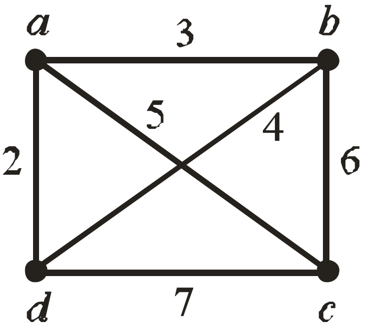
Cvičenie:

11.1. Upravte Dijkstrov algoritmus pre nájdenie najkratšej vzdialenosti medzi dvoma vrcholmi *a* a *z* v obyčajnom súvislom ohodnotenom grafe tak, aby bola nájdená dĺžka najkratšej cesty od východzieho vrcholu *a* ku každému inému vrcholu.
Riešenie: Jediné, čo je potrebné upraviť, je nezastaviť algoritmus, keď sa druhý zvolený vrchol *z* dostane do množiny *S*. Podmienku u **while** zmeníme na niečo ako $S \neq V$.

11.2. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre grafy na obr. 11.C1 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.



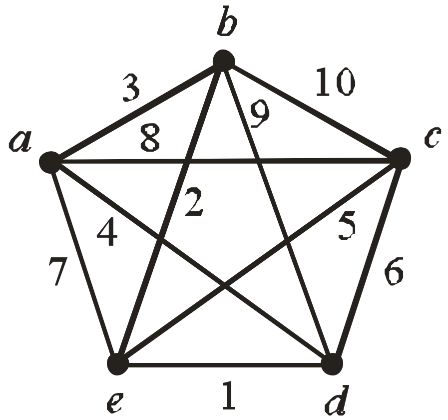
Obrázok 11.C1. Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

Riešenie:
Nasledujúca tabuľka určuje tri rôzne hamiltonovské kružnice a ich váhy.

Kružnica	váha
a-b-c-d-a	3+6+7+2=18
a-b-d-c-a	3+4+7+5=19
a-c-b-d-a	5+6+4+2=17

Najmenší súčet váh má posledná kružnica.

11.3. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre grafy na obr. 11.C2 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.



Obrázok 11.C2. Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

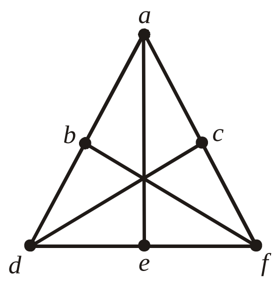
Riešenie:

a,b,c,d,e,a,	27	a,c,d,b,e,a,	32	a,d,e,b,c,a,	25
a,b,c,e,d,a,	23	**a,c,d,e,b,a,**	**20**	a,d,e,c,b,a,	23
a,b,d,c,e,a,	30	a,c,e,b,d,a,	28	a,e,b,c,d,a,	29
a,b,d,e,c,a,	26	a,c,e,d,b,a,	26	a,e,b,d,c,a,	32
a,b,e,c,d,a,	**20**	a,d,b,c,e,a,	35	a,e,c,b,d,a,	35
a,b,e,d,c,a,	**20**	a,d,b,e,c,a,	28	a,e,c,d,b,a,	30
a,c,b,d,e,a,	35	a,d,c,b,e,a,	29	a,e,d,b,c,a,	35
a,c,b,e,d,a,	25	**a,d,c,e,b,a,**	**20**	a,e,d,c,b,a,	27

11.4. Navrhnite ohodnotený graf tak, že celková suma váh uzavretého sledu, ktorý navštívi každý vrchol aspoň raz je minimálna pre sled, ktorý navštívi niektoré vrcholy viackrát.
Riešenie: Keď zoberieme trojuholník ABC a urobíme jednu z váh, povedzme AC, veľmi veľkú (napr. 100), potom sa minimálny ťah bude tejto hrane vyhýbať. Povedzme, že hrane AB dáme váhu 1 a hrane BC 2, potom by hamiltonovská kružnica mala váhu 103, ale ťah A-B-C-B-A navštívi každý vrchol aspoň raz a má váhu 1+2+2+1=6. Tento ťah navštívi vrchol B dvakrát, aby sa vyhol prechodu cez „ťažkú“ hranu AC.

11.5. Dajú sa z piatich domov viesť cesty ku dvom studniam tak, aby sa žiadna z ciest nekrížila?
Riešenie: Ide o rovinnú reprezentáciu grafu $K_{5,2}$, ktorá sa dá jednoducho nájsť tak, že pätici vrcholov z jednej partície (rozkladu) usporiadame na priamke, na jednej strane priamky bude jeden vrchol z druhej partície, na druhej strane priamky bude vrchol z druhej partície.

