Cvičenie:

10.1. Prienikový graf (intersection graph) súboru množín A_1, A_2, ..., A_n je graf, ktorého vrcholy reprezentujú tieto množiny a hrana spája tieto vrcholy, keď im odpovedajúce množiny majú neprázdny prienik. Skonštruujte prienikové grafy pre nasledujúce súbory množín.

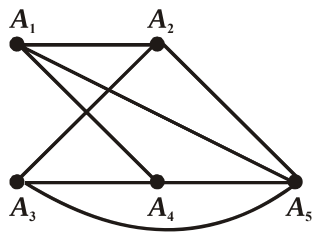
(a) $A_1=\{0,2,4,6,8\}$, $A_2=\{0,1,2,3,4\}$, $A_3=\{1,3,5,7,9\}$, $A_4=\{5,6,7,8,9\}$, $A_5=\{0,1,8,9\}$

(b) $A_1=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0\}$, $A_2=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, $A_3=\{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$, $A_4=\{\ldots-5,-3,-1,1,3,5,\ldots.\}$, $A_5=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$

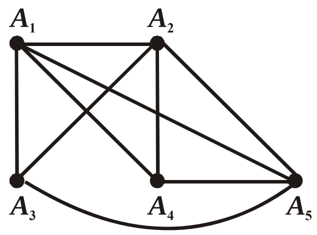
(c) $A_1=\{x \mid x<0\}$, $A_2=\{ x \mid -1< x<0\}$, $A_3=\{ x \mid 0< x<1\}$, $A_4=\{ x \mid -1< x<1\}$, $A_5=\{ x \mid x>-1\}$, $A_6=\mathbf{R}$

Riešenie:

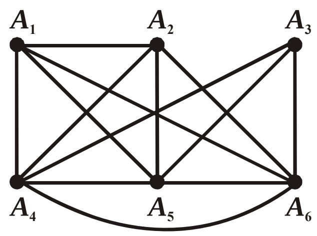
(a)



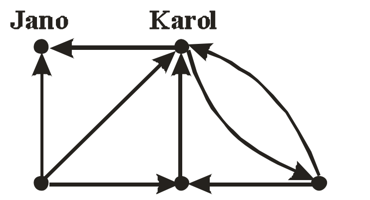
(b)



(c)



10.2. Koho v nasledujúcom grafe vplyvu na obr. 10.27. ovplyvňuje Karol a kto vplýva na Karola?



Obrázok 10.27. Graf ovplyvňovania, využívaný v psychológii.

Riešenie: Karol ovplyvňuje Jana a Denisu, na Karola vplýva Viera, Iveta a Denisa

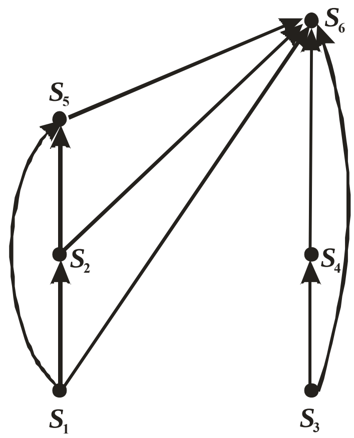
10.3. Skonštruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

S_1: x:=0

S_2: x:= x + 1

S_3: y:=2
S_4: z:=y
S_5: x:= x + 2
S_6: y:= x + z

Riešenie:

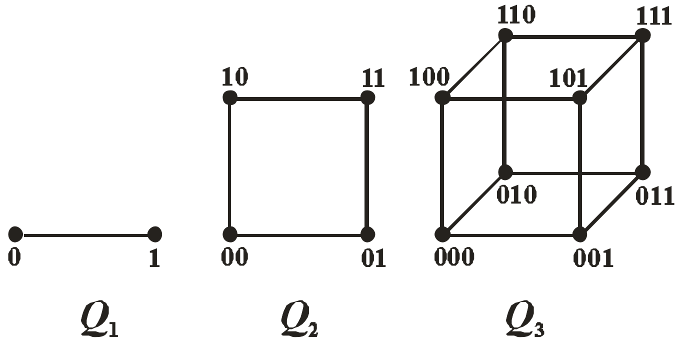


10.4. Môže existovať obyčajný graf s 15 vrcholmi, pričom každý z nich má stupeň 5?
Riešenie:
Nemôže, taký graf by mal nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa, čo odporuje Vete 10.1.

10.5. Keď pre každého člena spoločnosti spočítame, s koľkými ľuďmi si potriasol rukou, a tieto počty sčítame, ukážte, že súčet je párny. Predpokladajte, že nikto si nepotriasol rukou sám zo sebou.
Riešenie:
Keď si niekto potrasie rukou s niekým iným, pribúda k celkovému súčtu 2, pretože sa započítava prírastok pre každého z dvojice. Platí, že súčet stupňov vrcholov je dvojnásobkom počtu hrán, v našom prípade vrcholy predstavujú ľudí, hrany podanie ruky medzi dvojicou ľudí.

