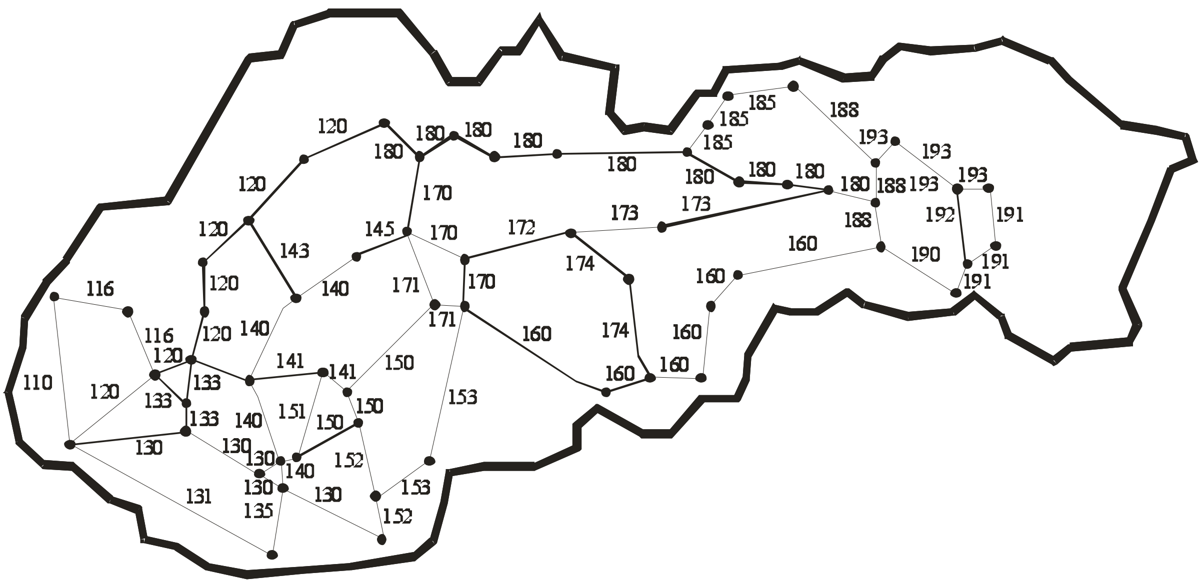
11. kapitola

Teória grafov II – cesty v grafoch, planárne grafy, Eulerova formula, Kuratowskeho veta, farbenie grafov a máp

11.1 Problémy najkratšej cesty

Existuje veľa problémov, pri ktorých je užitočné priradiť hranám grafu reálne číslo, ktoré voláme ***váha*** (weight). Typicky môže ísť napr. o železničnú (pozri obr. 11.1), cestnú alebo leteckú sieť, kde sú hranám priradené vzdialenosti medzi mestami. Ďalšou možnosťou je napr. priradenie triedy cesty (1-3.), čas potrebný na cestu, cena cestovného lístku. U počítačových a telefónnych sietí takéto užitočné hodnoty pri hranách môžu predstavovať rýchlosť odozvy, priepustnosť linky alebo cenu jej prenájmu. Grafy s číslom priradeným každej hrane sa volajú ohodnotené grafy (weighted graphs).



Obrázok 11.1. Zjednodušená mapa železničnej siete Slovenska s očíslovaním koridorov tvorí ohodnotený graf (hranice republiky do grafu nepatria).

Pri takýchto typoch grafov sa často vyskytuje niekoľko typov problémov. Najčastejším je asi zistiť ***dĺžku cesty*** v ohodnotenom grafe, ktorá sa bude rovnať súčtu váh hrán tejto cesty (táto dĺžka je rozdielna od dĺžky cesty neohodnoteného grafu, ktorá predstavuje počet hrán cesty, formálne si môžeme predstaviť, že každá hrana má váhu rovnú jednej). Typická otázka je: Ktorá cesta medzi dvoma vrcholmi je najkratšia, teda, aká je najmenšia vzdialenosť, ktorú musíme prejsť, aby sme sa dostali z Bratislavy do Medzilaboriec? Keďže niekedy krátka cesta môže byť zlá (povedzme s obmedzením rýchlosti), ktorú cestu máme vybrať, aby sme v cieli boli čo najrýchlejšie? Ktorú cestu máme vybrať, aby sme sa do cieľa dostali za čo najmenej peňazí? V počítačových sieťach sa môžeme spýtať, ktoré telefónne ústredne máme prepojiť, aby sme dostali čo najlacnejšie spojenie? A ktoré, aby sme mali čo najrýchlejšiu odozvu?