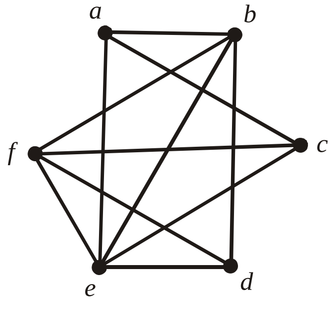
11.6. Zistite, či je graf na obr. 11.C3 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.



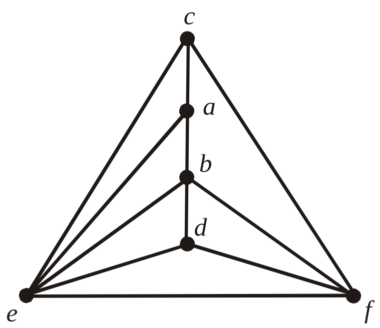
Obrázok 11.C3. Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?

Riešenie: Nedá, graf je izomorfný s $K_{3,3}$, s partíciami $\{a,d,f\}$ a $\{b,c,e\}$

11.7. Zistite, či je graf na obr. 11.C4 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.



Obrázok 11.C4. Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?



Riešenie:
Rovinná reprezentácia grafu z obr. 11.C4

11.8. Ukážte, že kompletný graf K_5 nie je planárny pri použití podobných argumentov, aké boli použité v príklade s oblasťami R pre $K_{3,3}$.
Riešenie: Dôkaz robíme kontradikciou. Predpokladajme, že existuje rovinná reprezentácia K_5, a volajme vrcholy v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Z každého vrcholu ku všetkým ostatným musí viesť hrana. Pre sekvenciu v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, musí platiť, že tvorí päťuholník. Ten rozdeľuje rovinu na vonkajšiu časť a vnútornú časť. Hrana $\{v_1, v_3\}$ musí existovať, predpokladajme, že vo vnútornej časti. Potom hrany $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ musia byť vo vonkajšej časti. To zabraňuje hranám $\{v_1, v_4\}$ a $\{v_3, v_5\}$, aby boli vo vonkajšej časti. Ale obidve tieto hrany nemôžu byť vo vnútri bez kríženia, Preto neexistuje rovinná reprezentácia grafu K_5.

11.9. Predpokladajme, že súvislý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?
Riešenie: Použijeme Eulerovu formulu $|R|=|E|-|V|+|K|+1$, teda $|R|=6\times4/2-6+1+1=8$.

11.10. Dokážte Vetu 11.4.
Riešenie: Stupeň každej oblasti je najmenej 4 (graf neobsahuje slučky, čo by vytvorilo oblasti stupňa 1, násobné hrany, čo by vytvorilo oblasti dĺžky 2, ani trojuholníky, čo by vytvorilo oblasti dĺžky 3). Dĺžka vonkajšej oblasti je tiež aspoň 4, keďže predpokladáme počet vrcholov väčší ako 3. Preto, podobne ako v dôkazu Vety 11.2, $2|E|\geq4|R|$ alebo $|R|\leq|E|/2$. Dosadením do Eulerovej formule dostávame $|E|-|V|+2\leq|E|/2$, z čoho vychádza $|E|\leq2|V|-4$.

11.11. Predpokladajme, že súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi neobsahuje kružnice dĺžky 4 alebo kratšie. Dokážte, že $|E|\leq(5/3)|V|-(10/3)$, keď počet vrcholov je väčší ako 4.
Riešenie: Dôkaz je rovnaký ako u cvičení 11.10, iba dĺžky každej oblasti teraz musí byť aspoň 5. Tak dostaneme $2|E|\geq5|R|$.

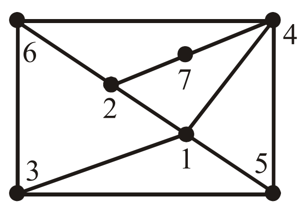
11.12. Ktorý z nasledujúcich neplanárnych grafov má vlastnosť, že po odstránení ľubovoľného vrcholu a všetkých s ním incidentných hrán dostávame planárny graf?
(a) K_5 (b) K_6 (c) $K_{3,3}$ (d) $K_{3,4}$
Riešenie:
(a) Keď odstránime vrchol z K_5, dostávame K_4, pre ktorý sme si ukázali v príklade v texte, že je planárny.
(b) Keď odstránime vrchol z K_6, dostávame K_5, pre ktorý sme si ukázali v texte, že nie je planárny.