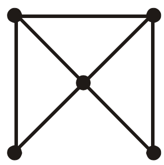
10.6. Pre ktoré hodnoty n sú nasledujúce grafy bipartitné?
a) K_n
Riešenie: Iba pre n=1 a n=2, pre viac ako 2 sú vždy aspoň dva vrcholy v jednej partícii, a ľubovoľné 2 vrcholy musia byť spojené hranou.
b) C_n
Riešenie: pre kružnice párneho stupňa, keď si oindexujeme postupne vrcholy idúc po hranách kružnice, do jednej partície dáme vrcholy indexované párnym číslom, do druhej nepárnym číslom.
c) W_n, čo je označenie tzv. kolesá, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kružnicou ako u C_n
Riešenie: pre žiadne n, v jednej partícii musí byť samostatný stred kolesa spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, a keď je v druhej partícii viac vrcholov ako len jeden, musí byť ako v kružnici medzi nimi hrana.
d) Q_n, tzv. n-kocky (alebo n-rozmerná kocka, n-cube), kde vrcholy reprezentujú binárne reťazce dĺžky n. Vrcholy sú spojené hranou vtedy, ak sa im odpovedajúce bitové reťazce líšia práve v jednej pozícii, pozri obr. 10.28.

Riešenie: pre všetky n, v žiadnej n-rozmernej kocke sa nenachádza n-uholník C_n nepárneho stupňa.



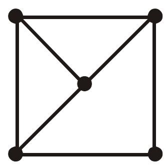
Obrázok 10.28. Prvé tri n-rozmerné kocky (pre n = 1, 2 a 3).

10.7. Koľko hrán má graf, keď má vrcholy stupňa 4,3,3,2,2? Nakreslite taký graf.
Riešenie: Graf má (4+3+3+2+2)/2=7 hrán, možnou realizáciou je napr.



10.8. Existuje obyčajný graf o piatich vrcholoch nasledujúcich stupňov? Keď áno, nakreslite ich.

a) 3,3,3,3,2



b) 1,2,3,4,5

Riešenie: neexistuje, nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa

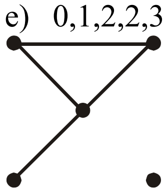
c) 1,2,3,4,4

Podľa Havlovej vety nie je postupnosť grafová
pretože nie je grafová ani postupnosť 0,1,2,3

d) 3,4,3,4,3

Riešenie: neexistuje, nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa

e) 0,1,2,2,3



f) 1,1,1,1,1

Riešenie: neexistuje, nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa

10.9. Koľko podgrafov o aspoň jednej hrane majú grafy K_2, K_3 a W_3?

Riešenie: 1, 7, $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=63$

10.10. Nech G je graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách. Nech M je maximálny stupeň vrcholov z G a nech m je minimálny stupeň vrcholov z G. Ukážte, že $2|E|/|V| \geq m$ a $2|E|/|V| \leq M$.

Riešenie: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} m = |V| m$

$$2|E| \geq |V| m$$

$$2|E| / |V| \geq m$$

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \sum_{|V|} M = |V| M$$

$$2|E| \leq |V| M$$

$$2|E| / |V| \leq M$$

10.11. Obyčajný graf sa volá *pravidelný* (regular), keď každý z jeho vrcholov má rovnaký stupeň. Koľko vrcholov stupňa 4 má regulárny graf o 10 hranách?

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

Riešenie: $2 \times 10 = |V| \times 4$

$$5 = |V|$$

10.12. *Doplnkový* (príp. komplementárny, complementary) graf $\overline{G}$ ku grafu G má rovnakú vrcholovú množinu ako G. Dva vrcholy sú spojené hranou v $\overline{G}$ vtedy, keď nie sú spojené v G. Nájdite

a) $\overline{K}_n$

Riešenie: Graf z n izolovaných vrcholov.

b) $\overline{K}_{m,n}$

Riešenie: $K_m \cup K_n$, kde zjednotenie je dizjunktné, teda K_m a K_n nemajú spoločné hrany ani vrcholy.

c) $\overline{C}_n$

Riešenie: $K_n \setminus C_n$ (Graf C_5 je samokomplementárny, teda doplnkový sám k sebe) grafy s hranami medzi v_i a v_j, pokiaľ $i \neq j \pm 1 \pmod{n}$

d) $\overline{Q}_n$

Riešenie: graf s vrcholmi reprezentovanými bitovými reťazcami dĺžky n, ktoré sú spojené, pokiaľ odpovedajúca Hammingova norma je väčšia ako 1

10.13. Keď je G obyčajný graf o 15 hranách a $\overline{G}$ má 13 hrán, koľko vrcholov má graf G?

Riešenie: Graf zjednotený s komplementom dáva kompletný graf

$$2|E| = |V| \deg(v)$$

$$2 \times 28 = |V| \times (|V| - 1)$$

$$|V| = 8$$

10.14. Keď je G obyčajný graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, koľko hrán má graf $\overline{G}$?

Riešenie: $|V|(|V|-1)/2-|E|$

10.15. Ukážte, že keď je G obyčajný bipartitný graf o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, potom $|E| \leq |V|^2/4$.

