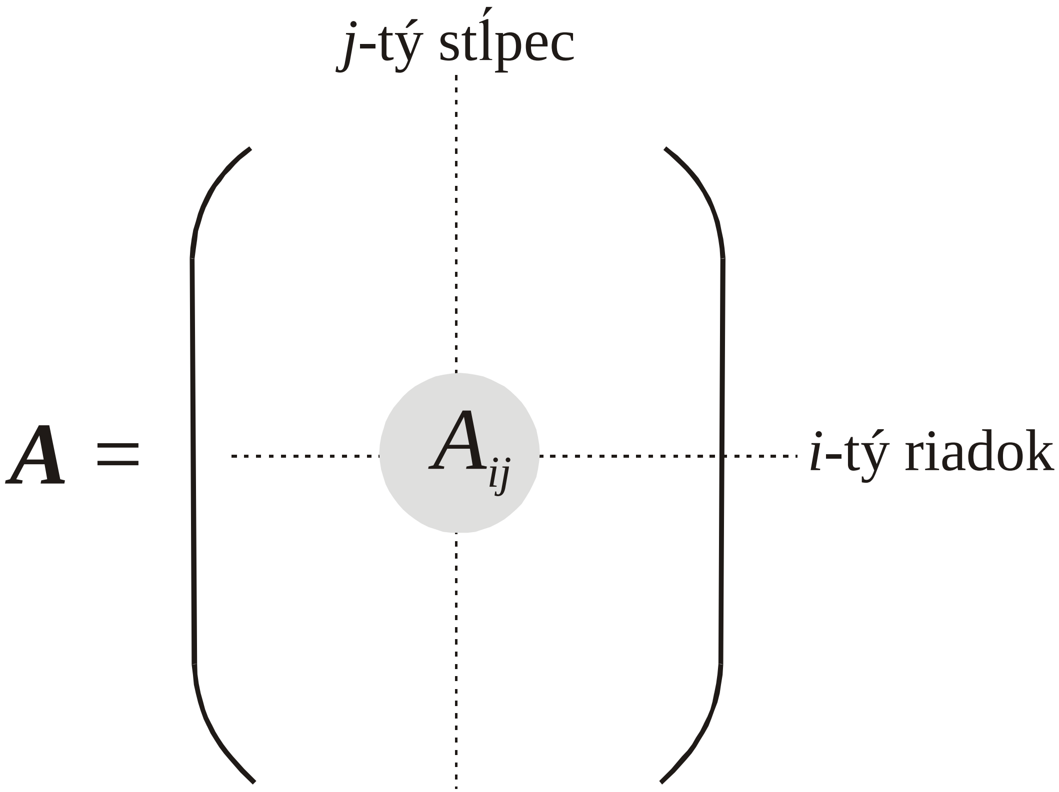
Definícia 8.1. Nech $I=\{1,2,...,m\}$ je množina riadkových indexov a $J=\{1,2,...,n\}$ je množina stĺpcových indexov, pričom m a n sú kladné celé čísla, $m,n\geq 1$. ***Maticou*** nazývame množinu obsahujúcu $m\cdot n$ čísel (celočíselných, racionálnych alebo reálnych), ktoré sú špecifikované riadkovým (i) a stĺpcovým (j) indexom

$$\boldsymbol{A}=\left\{A_{ij}\ ;i\in I,j\in J\right\}$$

Typ matice je usporiadaná dvojica kladných prirodzených čísel, ktoré sú rovné mohutnostiam množín indexov I a J

$$t\left(\boldsymbol{A}\right)=\left(m,n\right)$$

Množinová štruktúra matice $\boldsymbol{A}$ môže byť jednoducho znázornená pomocou tabuľky, ktorá obsahuje m riadkov a n stĺpcov, pričom na priesečníku i-tého riadku a j-tého stĺpca je umiestnený element A_{ij},