(c) Keď odstránime vrchol z $K_{3,3}$, dostávame $K_{3,2}$, pre ktorý je v obr. 11.5, graf G_3 ukázané, že je planárny.
(d) Keď odstránime vrchol z $K_{3,4}$ vrchol z partície o 4 vrcholoch, dostávame $K_{3,3}$, pre ktorý sme si ukázali v texte, že nie je planárny.

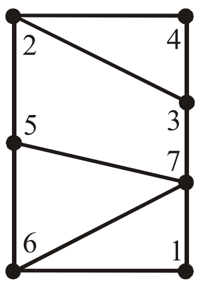
11.13. ***Priesečníkové číslo*** (***crossing number***) obyčajného grafu je najmenší možný počet preťatí dvoch hrán inde ako v s nimi incidentných vrcholoch (pričom žiadne tri hrany sa nesmú pretnúť v spoločnom bode). Vo všeobecnosti ide o veľmi zložitý problém, dôležitý pre návrh elektronických obvodov (definuje počet izolovaných drôtov potrebných na pridanie k plošnému obvodu). Vašou úlohou je ukázať, že $K_{3,3}$ má priesečníkové číslo rovné jednej.
Riešenie: Konštrukcia je ukázaná pri obr. 11.5, ukazujúcim, že $K_{3,3}$ je neplanárny.

11.14. ***Hrúbka (Thickness***) jednoduchého grafu je najmenší počet planárnych podgrafov, ktoré majú graf G ako ich zjednotenie. Táto veličina je dôležitá pre návrh elektronických obvodov, aby bolo možné zistiť, koľko najmenej vrstiev je potrebné na stavbu obvodu. Ukážte, že graf $K_{3,3}$ má hrúbku 2.
Riešenie: Konštrukcia je podobná ako pri obr. 11.5 graf G_3, ukazujúcim, že $K_{3,3}$ je neplanárny. Druhý podgraf tvorí iba hrana, ktorá by inak po pridaní spôsobila kríženie.

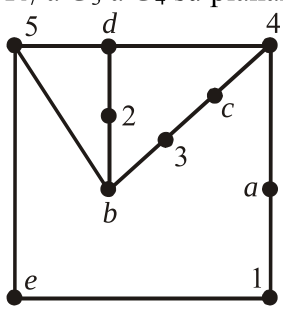
11.15. Nájdite hrúbku grafov (a) K_5 (b) K_6 (c) K_7 (d) $K_{3,4}$ (e) $K_{4,4}$ (f) $K_{5,5}$
Riešenie: Všetky zo zmienených grafov sú neplanárne, prvé tri obsahujú ako podgraf K_5, ostatné tri podgraf $K_{3,3}$. Ich hrúbka bude teda najmenej 2. Problém môžeme zobrať z opačného pohľadu, každý z prvých troch grafov je podgrafom grafu K_7, a každý z ostatných troch grafov je podgrafom grafu $K_{5,5}$. Stačí teda ukázať, že grafy K_7 a $K_{5,5}$ sa dajú rozložiť na dva planárne podgrafy. To je zobrazené na nasledujúcom obrázku, kde G_1 a G_2 sú planárne podgrafy grafu K_7 a G_3 a G_4 sú planárne podgrafy grafu $K_{5,5}$.



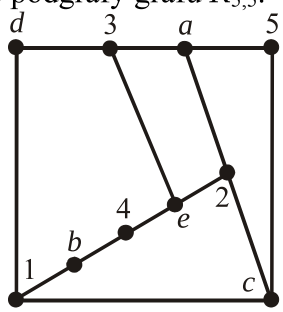
G_1



G_2



G_3



G_4

11.16. Ukážte, že keď je G súvislý obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi a $|E|$ hranami, potom jeho hrúbka je najmenej $\lceil |E|/(3|V|-6) \rceil$.
Riešenie: Podľa Vety 11.2 pre súvislý planárny obyčajný graf G s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V|\geq 3$, platí, že $|E|\leq 3|V|-6$. Každý graf s viac hranami bude teda neplanárny, a keď máme graf rozložiť na čo najmenej planárnych grafov, každý z týchto grafov bude mať maximálne $3|V|-6$ hrán, všetky zvyšné hrany už musia tvoriť ďalšiu vrstvu. Minimálny počet vrstiev je teda horná celá časť podielu počtu hrán k podielu maximálneho počtu hrán, čo sa vojde do planárneho grafu o danom počte vrcholov.