Ďalším slávnym problémom je ***problém obchodného cestujúceho***, kedy máme navštíviť každý vrchol (mesto) práve raz a vrátiť sa do východzieho vrcholu s cieľom precestovať pritom čo najkratšiu trasu (v zmysle ohodnotení hrán).

Na nájdenie najkratšej cesty existuje viac algoritmov. Tu uvedieme algoritmus objavený holandským matematikom Edsgerom Dijkstrom r. 1959 pre ohodnotené neorientované grafy so všetkými váhami ohodnotenými kladným číslom. Adaptácia tohto algoritmu na orientované grafy by mala byť jednoduchá.

Predpokladajme, že hľadáme cestu najkratšej dĺžky medzi vrcholmi a a z zadaného grafu G. Dijkstrov algoritmus nájde dĺžku najkratšej cesty z a do najbližšieho vrcholu, potom do druhého najbližšieho vrcholu, atď. dokiaľ nenájdeme dĺžku najkratšej cesty od a do z.

Dijkstrov algoritmus spočíva v sérii iterácií. Pri každej iterácii pridávame nový vrchol do množiny vrcholov S so stanovenou najkratšou vzdialenosťou od zadaného vrcholu a. Pri každej iterácii sa robí nové ohodnocovanie vrcholov.

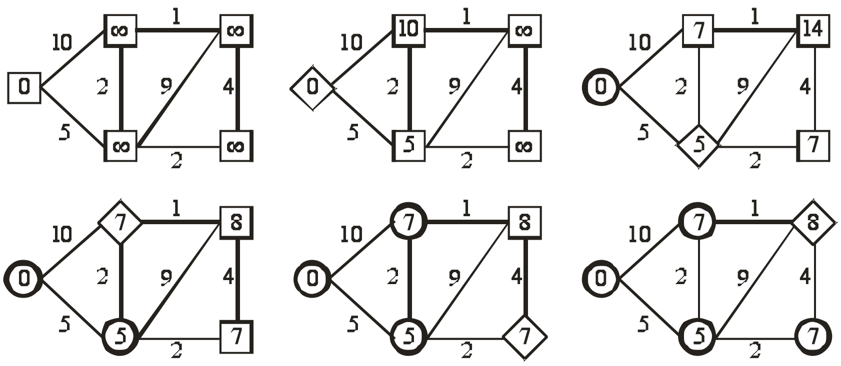
Vrchol w je ohodnotený dĺžkou najkratšej cesty z a do w obsahujúcej iba vrcholy z množiny S. Vrchol pridaný do tejto množiny pri každej iterácii je ten s minimálnym ohodnotením, ktorý ešte nie je v S.

Algoritmus začína ohodnotením vrcholu a hodnotou 0 a ohodnotením všetkých ostatných vrcholov v_i momentálne známou vzdialenosťou od vrcholu a rovnou ∞ , $L(v_i) := \infty$.

Algoritmus 11.1. Dijkstrov algoritmus

procedure *Dijkstra*(G: ohodnotený súvislý obyčajný graf so všetkými váhami pozitívnymi)
{ G má vrcholy $a=v_0,v_1,...,v_n=$z a váhy $w(v_i,v_j)$ kde $w(v_i,v_j)=\infty$, keď (v_i,v_j) nie je hrana G }
for i:=1 **to** n
    $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{vrcholy sú teraz ohodnotené všetky hodnotou ∞, okrem východzieho a, ktorý má 0, a množina vrcholov S s nájdenou najmenšou vzdialenosťou od a je prázdna}
while $z \notin S$
begin
        u := vrchol nepatriaci do S s minimálnou $L(u)$
        $S := S \cup \{u\}$
        for všetky vrcholy v nepatriace do S
                if $L(u)+ w(u,v)< L(v)$ **then** $L(v) := L(u)+ w(u,v)$
{takto do S pridávame vrchol s najmenšou vzdialenosťou a upravujeme hodnoty vrcholov nepatriacich do S}
end { $L(z)$ je najkratšia cesta z a do z }

Na obrázku 11.2 je ukázaný priebeh Dijkstrova algoritmu, s tým, že hľadáme najkratšiu vzdialenosť od vrcholu vľavo. Vrchol vyznačený kosoštvorcom predstavuje aktuálne spracovávaný vrchol, vrcholy v krúžku patria do množiny S, pre tieto vrcholy bola najkratšia cesta už vypočítaná a ich ohodnotenie sa už nebude meniť.



Obrázok 11.2. Priebeh Dijkstrovho algoritmu pre hľadanie dĺžky najkratšej cesty.