Niekedy sa používa aj „skratkové“ označenie pre maticu $\boldsymbol{A} = \left(A_{ij}\right)$, pričom sa implicitne predpokladá počet riadkov a stĺpcov tejto matice. Skutočnosť, že matica $\boldsymbol{A}$ má typ $t\left(\boldsymbol{A}\right) = \left(m, n\right)$ a jej elementy sú reálne čísla, sa niekedy zapisuje

$$\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

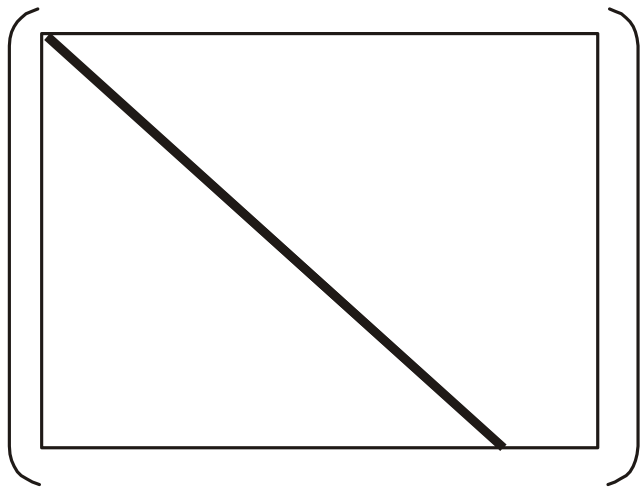
Príklad

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{A}\right) = \left(2,2\right)$	$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{B}\right) = \left(1,4\right)$
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{A}\right) = \left(2,3\right)$	$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t\left(\boldsymbol{X}\right) = \left(3,1\right)$

Základná terminológia

(1) Ak $m=n$, matica sa nazýva ***štvorcová***, v opačnom prípade matica sa nazýva ***obdĺžniková***.

(2) Prvky matice A_{ii} sa nazývajú ***diagonálne***, všetky diagonálne prvky tvoria ***diagonálu*** matice

$\boldsymbol{A}=$ 

(3) Ak všetky prvky matice sú nuly, potom matica sa nazýva ***nulová matica***.

(4) Štvorcová matica, ktorá mimo diagonály má nulové prvky a na diagonále má aspoň jeden nenulový prvok sa nazýva ***diagonálna matica***.

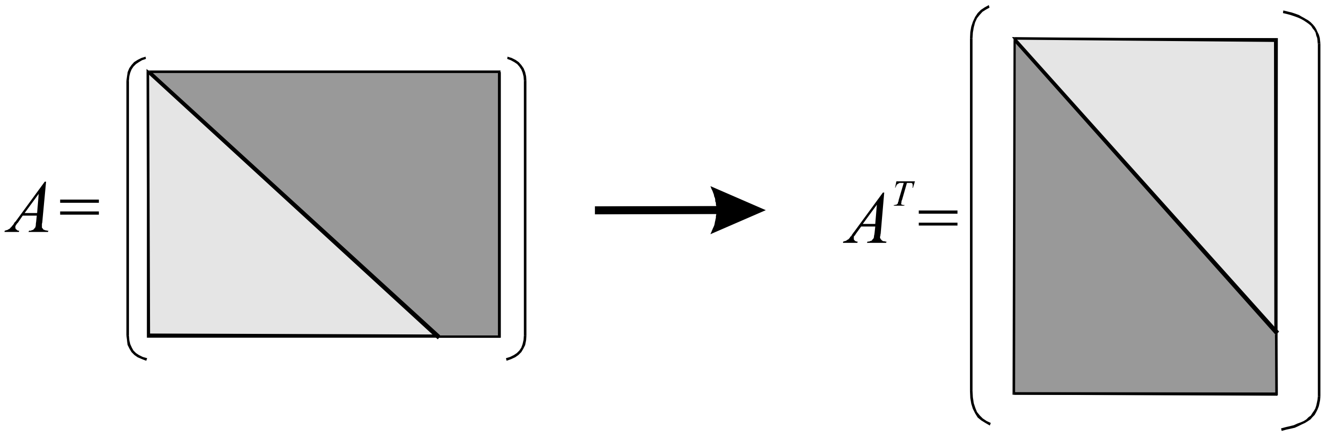
(5) Špeciálny prípad diagonálnej matice je ***jednotková matica*** (budeme ju značiť ***E***) všetky diagonálne elementy sú jednotky

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{pre } i = j) \\ 0 & (\text{pre } i \neq j) \end{cases}$$

´

(6) Nech $\boldsymbol{A}$ je matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$, potom matica ***transponovaná*** k tejto matici, označená $\boldsymbol{A}^T$, sa vytvorí z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že vzájomne zameníme stĺpce za riadky a naopak, potom $t(\boldsymbol{A}^T) = (m,n)$ (pozri obr. 8.3). Názorne hovoríme, že matica $\boldsymbol{A}^T$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ jej preklopením okolo diagonály. Transponovaná matica je ilustrovaná príkladom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$