11.17. Použite cvičenie 11.16 na to, aby ste ukázali, že hrúbka pre K_n je najmenej $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.

Riešenie: Vzorec je isto platný pre n≤4, teda predpokladajme, že budeme baviť o príkladoch pre $n>4$. Podľa cvičenia 11.16 hrúbka pre K_n je najmenej

$$\frac{C(n,2)}{3n-6} = \frac{n(n-1)/2}{3n-6} = \frac{n(n-1)}{6(n-2)} = \frac{1}{6}\left(n+1+\frac{2}{n-2}\right)$$

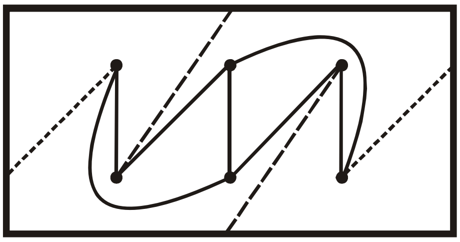
zaokrúhlené nahor. Pretože to nikdy nie je celé číslo, rovná sa to o jednotku viac a zaokrúhlené nadol, teda

$$\frac{1}{6}\left(n+1+\frac{2}{n-2}\right)+1 = \frac{n+7}{6} + \frac{2}{6(n-2)}$$

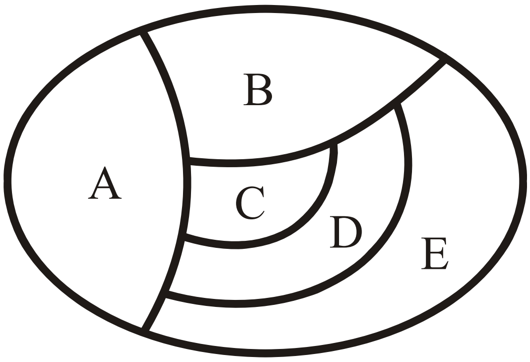
zaokrúhlené nadol. Posledný člen môže byť ignorovaný: je to vždy menej ako 1/6 a preto neovplyvní proces zaokrúhľovania (pretože prvý člen má menovateľ 6). Tým sme dokázali, že hrúbka pre K_n je najmenej $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.

11.18. Nakreslite $K_{3,3}$ na torus, aby sa hrany neprekrývali.

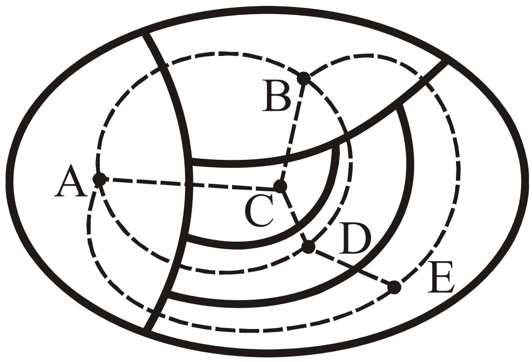
Riešenie: Povrch torusu si môžeme zobraziť ako obdĺžnik, kde ľavá strana je zlepená s pravou stranou a vrchná so spodnou. Čiarkované hrany sú spojené na ľavej a pravej strane a horná s dolnou.



11.19. Skonštruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.C5. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné oblasti (steny) nemali rovnakú farbu.

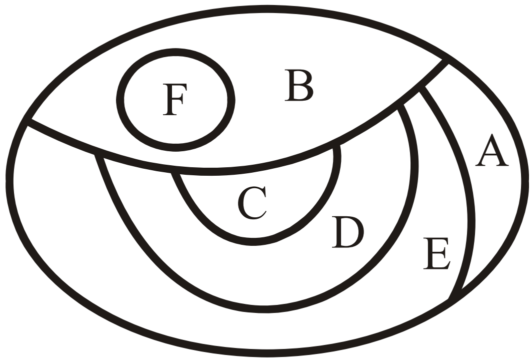


Obrázok 11.C5. Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.