Riešenie: Keď je bipartitný, počet hrán sa rovná násobku počtov vrcholov jednotlivých partícií, ktorý je najväčší, keď sú partície rovnako veľké, teda každá o $|V|/2$ vrcholoch, čo je maximum $|V|/2\times|V|/2=|V|^2/4$.

10.16. Nájdite incidenčné matice pre

a) K_n

Riešenie: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

b) C_n

Riešenie: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) W_n, čo je označenie tzv. kolesa, čo je hviezda so stredovým vrcholom, kde obvodové vrcholy sú prepojené kružnicou ako u C_n

Riešenie: $\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & B & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$, kde B je odpoveď z b)

d) $K_{m,n}$

Riešenie: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

10.17. Predpokladajme, že G a H sú obyčajné izomorfné grafy. Ukážte, že ich komplementárne grafy $\overline{G}$ a $\overline{H}$ sú tiež izomorfné.

Riešenie: Keď grafy G a H sú obyčajné izomorfné grafy, dajú sa ich vrcholy indexovať tak, že im odpovedajúce matice susednosti sa rovnajú. Pokiaľ z týchto grafov vyrobíme komplementárne grafy, pre odpovedajúce matice susednosti to s výnimkou diagonálnych elementov znamená, že nuly sa vymenia za jednotky a naopak. Keď sa rovnali pôvodné matice, transformované matice pre $\bar{G}$ a $\bar{H}$ sa tiež musia navzájom rovnať. To znamená, že aj grafy $\bar{G}$ a $\bar{H}$ sú tiež izomorfné

10.18. Ukážte, že vrcholy bipartitného grafu s dvoma alebo viac vrcholmi môžu byť indexované tak, že ich matica susednosti má tvar $\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & 0 \end{bmatrix}$, kde štyri vstupy sú obdĺžnikové bloky.
Riešenie: Indexujte vrcholy tak, že ako prvé sú indexované všetky vrcholy jednej z partícií, a potom všetky vrcholy druhej z partícií. Vzhľadom na to, že neexistuje žiadna hrana medzi partíciami, matica má požadovanú formu.

10.19. Obyčajný graf sa volá samokomplementárny (selfcompementary), keď grafy G a $\bar{G}$ sú izomorfné. Ukážte, že cesta na štyroch vrcholoch je samokomplementárna.
Riešenie: Vrcholy cesty môžme indexovať tak, že graf má nasledujúcu maticu susednosti a k nej komplementárnu maticu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maticu komplementárneho grafu môžeme ale transformovať na pôvodnú maticu výmenou prvkov matice A_{ij} za prvky $A_{p_i p_j}$ pre permutáciou $\boldsymbol{p}$= (2,4,1,3), čo odpovedá tomu, že z pôvodného grafu dostaneme po zmene indexovania vrcholov 1→2, 2→4, 3→1, 4→3 graf totožný s grafom odpovedajúcim matici susednosti $\bar{\boldsymbol{A}}$.

10.20. Ukážte, že keď je G samokomplementárny obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi, potom $|V|$ modulo 4=0 alebo 1.
Riešenie: Keďže samokomplementárny graf musí mať v matici susednosti okrem hlavnej diagonály zaplnených jednotkou presne polovicu prvkov, súčet ktorých sa musí rovnať dvojnásobku počtu hrán, platí $2|E| = \frac{|V|^2 - |V|}{2}$.
Keďže počet hrán musí byť celé číslo, potom aj $\frac{|V|^2 - |V|}{4}$ musí byť celé číslo, teda $\frac{|V|(|V|-1)}{4}$ musí byť celé číslo, čo je vtedy, keď alebo $|V|$ je deliteľné 4 bezo zvyšku, alebo $|V|$-1 je deliteľné 4 bezo zvyšku. Keď ($|V|$-1) mod 4=0, potom $|V|$ mod 4=1.