(7) Štvorcová matica sa nazýva ***symetrická*** matica, ak platí $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$. Jednoduchý príklad symetrickej matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(8) Matica ***A*** typu (m,n) sa nazýva ***trojuholníková matica,*** ak pod diagonálou má nulové prvky a na diagonálne má nenulové prvky

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(9) Ak $\boldsymbol{A}$ matica typu t($\boldsymbol{A}$) = (m,n) má počet riadkov (m) alebo počet stĺpcov (n) rovný 1, potom takáto špeciálna matica sa nazýva ***riadkový vektor*** (m = 1) resp. ***stĺpcový vektor*** (n = 1). Príklady riadkovej a stĺpcovej matice sú

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplikáciou operácia transpozície, stĺpcový vektor sa mení na riadkový vektor a naopak, pre predchádzajúce dve matice dostaneme

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Príklad

Pomocou riadkových alebo stĺpcových vektorov môžeme vyjadriť každú maticu ako „kompozíciu“ týchto elementárnych matíc

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \\ 75 & 91 & 73 \\ 92 & 81 & 75 \\ 98 & 100 & 98 \\ 55 & 61 & 82 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 88 & 98 & 67 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 75 & 91 & 73 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 92 & 81 & 75 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_4 = \begin{pmatrix} 98 & 100 & 98 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{r}_5 = \begin{pmatrix} 55 & 61 & 82 \end{pmatrix}$$

$$\text{t } \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 88 \\ 75 \\ 92 \\ 98 \\ 55 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 98 \\ 91 \\ 81 \\ 100 \\ 61 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 67 \\ 73 \\ 75 \\ 98 \\ 82 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_4 \\ \boldsymbol{r}_5 \end{pmatrix} \quad \text{alebo} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_2 & \boldsymbol{s}_3 \end{pmatrix}.$$

Operácie nad maticami

(1) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$. Hovoríme, že tieto matice sa ***rovnajú***, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(A_{ij} = B_{ij} \right)$$

(2) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{B}$ je ***α-násobkom*** matice $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{A}$, vtedy a len vtedy, ak

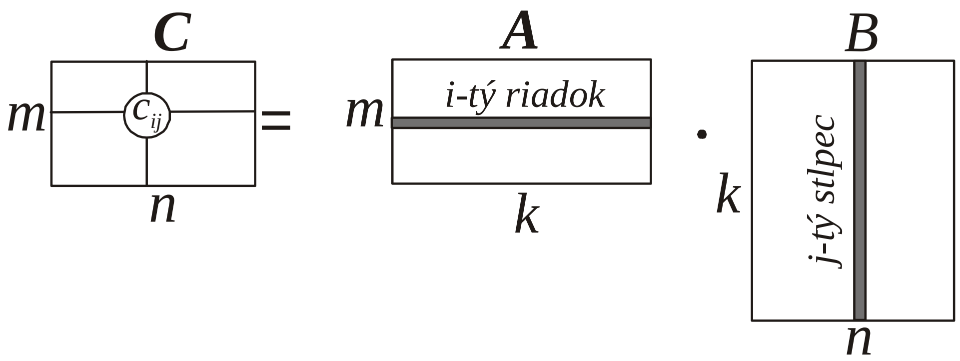
$$\forall (i \in I) \forall (j \in J) \left(B_{ij} = \alpha A_{ij} \right)$$

(3) Nech matice $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ a $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sú rovnakého typu, $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je ***súčtom*** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}\right)$$

(4) Matica $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,k)$, matica $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{B}) = (k,n)$ a matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ je typu $t(\boldsymbol{C}) = (m,n)$. Hovoríme, že matica $\boldsymbol{C}$ je **súčinom** matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, vtedy a len vtedy, ak

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}\right)$$



Súčin dvoch matíc ***A*** a ***B*** môže byť podstatne zjednodušená použitím riadkových vektorov matice ***A*** a stĺpcových vektorov matice ***B***. Nech $\boldsymbol{r}_i$ je *i*-tý riadkový vektor matice ***A*** a $\boldsymbol{s}_j$ je j-tý stĺpcový vektor matice ***B***, potom element C_{ij} je zadaný takto

$$C_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ .... \\ B_{kj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{k} A_{il} B_{lj}$$