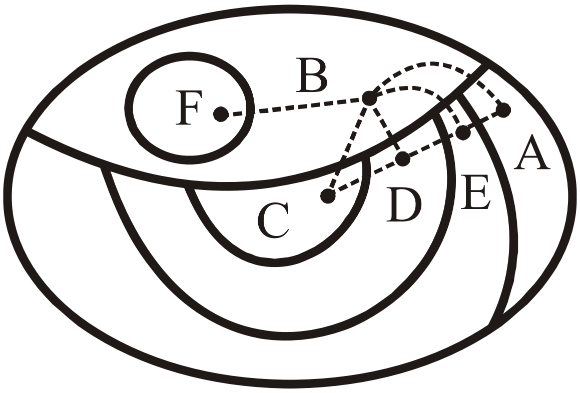
Riešenie: Pretože vrcholy ABCD tvoria kompletný graf izomorfný s K_4, musia byť na farbenie mapy najmenej 4 farby. Oblasti E môžeme dať rovnakú farbu ako C.

11.20. Skonštruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.C6. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné oblasti (steny) nemali rovnakú farbu.



Obrázok 11.C6. Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.

Riešenie: Pretože vrcholy BCD tvoria kompletný graf izomorfný s K_3, musia byť na farbenie mapy najmenej 3 farby. Oblasti E,F môžeme dať rovnakú farbu ako C, a A ako D.

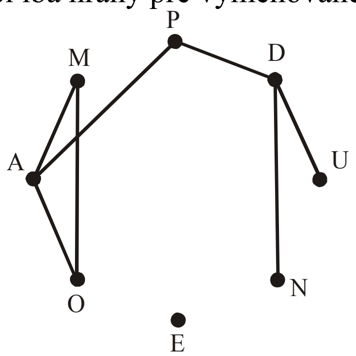


11.21. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n?
Riešenie: V príklade v textu sme videli, že chromatické číslo C_n je 2 pre párne n a 3 pre nepárne n. Pretože koleso W_n je iba C_n s centrálnym vrcholom naviac, prepojeným so všetkými vrcholmi C_n na obvode, W_n potrebuje iba o jednu farbu viac ako C_n, práve pre centrálny vrchol. Preto je chromatické číslo W_n je 3 pre párne n a 4 pre nepárne n.

11.22. Navrhnite rozvrh pre skúšky z predmetov Analýza algoritmov (A), Modelovanie a simulácia (M), Počítačová grafika (P), Databázy (D), Umelá inteligencia (U), Neurónové siete (N), Evolučné algoritmy (E), Operačné systémy (O), keď žiadni študenti nemajú naraz zapísanú Analýza algoritmov a Operačné systémy, nemajú naraz zapísanú Modelovanie a simulácia a Operačné systémy, nemajú naraz zapísanú Databázy a Umelá inteligencia, nemajú naraz zapísanú Databázy a Neurónové siete, nemajú naraz zapísanú Analýza algoritmov a Modelovanie a simulácia, nemajú naraz zapísanú Analýza algoritmov a Počítačová grafika, nemajú naraz zapísanú Počítačová grafika a Databázy, ale existujú študenti, ktorí majú zapísané všetky ostatné možné kombinácie.

Riešenie:

Uvažujme graf reprezentujúci daný problém. Vrcholy reprezentujú 8 predmetov a sú spojené hranou, keď existujú študenti idúci na obidva predmety. Existujú teda hrany medzi všetkými okrem siedmich vymenovaných dvojíc. Je oveľa ľahšie nakresliť komplement grafu zobrazujúci iba hrany pre vymenované dvojice.



Chceme nájsť chromatické číslo grafu, ktorého komplement sme nakreslili, farby budú časové periódy pre skúšky. Pretože PUNEO tvoria K_5, chromatické číslo je najmenej 5. Aby sme ukázali, že je práve 5, stačí zafarbiť ostávajúce 3 vrcholy. D môže mať rovnakú farbu ako U, a A a M môžu mať rovnakú farbu ako O. Preto je 5 časových periód (farieb) postačujúcich.

11.23. V slučke počítačového programu sa objavuje 7 premenných. Premenné a kroky, v priebehu ktorých musia byť uložené sú:

t kroky 1-6

u krok 2

v kroky 2-4

w kroky 1,3 a 5

x kroky 1 a 6

y kroky 3-6

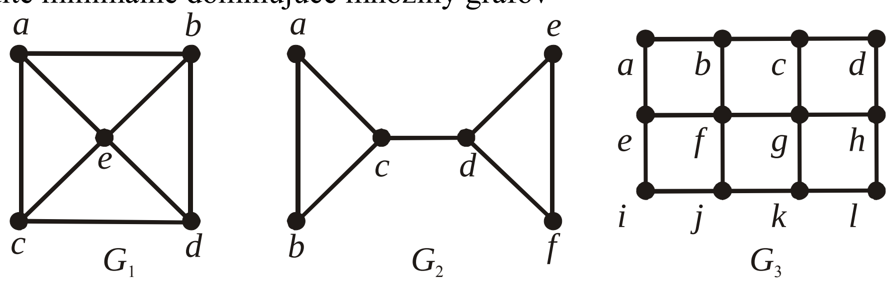
z kroky 4-5

Koľko rozdielnych indexových registrov potrebujeme na uloženie týchto premenných v priebehu výpočtu?