10.21. Pre ktoré celé čísla je C_n samokomplementárny?
Riešenie: C_5. Keďže kružnica je regulárny graf, musí platiť

$$2|E| = |V|\deg(v) = |V_{complementary}|\deg_{complementary}(v)$$

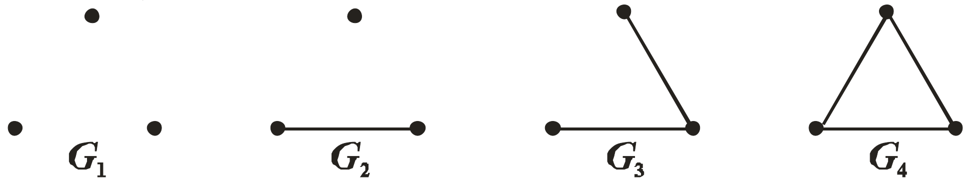
$$|V| \times 2 = |V| \times (|V| - 3)$$

$$|V| = 5$$

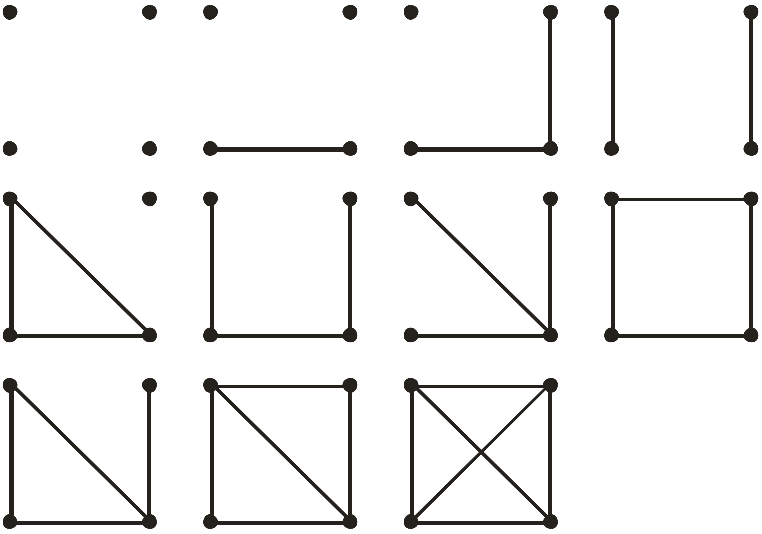
10.22. Koľko neizomorfných obyčajných grafov s n vrcholmi existuje pre n rovné
a) 2

Riešenie: 2,

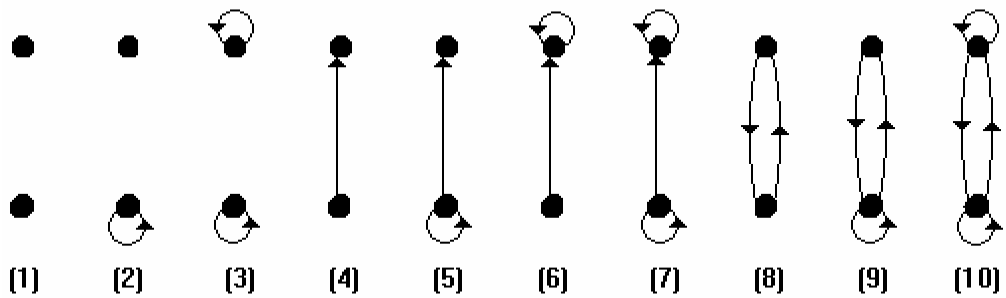
b) 3
Riešenie: 4,



c) 4
Riešenie: 11



10.23. Koľko neizomorfných obyčajných orientovaných grafov s n vrcholmi existuje pre n rovné 2?
Riešenie: 10



10.24. Keď vynásobíme maticu susednosti pre neorientovaný graf s maticou k nej transponovanou, čo je výsledkom vynásobenia?
Riešenie: Násobok je matica $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, kde a_{ij} je počet hrán z v_i do v_j pre $i\neq j$ a a_{ii} je počet hrán incidentných s v_i.

10.25. Zistite, či grafy zadané maticou susednosti sú izomorfné

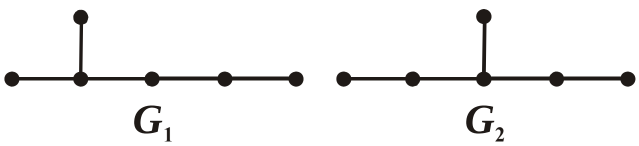
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Riešenie: Sú izomorfné, stačí vymeniť prvky prvej matice A_{ij} za prvky $A_{p_i p_j}$ pre permutáciu $\boldsymbol{p}$= (3,4,1,2).

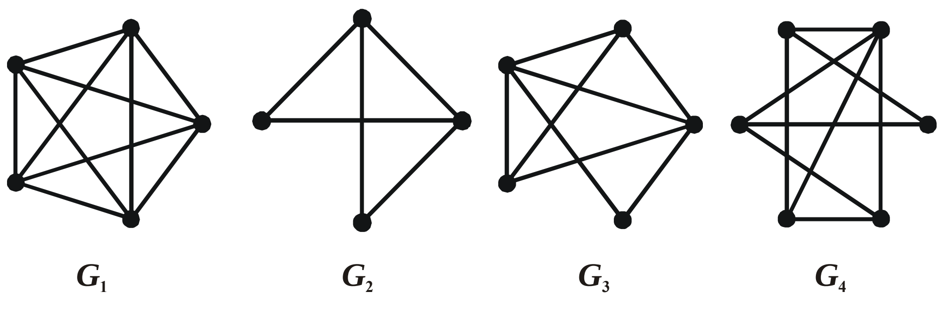
10.26. Definujte izomorfizmus pre orientované grafy.
Riešenie: Grafy sú izomorfné, keď medzi nimi existuje mapovanie 1-1 vrcholov, ktoré zachováva tak existenciu ako aj orientáciu hrán.