Príklad

Násobenie matíc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Definujem riadkové vektory matice ***A*** a stĺpcové vektory matice ***B***

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Potom elementy matice ***C*** = ***AB*** sú určené takto

$$C_{11} = r_1 \cdot s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (2)(1) = 1$$

$$C_{12} = r_1 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(2) = 4$$

$$C_{21} = r_2 \cdot s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) + (3)(1) = 4$$

$$C_{22} = r_2 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)(0) + (3)(2) = 6$$

Potom súčin ***AB*** je určený

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

(0) Súčin matíc nie je komutatívna operácia

$$AB \neq BA$$

(1) Súčin je asociatívny

$$A(BC)=(AB)C$$

(2) Súčin je distributívny vzhľadom k súčtu matíc

$$(A+B)C=AC+BC$$
$$A(B+C)=AB+AC$$

(3) Asociatívnosť operácia násobenia vektora číslom vzhľadom k operácii súčin matíc

$$A(\alpha B)=\alpha(AB)$$

Algoritmus pre násobenie matíc

```
procedure matrix_multiplication(A,B : matrices);
for i:=1 to m do
for j:=1 to n do
begin sum:=0;
      for l:=1 to k do sum:=sum+A[i,l]*B[l,j];
      c[i,j]:=sum;
end;
```

Môžeme teda konštatovať, že zložitosť algoritmu rastie úmerne n^3, pričom sa predpokladá, že dimenzie matíc sú si rovné, $k = m = n$. Je prekvapujúce, že už tak jednoduchý algoritmus akým je tento, môže byť podstatne akcelerovaný, bol navrhnutý algoritmus, ktoré ho zložitosť rastie $n^{\sqrt{7}}$, pretože $\sqrt{7} < 3$, tento nový algoritmus je o trochu efektívnejší ako náš algoritmus.

Binárne matice

Matica $\boldsymbol{A} \subseteq \{0,1\}^m \times \{0,1\}^n$, ktorá obsahuje len binárne elementy 0-1 sa nazýva binárna matica. Algebraické operácie nad takýmito maticami sú založené na logických spojkách konjunkcie a disjunkcie

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & (\text{ak } a = b = 1) \\ 0 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 0 & (\text{ak } a = b = 0) \\ 1 & (\text{ináč}) \end{cases}$$

Nad binárnými maticami definujeme tri binárne operácie:

(1) Nech $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$, potom matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sa nazýva ***konjunkcia matíc A*** a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$, jej maticové elementy sú

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = A_{ij} \wedge B_{ij}\right)$$

(2) Nech $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ sú binárne matice rovnakého typu $t(\boldsymbol{A}) = t(\boldsymbol{B}) = (m,n)$, potom matica $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ sa nazýva ***disjunkcia matíc A*** a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$, jej maticové elementy sú

$$\forall(i \in I)\forall(j \in J)\left(C_{ij} = A_{ij} \vee B_{ij}\right)$$

(3) Nech binárna matica **A** = (A_{ij}) je typu t(**A**) = (m,k), binárna matica **B** = (B_{ij}) je typu t(**B**) = (k,n) a binárna matica **C** = (C_{ij}) je typu t(**C**) = (m,n). Hovoríme, že matica **C** je ***súčinom*** matíc **A** a **B**, **C** = **A**⊗**B**, jej maticové elementy sú

$$\forall\left(i\in I\right)\forall\left(j\in J\right)\Big(C_{ij}=\left(A_{i1}\wedge B_{1j}\right)\vee\left(A_{i2}\wedge B_{2j}\right)\vee\ldots\vee\left(A_{ik}\wedge B_{2k}\right)\Big)$$

Pretože súčin binárnych matíc je asociatívna operácia, môžeme definovať r-tú mocninu štvorcovej binárnej matici **A** = (A_{ij}) , kde r je kladné celé číslo $r > 1$