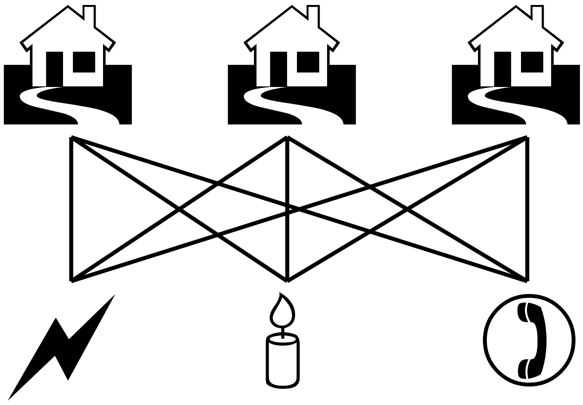
Najhorší prípad časovej zložitosti pre Dijkstrov algoritmus s *n* vrcholmi a *m* hranami je $O(n^2)$. Táto hodnota môže byť podstatne vylepšená pre grafy s málo („riedko rozmiestnenými“) hranami.

Problém obchodného cestujúceho je ekvivalentný nájdeniu hamiltonovskej kružnice s minimálnym súčtom váh v kompletnom ohodnotenom neorientovanom grafe. Keď si zvolíme ľubovoľný štartovací bod, keďže kružnica (a,b,c,d,a) je pre nás totožná s kružnicou (b,c,d,a,b), máme (n-1)! možností permutácií, vyjadrujúcich kružnice, a keď si zoberieme, že nám nezáleží u kružnice na smere, keďže (a,b,c,d,a) je pre nás rovnaká kružnica ako (a,d,c,b,a), máme (n-1)!/2 možností, čo je stále NP-úplný problém. V praxi sa problém obchodného cestujúceho pre veľa vrcholov rieši aproximačnými algoritmami, ktoré nemusia nutne nájsť najlepšie riešenie, ale nájdu riešenie blízke najlepšiemu. Napríklad, pokiaľ graf spĺňa trojuholníkovú nerovnosť, existuje polynomiálny algoritmus, ktorý nájde prinajhoršom o 50% dlhšiu cestu ako je najlepšia možná. V praxi sa využívajú algoritmy, ktoré sú schopné nájsť riešenie pre problém s 1000 vrcholmi v priebehu niekoľko minút, a také riešenie bude v priemere do 2% horšie ako ideálne.

11.2 Planárne grafy

Predstavme si tri domy, ku ktorým je potrebné doviesť telefón, od elektrického rozvodu elektrické vedenie a od plynového rozvodu vedenie plynu (pozri Obr. 11.3). Je možné jednotlivé vedenia položiť tak, aby sa nekrížili?

Táto otázka sa dá preformulovať nasledovne: Dá sa bipartitný kompletný graf $K_{3,3}$ prekresliť tak, aby sa žiadne dve hrany nekrížili?

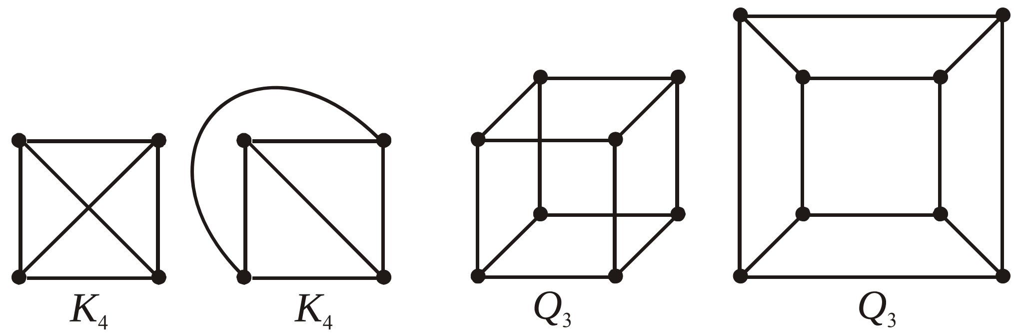


Obrázok 11.3. Dajú sa rozvody viesť tak, aby sa nikde nekrížili?

Podobná otázka je naliehavá napríklad u tlačených spojov, a formálne sa rieši ako otázka, či je graf planárny.

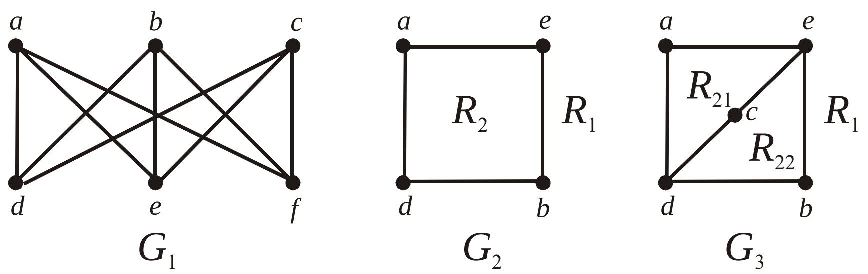
Graf voláme planárny, keď môže byť zakreslený v rovine bez toho, že by sa jeho hrany krížili (pod krížením hrán rozumieme preťatie priamok alebo oblúkov reprezentujúcich hrany na inom mieste ako sú s nimi incidentné spoločné vrcholy). Taký nákres sa volá rovinná (planárna) reprezentácia grafu.