10.27. Koľko pamäti je potrebné na reprezentáciu obyčajného súvislého grafu o $|V|$ vrcholoch a $|E|$ hranách, keď použijeme
a) zoznam dvojíc vrcholov
Riešenie: $2|E|$, minimálne $2(|V|-1)$, maximálne $2(|V|^2-|V|)$
b) maticu susednosti
Riešenie: $|V|^2$
c) incidenčnú maticu
Riešenie: $|E| \times |V|$

10.28. Nájdite dvojicu obyčajných grafov s rovnakou multimnožinou stupňov vrcholov, ktoré ale nie sú izomorfné.
Riešenie: grafová postupnosť 3,2,2,1,1,1



10.29. Ktorý z grafov na obr. 10.29 sa dá nakresliť jedným ťahom?

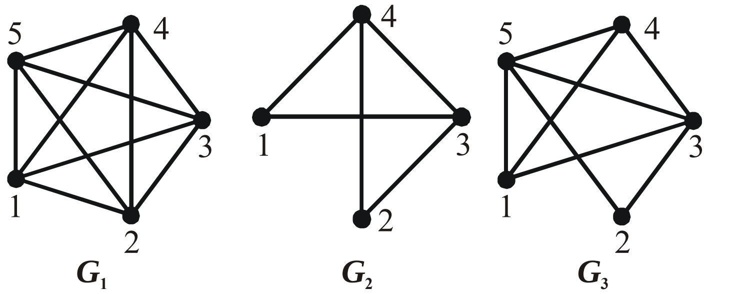


Obrázok 10.29. Sú to jednoťažky?

Riešenie: Graf G_1 má sekvenciu stupňov vrcholov 4,4,4,4,4, všetky vrcholy majú párny stupeň a teda sa dá nájsť uzatvorený eulerovský ťah. Grafy G_2 a G_3 majú sekvenciu stupňov vrcholov 3,3,2,2, resp. 4,4,3,3,2, práve 2 vrcholy majú nepárny stupeň a teda sa dá nájsť neuzatvorený eulerovský ťah. Graf G_4 má sekvenciu stupňov vrcholov 4,3,3,3,3,2 a teda preň neexistuje eulerovský ťah.

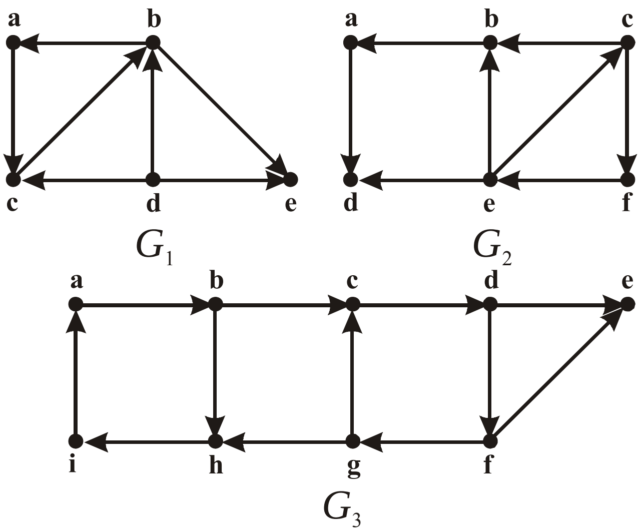
10.30. Pomocou algoritmu z príkladu 10.5 nájdite uzavreté a otvorené eulerovské ťahy pre prvé tri grafy z obr. 10.29 cvičenia 10.29.

Riešenie:



uzavretý eulerovský ťah kružnica pre G_1: 1,2,3,4,5,1,3,5,2,4,1
otvorený eulerovský ťah pre G_2: 3,1,4,2,3,4
otvorený eulerovský ťah pre G_3: 1,5,4,3,2,5,3,1,4

10.31. Nájdite také najväčšie silno súvislé podgrafy (také, ku ktorým sa nedá pridať vrchol, aby neprestali byť silno súvislé), ktoré zároveň majú spomedzi najväčších silno súvislých podgrafov aj najviac vrcholov, pre grafy z obr. 10.30.



Obrázok 10.30. Nájdite najväčšie silno súvislé podgrafy

Riešenie:
Najväčšie silno súvislé podgrafy pre G_1 sú indukované množinami vrcholov: {a,b,c}
Najväčšie silno súvislé podgrafy pre G_2 sú indukované množinami vrcholov: {c,e,f}
Najväčšie silno súvislé podgrafy pre G_3 sú indukované množinami vrcholov: {a,b,c,d,f,g,h,i}

10.32. Nájdite počet ťahov dĺžky n medzi dvoma rôznymi vrcholmi u $K_{3,3}$ pre n rovné
(a) 2, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície $K_{3,3}$
(b) 3, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície $K_{3,3}$
(c) 4, ak sú oba vrcholy v jednej množine bipartície $K_{3,3}$
(d) 5, ak sú oba vrcholy v rôznych množinách bipartície $K_{3,3}$

(a) 2
Riešenie: 3 (iba prostredný vrchol cesty je voliteľný, volí sa medzi 3 vrcholmi)
(b) 3
Riešenie: 9
Celkovo vyberáme pre výber vnútorných vrcholov cesty z 3×3 možností poradia pre x,y, u ťahu a,x,y,b, kde nemusíme uvažovať o možnosti opakovania dvojice vrcholov

za sebou, pretože berieme nasledujúci vrchol vždy z ostatnej, disjunktnej množiny vrcholov

(c) 4

Riešenie: 27

Celkovo vyberáme pre výber vnútorných vrcholov cesty z 3×3×3 možností poradia pre x,y,z u ťahu a,x,y,z,b, kde nemusíme uvažovať o možnosti opakovania dvojice vrcholov za sebou, pretože berieme nasledujúci vrchol vždy z ostatnej, disjunktnej množiny vrcholov

(d) 5

Riešenie: 81=3×3×3×3

10.33. Nájdite počet sledov dĺžky n medzi dvoma rôznymi vrcholmi u K_4 pre rovnaké hodnoty n ako v predchádzajúcom prípade.