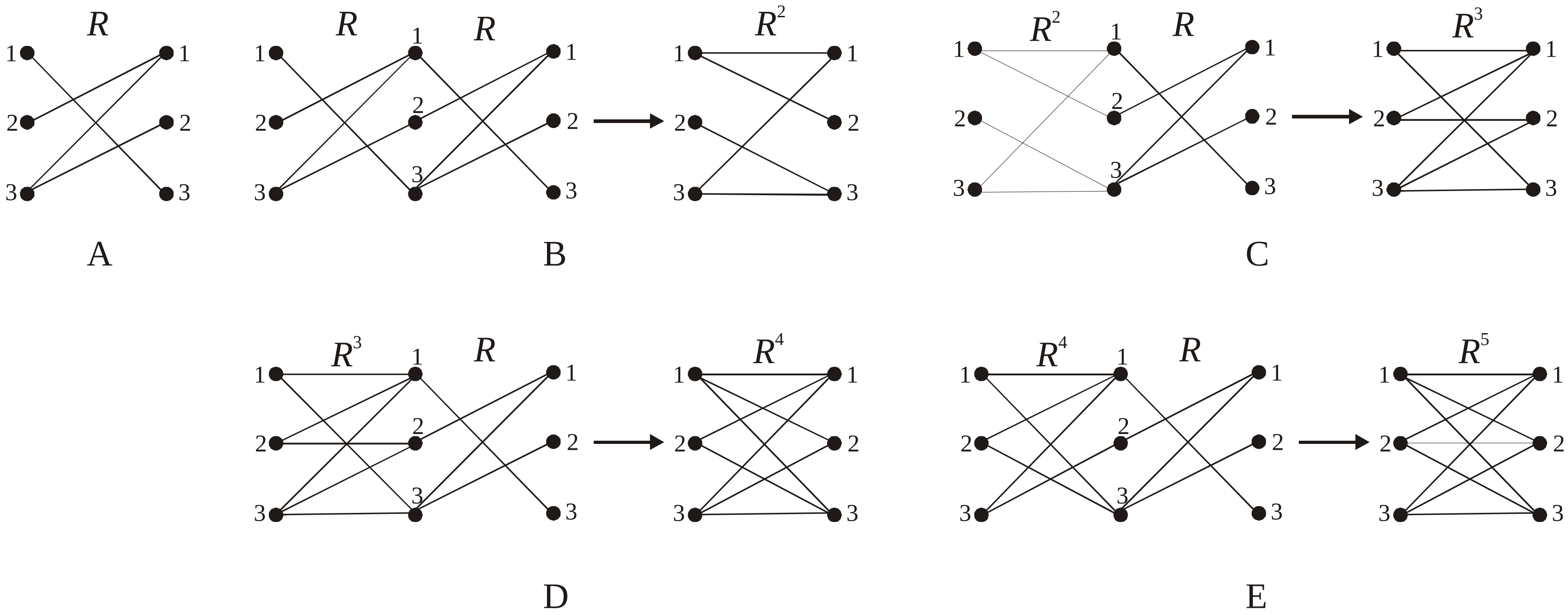
$$\boldsymbol{A}^r=\underbrace{\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{A}}_{r-krát}$$

Interpretácia súčinu binárnych matíc

Binárna matica môže byť chápaná ako maticová reprezentácia binárnej relácie $R \subseteq X \times X$, kde $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Element $A_{ij} \neq 0$ implikuje, že usporiadaná dvojica $(x_i, x_j) \in R$. Jednoduchými úvahami je možné dokázať, že matica $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}$ je reprezentáciou kompozície $R^2 = R \circ R$.

Pomocou grafovej interpretácie relácie R a jej mocnín, môžeme potom alternatívne interpretovať n-té mocniny matice $\boldsymbol{A}$ tak, že ak má jednotkový element v pozícii (i,j), potom existuje postupnosť n hrán z i-tého vrcholu grafu do j-tého vrcholu grafu.

Diagramatická interpretácia mocnín binárnej matice



Príklad

Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú binárne matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Zostrojte súčin $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\\ (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0\\ 0\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1\\ 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Príklad

Zostrojte všetky mocniny matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V prvom kroku spočítame $\boldsymbol{A}^2$

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupne v ďalších krokoch spočítame vyššie mocniny matice

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2 \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{A}^3 \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^5 = \boldsymbol{A}^4 \otimes \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznamenajme, že tieto mocniny matice $\boldsymbol{A}$ môžeme jednoducho určiť pomocou grafovej interpretácie relácie R, pozri obr. 8.6. Potom vyššie mocniny matice $\boldsymbol{A}$ sú určené

$$\forall (n \geq 5)\left(\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Hodnosť matice

Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$, je celé kladné číslo označené $r(\boldsymbol{A})$, ktoré patrí medzi dôležité charakteristiky matíc. Než pristúpime k definícii tejto veličiny, zavedieme ďalší dôležitý pojem lineárnej závislosti/nezávislosti stĺpcových (riadkových vektorov). Pre jednoduchosť budeme tieto úvahy uskutočňovať pre stĺpcové vektory, automaticky budú platiť aj pre riadkové vektory, a naopak.