Riešenie: Tento problém môže byť modelovaný pomocou prienikového grafu množín krokov, v priebehu ktorých musia byť jednotlivé premenné uchovávané. Tento graf má 7 vrcholov, od t po z. Hrana medzi dvoma vrcholmi existuje, pokiaľ obidve im odpovedajúce premenné musia byť uschovávané v priebehu niektorého spoločného kroku. Odpoveďou na problém je chromatické číslo takého grafu. Skôr ako by sme analyzovali tento graf, zoberieme si jeho komplement, ktorý má oveľa menej hrán. Tu sú dva vrcholy spojené v prípade, keď im odpovedajúce množiny krokov nemajú spoločný prienik. Jediné také hrany sú $\{u,w\}$, $\{u,x\}$, $\{u,y\}$,$\{u,z\}$,$\{v,x\}$,$\{x,z\}$. Žiadna z hrán v komplemente nespája žiadnu dvojicu z množiny $\{t,v,w,y,z\}$, takže tieto vrcholy tvoria K_5 v pôvodnom grafe. Aby sme ukázali, že je práve 5, stačí zafarbiť vrchol u rovnakou farbou ako w, a x rovnako ako z (tieto páry sú spojené v komplementu hranou). Pretože chromatické číslo je 5, potrebujeme 5 registrov, s premennými u a w zdieľajúcimi register, rovnako ako x so z.

11.24. Frekvencie mobilných telefónov sú priraďované podľa zón. Každá zóna má priradenú sadu frekvencií, ktoré môžu byť použité mobilnými telefónmi v tej zóne. Rovnaká frekvencia nemôže byť použitá v zónach, kde by bol problém s interferenciou. Vysvetlite, ako k-tuple zafarbovanie môže byť použité pre priradenie k frekvencií každému mobilného telefónu v oblasti.
Riešenie: Frekvencie budú farby, zóny budú vrcholy, a dve zóny, ktoré sú tak blízko, že interferencia by spôsobila problém, sú spojené hranou . Potom je jasné, že k-tuple zafarbenie presne odpovedá priradeniu frekvencií, ktoré nebude mať problémy s interferenciou.

11.25. Nájdite minimálne dominujúce množiny grafov



Obrázok 11.C7. Minimálne dominujúce množiny?

Riešenie: Pre graf G_1 je to vrchol e, pre graf G_2 je to ktorákoľvek dvojica vrcholov, kde jeden vrchol je z množiny $\{a,b,c\}$ a druhý z množiny $\{d,e,f\}$, ako napr. množina vrcholov $\{a,d\}$, pre graf G_3 je to napr. štvorica vrcholov $\{e,c,k,h\}$ (existuje viac podobných štvorprvkových množín).

11.26. Nájdite minimálny počet dám dominujúcich $n\times n$ šachovnicu
(a) pre n=3, (b) pre n=4, (c) pre n=5
Riešenie:
(a) 1 dáma v pozícii (2,2)
(b) 2 dámy, napr. v pozíciách (2,2) a (4,4)
(c) 3 dámy, napr. v pozíciách (2,2) a (3,4) a (5,1). Na skontrolovanie, či 2 dámy nie sú dosť, by sme potrebovali skontrolovať C(25,2)=300 dvojíc.

11.27. Ukážte, že počet vrcholov obyčajného grafu je menší alebo rovný súčinu čísla vrcholovej nezávislosti (=maximálneho počtu vrcholov nezávislej množiny vrcholov, t. j. independence set) a chromatického čísla grafu.
Riešenie:
Nech n je počet vrcholov grafu, k je jeho chromatické číslo a i je číslo vrcholovej nezávislosti. Potom existuje zafarbenie vrcholov grafu k farbami. Pretože žiadne dva rovnako zafarbené vrcholy nie sú spojené hranou, rovnako zafarbené vrcholy tvoria nezávislú množinu vrcholov. Preto je takých vrcholov maximálne i. To znamená, že celkovo je vrcholov maximálne ik, teda $ik \geq n$, čo bolo potrebné dokázať.