(a) 2

Riešenie: 2 (iba prostredný vrchol cesty je voliteľný, volí sa medzi 2 vrcholmi)

(b) 3

Riešenie: 7

(2 cesty obsahujúce všetky 4 vrcholy, iba poradie prostredných 2 vrcholov je voliteľné; 3 sledy idúce z východzieho vrcholu na niektorý iný, naspäť, a potom do cieľového vrcholu; 2 sledy idúce z východzieho vrcholu do cieľového vrcholu, potom na niektorý iný okrem východzieho, a naspäť)

Predpokladajme, že máme vrcholy a,b,c,d.

Celkovo vyberáme pre výber vnútorných vrcholov sledu z 3^2 možností poradia pre x,y, u sledu a,x,y,b, kde x≠a a y≠b, ale nesmú sa opakovať dva rovnaké vrcholy za sebou a,x,x,b, čo sa mohlo stať v dvoch prípadoch, teda 3×3-2=7

(c) 4

Riešenie: 20

Celkovo vyberáme pre výber vnútorných vrcholov cesty z 3×4×3 možností poradia pre x,y,z u sledu a,x,y,z,b, kde x≠a a z≠b, ale nesmú sa opakovať dva rovnaké vrcholy za sebou a,x,x,y,b, pri x≠y, čo sa mohlo stať v 2×2+3=7 prípadoch, tiež sa nesmú opakovať dva rovnaké vrcholy za sebou a,x,y,y,b, pri x≠y, čo sa mohlo stať v 2×2+3=7 prípadoch, a nesmú sa opakovať 3 rovnaké symboly za sebou, a,x,x,x,b, čo sa mohlo stať v 2 prípadoch, celkovo 3×4×3-7-7-2=20

(d) 5

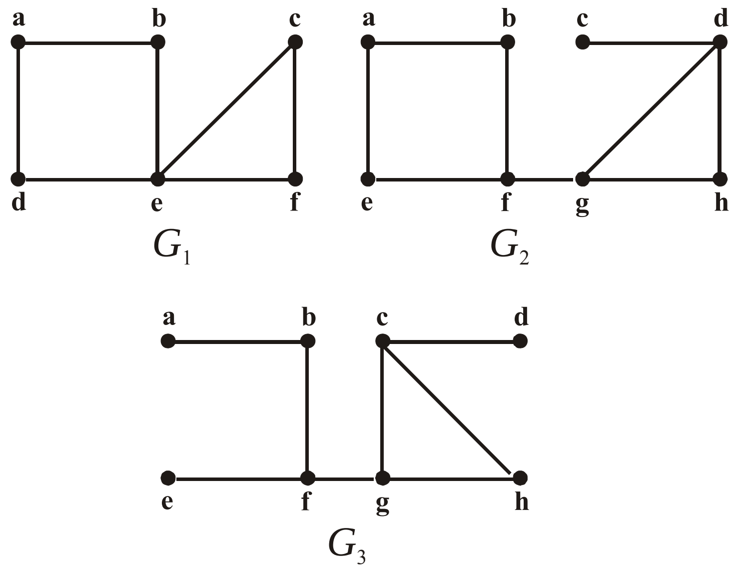
Nech sled je označený a,w,x,y,z,b. Keď w≠a a w ≠b, ide o niektorý z ostatných dvoch vrcholov, kedy pre každý z nich máme 20 možností, podobne ako v prípade (c). Keď w=b, potom x≠b a máme voľbu 3 možností pre x. Pre každú z týchto možností máme podľa časti (b) 7 možností pre kombináciu y,z, teda máme 21 možností. Celkovo máme 20+20+21=61 možností.

Inou možnosťou je jednoducho zobrať maticu susednosti u K_4 a urobiť jej druhú, tretiu, štvrtú a piatu mocninu, výsledky by boli hodnoty mimodiagonálnych prvkov.

10.34. Ukážte že v akomkoľvek obyčajnom grafe existuje cesta z ľubovoľného vrcholu nepárneho stupňa do nejakého iného vrcholu nepárneho stupňa.