Definícia. Nech $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ je n stĺpcových vektorov z $\mathbb{R}^p$ (t. j. vektory majú p riadkov, alebo p elementov). Hovoríme, že tieto vektory sú ***lineárne závislé*** vtedy a len vtedy, ak existujú také nenulové koeficienty (čísla) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, aby ich lineárna kombinácia bola rovná nulovému vektoru $\boldsymbol{0}$

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + ... + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

Veta. Ak stĺpcové vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ sú lineárne závislé, potom aspoň jeden z nich môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov, napr.

$$\boldsymbol{a}_1 = \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{a}_n$$

Dôkaz tejto vety je veľmi jednoduchý. Z predpokladu lineárnej závislosti vektorov $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ vyplýva, že aspoň jeden koeficient je nenulový. Predpokladajme, že $\alpha_1 \neq 0$, potom

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_n$$

Týmto sme dokázali, že z predpokladu $\alpha_1 \neq 0$ vyplýva $\boldsymbol{a}_1 = \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{a}_n$, čím je dôkaz zavŕšený.

Negáciou definície lineárnej závislosti dostaneme dôležitú vetu, ktorá charakterizuje lineárne nezávislé vektory.

Veta. Stĺpcové vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ sú ***lineárne nezávislé*** vtedy a len vtedy, ak ich lineárna kombinácia poskytuje nulový vektor $\boldsymbol{0}$

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

len pre nulové koeficienty, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Príklad

Majme trojicu stĺpcových vektorov

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dokážeme, že tieto vektory sú lineárne nezávislé

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{a}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnaním posledných vektorov dostaneme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že táto lineárna kombinácia sa rovná nulovému stĺpcovému vektoru len pre nulové koeficienty, potom vektory sú lineárne nezávislé.

Definícia. Hovoríme, že matica ***A*** má ***stĺpcovú*** (***riadkovú***) ***hodnosť*** vtedy a len vtedy, ak má maximálne *k* lineárne nezávislých stĺpcových (riadkových) vektorov.

$$h_{s(r)}\left(\boldsymbol{A}\right)=k$$

Veta. Pre každú maticu ***A*** typu $t(\boldsymbol{A}) = (m,n)$ riadková a stĺpcová hodnosť sú rovnaké, pričom hodnosť je zdola ohraničená 1 a zhora ohraničená minimálnou hodnotou *m* a *n*

$$1\leq h_s\left(A\right)=h_r\left(A\right)=h\left(A\right)\leq min\left\{m,n\right\}$$

Príklad

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riadkové vektory matice sú

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Postupným riešením tohto systému dostaneme riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že riadkové vektory sú lineárne nezávislé, maximálny počet lineárne nezávislých vektorov je 3, t.j. riadková hodnosť matice je 3.

Stĺpcové vektory matice $\boldsymbol{A}$ sú

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostaneme $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. To znamená, že stĺpcové vektory sú lineárne nezávislé, čiže matica ma stĺpcovú hodnosť 3.

Definícia. Hovoríme, že matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú ***ekvivalentné***, $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú hodnosť, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých možných matíc. Túto množinu môžeme rozdeliť na disjunktné podmnožiny

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup .... \cup \mathcal{A}_i \cup ...$$

kde $\mathcal{A}_i$ je množina, ktorá obsahuje matice s hodnosťou i.

Veta. Nech matica ***B*** vznikne z matice ***A*** pomocou jednej z týchto 4 operácií:

(1) transpozíciou dvoch riadkov (stĺpcov),

(2) vynásobením riadku (stĺpca) nenulovým číslom,

(3) pripočítaním riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu),

(4) vynechaním riadku (stĺpca), ktorý buď obsahuje len nulové prvky alebo je lineárnou kombináciou ostatných riadkov (stĺpcov).