Riešenie: Zoberme si graf (alebo, v prípade, že je graf nesúvislý, tak komponent) s vybraným vrcholom nepárneho stupňa. Keďže daný graf (alebo komponent) je súvislý, dá sa zo zvoleného vrcholu nepárneho stupňa prejsť do ľubovoľného iného vrcholu grafu, resp. komponentu. Teraz ostáva dokázať, že v danom grafe, resp. komponente existuje aspoň jeden ďalší vrchol nepárneho stupňa. Podľa Vety 10.1 ale existuje párny počet vrcholov nepárneho stupňa (nech už v súvislom grafe, alebo v komponente), a teda keď existuje jeden taký vrchol, musí existovať nepárny počet ďalších vrcholov nepárneho stupňa, teda najmenej ešte jeden ďalší.

10.35. Nájdite všetky artikulácie grafov z obr. 10.20.



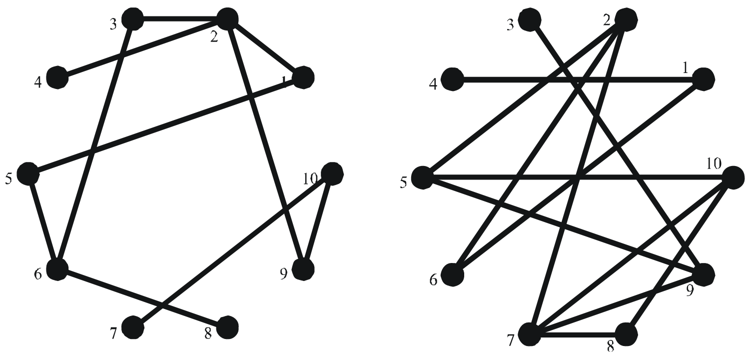
Obrázok 10.31. Nájdite artikulácie a mosty

Riešenie:
Artikulácie u grafu G_1 je vrchol e
Artikulácie u grafu G_2 sú vrcholy f, g,d
Artikulácie u grafu G_3 sú vrcholy b,c, f, g

10.36. Nájdite všetky mosty u grafov z obr. 10.31.
Riešenie:
Mosty u grafu G_1 nie sú
Mosty u grafu G_2 sú hrany $\{f, g\},\{c,d\}$
Mosty u grafu G_3 sú hrany $\{f, g\},\{c,d\},\{a, b\},\{e,f\},\{b,f\}$

10.37. Dokážte, že každý vrchol mostu obyčajného grafu je artikuláciou, pokiaľ má stupeň väčší ako 1.
Riešenie: Obmedzíme našu pozornosť na komponent, v ktorom most leží (ostatné komponenty sú pre nás irelevantné). Nech most tvorí dvojica vrcholov uv. Keď je most odstránený, graf má dva komponenty, kde jedna obsahuje vrchol u a druhá vrchol v. Keď mal vrchol v stupeň jedna, potom je jasné, že jeho odstránením nevzniklo viac komponentov. Keď vrchol v mal stupeň väčší ako jedna, potom je jasne spojený ešte aspoň s nejakým vrcholom w v rámci komponentu. Teda, keď v je odstránený, dostávame aspoň dva komponenty, jeden s vrcholom u a druhý s vrcholom w.

10.38. Komunikačná linka v komunikačnej sieti by mala byť zdvojená, keď jej nefunkčnosť znemožňuje prenos signálu medzi nejakou dvojicou vrcholov. Ktoré spoje by mali byť spojené v grafoch na obr. 10.32?



Obrázok 10.32. Ktoré hrany by mali byť zdvojené pre dvojité zabezpečenie súvislosti komunikačnej sieti?

Riešenie: {{6,8},{2,4},{7,10},{9,10},{2,9}}, {{1,4},{3,9},{2,6},{1,6}}

10.39. Ukážte, že obyčajný graf o n vrcholoch je súvislý, pokiaľ obsahuje viac ako $(n-1)(n-2)/2$ hrán.
Riešenie: Predpokladajme, že graf nie je súvislý. Potom v sebe obsahuje komponent s k vrcholmi, kde $k\in[1,n-1]$. Zvyšných $n-k$ vrcholov je v jednom alebo viac ďalších komponentoch. Maximálny možný počet hrán tohto grafu je teda $\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}$, čo sa dá rozpísať ako $k^2-nk+(n^2-n)/2$. To je kvadratická funkcia k, ktorá je minimálna pre $k=n/2$, a maximálna pre okrajové hodnoty definičného oboru, teda pre $k=1$ a $k=n-1$. V druhom prípade dostávame po dosadení za k vzorec $(n-1)(n-2)/2$. Preto najväčší počet hrán, ktorý môže nesúvislý graf mať, je $(n-1)(n-2)/2$, takže každý graf s viac vrcholmi je súvislý.

10.40. Ukážte, ako sa dá Veta 10.7. využiť na nájdenie dĺžky najkratšej cesty medzi dvoma vrcholmi.
Riešenie: Hľadajme dĺžky najkratšej cesty medzi vrcholmi v_i a v_j. Zostrojíme maticu susednosti **A** a pokiaľ má pre indexy vrcholov i,j prvok a_{ij} rovný jednej, je dĺžka 1. V opačnom prípade robíme mocniny $\mathbf{A}^r$ pre stále väčšie r, dokiaľ nedostaneme na pozícii a_{ij} nenulovú hodnotu a zároveň dokiaľ sa $r<n-1$. V prvom prípade je mocnina r rovná hľadanej dĺžke cesty, v druhom prípade je graf nesúvislý a cesta neexistuje.

10.41. Ukážte, ako sa dá Veta 10.7. využiť na zistenie, či je graf súvislý.
Riešenie: Nech A je matica susednosti daného grafu. Veta 10.7 nám hovorí, že $\mathbf{A}^r$ obsahuje počet ciest dĺžky r medzi vrcholmi. Keď prvok matice $\mathbf{A}^r$ je väčší ako 0, potom medzi odpovedajúcimi vrcholmi existuje cesta (alebo sled) dĺžky r. Najdlhšia cesta v grafe môže mať dĺžku n-1. Preto stačí posčitovať $\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2+\ldots+ \mathbf{A}^{n-1}$ a pokiaľ je každý nediagonálny prvok nenulový, potom je graf súvislý.

10.42. Ukážte, že obyčajný graf je bipartitný práve vtedy, keď nemá žiadne kružnice nepárnej dĺžky.
Riešenie: Musíme dokázať obidva smery implikácie.

Keď je graf bipartitný (partície pomenujeme *A* a *B*), potom vrcholy každej cesty musí ležať striedavo v *A* a *B*. Preto cesta začínajúca v A skončí po nepárnom počte krokov v B a po párnom počte krokov v A. Keďže kružnica končí v rovnakom vrchole, v ktorom začínala, dĺžka kružnice musí byť párna.
Opačný smer je zložitejšie dokázať. Predpokladáme, že všetky kružnice majú párnu dĺžku a chceme dokázať, že graf je bipartitný. Môžeme predpokladať súvislosť grafu, keby nebol súvislý, budeme pracovať s každým komponentom zvlášť. Nech v je vrchol grafu a nech A je množina všetkých vrcholov do ktorých vedie cesta nepárnej dĺžky začínajúca vo v a nech B je množina všetkých vrcholov do ktorých vedie cesta párnej dĺžky začínajúca vo v. Pretože komponent je súvislý, každý vrchol leží v A alebo v B. Žiaden vrchol nemôže súčasne byť v A aj v B, pretože spojením ciest nepárnej dĺžky do A a párnej do B by sme dostali sled nepárnej dĺžky a ten obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, čo je v rozpore s predpokladom. Teda vrcholy môžu byť rozdelené na dve disjunktné podmnožiny. Teraz iba musíme ukázať, že každá hrana spája vrcholy z rôznych podmnožín. Keď xy je hrana kde $x \in A$, potom cesta nepárnej dĺžky z v do x nasledovaná hranou xy vytvára cestu párnej dĺžky z v do y, teda $y \in B$.

10.43. Ukážte, že graf reprezentujúci prípustné ťahy koňom na šachovnici $m \times n$ (kde m,n sú kladné celé čísla, je bipartitný graf.
Riešenie: Dve partície grafu budú stotožnené s množinami vrcholov odpovedajúcimi políčkam čiernej, resp. bielej farby. Keďže kôň na šachovnici ťahá vždy z bielej farby na čiernu a naopak, hrany odpovedajúce ťahom definujú bipartitný graf.

10.44. Ukážte, že neexistuje uzavretá cesta koňom pre šachovnicu $m \times n$, kde m,n sú nepárne čísla.
Riešenie: Dokážeme sporom. Keď m,n sú nepárne čísla, ich násobok je tiež nepárny. Podľa predchádzajúceho cvičenia je graf bipartitný. Keďže musíme vždy skákať z jednej partície A na druhú B a žiaden vrchol sa nesmie opakovať, teda hamiltonovská kružnica by vyzerala ako $a_1,b_1, a_2,b_2,..,a_k,b_k,a_1$, počet vrcholov v partíciách musí byť rovnaký, čo nám dáva ako súčet vrcholov párne číslo. To vedie k sporu s tým, že $m \times n$ je nepárne číslo.

10.45. Ukážte, že existuje Grayov kód poriadku n pre akékoľvek kladné číslo n, alebo, ekvivalentne, ukážte, pomocou matematickej indukcie, že n-kocka Q_n má vždy hamiltonovskú kružnicu.
Riešenie: Trik je použiť Grayov kód pre n na vygenerovanie kódu pre n+1. Zoberieme Grayov kód pre n a pridáme nulu pred každý reťazec, aby sme dostali prvú polovicu Grayovho kódu pre n+1, potom zoberieme znova Grayov kód pre n a pridáme jednotku pred každý reťazec, aby sme dostali druhú polovicu. U druhej polovice prevrátime poradie kódov, aby sa tam, kde budú obidve polovice susediť, líšili iba o 1 bit. Pre formálny dôkaz použijeme indukciu. Pre n=1 je kód 0,1 (čo ale ešte nie je hamiltonovská kružnica). Predpokladajme induktívnu hypotézu, že $c_1, c_2, ..., c_{2^n}$ je Grayov kód pre n. Potom $0c_1, 0c_2, ..., 0c_{2^n}, 1c_{2^n}, ..., 1c_2, 1c_1$ je Grayov kód pre n+1.