Potom matice A a B sú ekvivalentné, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Jednotlivé kroky z tejto vety budeme ilustrovať pomocou matice $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$, kde $\boldsymbol{s}_i$ je i-tý stĺpcový vektor:

(1) Transpozícia dvoch stĺpcov

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)\rightarrow\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

(2) Stĺpec je vynásobený číslom $\alpha\neq0$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)\rightarrow\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

(3) Vynechaním stĺpca, ktorý je buď lineárnou kombináciou ostatných stĺpcov alebo je nulový

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{i-1},\boldsymbol{s}_i,\boldsymbol{s}_{i+1\,j},\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)\rightarrow\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{i-1},\boldsymbol{s}_{i+1\,j},\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

(4) K stĺpcu pripočítame iný stĺpec

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_j,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)\rightarrow\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_j+\boldsymbol{s}_i,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$$

Veta. Trojuholníková matica $\boldsymbol{A}$ typu $t(\boldsymbol{A})=(m,n)$, pričom $m \leq n$, má hodnosť

$$h(\boldsymbol{A}) = m$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{r}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \boldsymbol{r}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{r}_2 + \dots + \alpha_m \boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 A_{1m} & = 0 \\ \alpha_1 A_{21} + \alpha_2 A_{22} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_1 A_{m1} + \alpha_2 A_{m2} + \dots + \alpha_m A_{mm} & = 0 \end{array}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

Týmto sme dokázali, že riadky trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé, čiže platí $h(\boldsymbol{A}) = m$.

Dokázaná veta umožňuje implementáciu efektívneho algoritmu pre stanovenie hodnosti matice. Pre danú maticu ***A*** budeme vykonávať také elementárne transformácie (ktoré nemenia jej hodnosť), aby výsledná matica bola trojuholníková, potom hodnosť výslednej matice sa rovná počtu riadkov.

Príklad

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. krok. Vykonáme také elementárne transformácie, ktoré budú viesť k zániku nenulového prvku 2 v prvom stĺpci pod diagonálou. Tretí riadok vynásobíme číslom -1 a potom k tomuto riadku pripočítame prvý riadok

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. krok. Vykonáme vynulovanie elementov pod diagonálou v druhom stĺpci. Štvrtý riadok vynásobíme číslom -1 a potom k tretiemu a k štvrtému riadku pripočítame druhý riadok

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. krok. V tomto poslednom kroku vynecháme štvrtý riadok, ktorý obsahuje len nulové prvky

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Postupnými elementárnymi úpravami sme pretransformovali pôvodnú maticu A na trojuholníkovú maticu, ktorá obsahuje tri riadky, potom

$$h(A)=3$$

Inverzná matica

Nech $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, problém existencie takej matice $\boldsymbol{B}$, pre ktorú platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \mathbf{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, je zaručený nie pre ľubovolnú štvorcovú maticu, ale len pre určité špeciálne matice, ktoré nazývame regulárne matice.

Definícia. Štvorcová matica $\boldsymbol{A}$, typu $t(\boldsymbol{A}) = (n,n)$, sa nazýva ***regulárna*** vtedy a len vtedy, keď je hodnosť $h(\boldsymbol{A}) = n$.

Z definície regulárnej matice plynie, že tak stĺpcové ako aj riadkové vektory sú lineárne nezávislé. Môžeme teda parafrázovať definíciu regulárnej matice takto:

Štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ je regulárna vtedy a len vtedy, ak jej riadkové (stĺpcové) vektory sú lineárne nezávislé. Tento pohľad na regulárnosť matice $\boldsymbol{A}$ nám bude nápomocný, keď budeme hľadať pomocou determinantov (pozri 9. kapitolu) jednoduché algebraické kritérium regulárnosti.

Definícia. Ak je štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ regulárna, potom existuje ***inverzná matica***, označená $\boldsymbol{A}^{-1}$, ktorá spĺňa podmienku $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Veta. Každá regulárna matica $\boldsymbol{A}$ má práve jedna inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Budeme predpokladať, že vzhľadom k regulárnej matici $\boldsymbol{A}$ existujú dve inverzné matice označené $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} \qquad (\spadesuit)$$

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{E} \qquad (\clubsuit)$$

Zo vzťahu ($\spadesuit$) vyberieme $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$, ktorý vynásobíme zľava maticou $\boldsymbol{C}$, dostaneme

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B}\underbrace{\boldsymbol{AC}}_{\boldsymbol{E}} = \underbrace{\boldsymbol{EC}}_{\boldsymbol{C}} \Rightarrow \underbrace{\boldsymbol{BE}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

Veta. Inverzná matica vyhovuje vzťahom

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$$

$$\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Prvý vzťahvyplýva priamo z definičnej podmienky $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, ktorú môžeme interpretovať tak, že matica $\boldsymbol{A}$ je inverznou maticou k matici $\boldsymbol{A}^{-1}$, t. j. musí platiť $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Druhý vzťah dokážeme tak, že počítame $\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{AB}$ a taktiež aj $\boldsymbol{AB}\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}$, v obidvoch prípadoch dostaneme rovnosť

$$\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{-1}\underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{B} = \underbrace{\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{AB}\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}\underbrace{\boldsymbol{BB}^{-1}}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{A}^{-1} = \underbrace{\boldsymbol{AA}^{-1}}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$$

Konštrukcie inverznej matice

Budeme študovať dvojicu matíc $\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right)$, nad maticami tejto dvojice budeme vykonávať postupnosť elementárnych operácií tak, že vybraná elementárna operácia je súčasne aplikovaná na obe matice, pričom sa snažíme používať také elementárne operácie, ktoré transformujú ľavú maticu $\boldsymbol{A}$ na jednotkovú maticu $\boldsymbol{E}$. Pretože každá elementárna transformácia aplikovaná na nejakú maticu $\boldsymbol{X}$ je vyjadriteľná pomocou súčinu matíc $\boldsymbol{BX}$, formálne

$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{ele.transf.} \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{BX}$$

Potom dvojicu $\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right)$ transformujeme postupnosťou n elementárnych transformácií $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\ldots,\boldsymbol{B}_n$, dostaneme

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{E}\right) \to \left(\boldsymbol{B}_n\ldots\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{B}_n\ldots\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}\right)$$

Ako už bolo povedané, tieto elementárne transformácie sú vykonané s cieľom transformácie matice $\boldsymbol{A}$ na jednotkovú maticu

$$\underbrace{\boldsymbol{B}_n \dots \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{B}_1}_{\boldsymbol{A}^{-1}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}_n \dots \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{B}_1$$

Potom dostaneme

$$\left(\boldsymbol{A} \middle| \boldsymbol{E}\right) \to \left(\underbrace{\boldsymbol{B}_n \dots \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{E}} \middle| \underbrace{\boldsymbol{B}_n \dots \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{E}}_{A^{-1}} \right) \to \left(\boldsymbol{E} \middle| \boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

Postupnosť elementárnych transformácií rozdelíme na dve etapy:

1. etapa – nulovanie maticových elementov pod diagonálou (podobne ako v metóde stanovenia hodnosti matice),
2. etapa – nulovanie maticových elementov nad diagonálou,
3. etapa – násobenie riadkov číslami tak, aby na diagonále zostali len jednotkové elementy.

V prípade, že táto postupnosť nie je vykonateľná (napr. dostaneme nulový riadok), procedúru transformácie ukončíme, pretože matica nie je regulárna (teda ani invertibilná).

Príklad

Nájdite inverznú maticu k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zostrojíme dvojicu matíc

$$X_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

V prvej etape vykonáme takú elementárnu operáciu, ktorá nuluje element pod diagonálou, vykonáme elementárnu operáciu ep_1, že druhý riadok vynásobíme –2 a k takto upravenému druhému riadku pripočítame prvý riadok

$$ep_1 : \boldsymbol{r}_2 = -2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1$$

Dvojica X_0 sa pretransformuje na X_1

$$X_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

V druhej etape budeme nulovať elementy nad diagonálou, vykonáme elementárnu operáciu ep_2, že k prvému riadku pripočítame druhý riadok

$$ep_2 : \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$$

Dvojica X_1 sa pretransformuje na X_2

$$X_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

V tretej etape prvý riadok vynásobíme $1/2$ a druhý riadok vynásobíme $-1/4$, dostaneme finálnu dvojicu

$$X_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ \underbrace{0 \quad 1}_{\boldsymbol{E}} & & \underbrace{-1/4 \quad 1/2}_{\boldsymbol{A}^{-1}} & \end{array}\right)$$

Potom inverzná matica má tvar

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

The End