Graf môže byť planárny, aj keď sa zvyčajne zakresľuje s prekríženými hranami. Ako príklad si môžeme uviesť kompletný graf na štyroch vrcholoch K_4 a trojrozmernú hyperkocku Q_3 na obr. 11.4.



Obrázok 11.4. Kompletný graf K_4 a hyperkocka Q_3 s bežným nákresom a v rovinnej reprezentácii.

Planárnosť grafu môžeme ukázať jeho zakreslením, ako na Obr. 11.4. Je o dosť ťažšie ukázať, že graf nie je planárny. To si môžeme ukázať na grafe $K_{3,3}$.



Obrázok 11.5. Prečo je kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$ neplanárny?

V každej rovinnej reprezentácii pre $K_{3,3}$ musia byť prepojené vrcholy a,b s vrcholmi d,e. Tieto 4 hrany vymedzujú rovinu na dve oblasti, R_1 a R_2, ako je ukázané na grafe G_2 z Obr. 11.5. Vrchol c je alebo v jednej, alebo v druhej oblasti; oblasť, v ktorej je, rozdeľuje na dve časti, ako je to vidno pre R_{21} a R_{22} v grafe G_3 z Obr. 11.5. Potom nie je možné umiestniť vrchol f bez toho, aby sa krížili hrany. Keď je f v oblasti R_1, nie je možné vytvoriť hranu $\{f,c\}$ bez kríženia. Keď je f v oblasti R_{21}, nie je možné vytvoriť hranu $\{f,b\}$ bez kríženia. Keď je f v oblasti R_{22}, nie je možné vytvoriť hranu $\{f,a\}$ bez kríženia. Podobné argumenty by sa dali použiť, keby bod c bol v oblasti R_1.

Podobný rozbor môže byť urobený aj pre kompletný graf na piatich vrcholoch K_5.

Planarita grafov hrá veľkú rolu pri návrhu elektronických obvodov, ktoré majú byť realizované plošným spojom. Elektronický obvod si môžeme abstrahovať ako graf, kde jednotlivé súčiastky tvoria vrcholy a spojenia medzi nimi sú reprezentované hranami. Elektronický obvod môžeme vytlačiť na jednu dosku, pokiaľ dokážeme pre jemu odpovedajúci graf nájsť rovinnú reprezentáciu. Keď graf nie je planárny, môžeme použiť zložitejšie riešenia. Napríklad môžeme vrcholovú množinu grafu rozdeliť na disjunktívne podgrafy, ktoré už budú planárne. Potom môžeme skonštruovať obvod prepojením viacerých vrstiev. Ďalšou možnosťou je pri krížení hrán použiť izolovaný drôt; v tomto prípade sa budeme snažiť navrhnúť reprezentáciu s čo najmenej prekríženiami.

11.2.1 Eulerova formula

Rovinná reprezentácia planárneho grafu rozdeľuje rovinu na časti, ktoré nazývame steny, resp. oblasti. Za stenu považujeme aj vonkajšiu, neohraničenú oblasť. Súhrn vrcholov, hrán a stien (rovinnej) reprezentácie (planárneho) grafu tvorí (rovinnú) mapu.

Veta 11.1. (rozšírená Eulerova formula) Nech G je planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami, $|V|$ vrcholmi a $|K|$ komponentmi. Nech $|R|$ je počet stien jeho rovinnej reprezentácie. Potom

$$|R|=|E|-|V|+|K|+1 \qquad (11.1)$$

Dôkaz: Použijeme indukciu na počet hrán pri fixnom počte vrcholov. Ak $|E|=0$, potom $|R|=1$, $|V|=|K|$ a rovnosť (11.1) platí. Nech (11.1) platí, ak $|E|=m$, kde m je celé nezáporné číslo. Majme mapu M_1 s $m+1$ hranami. Odstráňme z nej ľubovoľnú hranu e. Vznikne mapa M_2 s m hranami. Označme počet stien, resp. komponentov mapy M_1 ako $|R_1|$, resp.$|K_1|$, podobne pre M_2 ako $|R_2|$, resp. $|K_2|$. Podľa indukčného predpokladu platí $|R_2|= m - |V|+|K_2| +1$.

Ak e je most, potom $|R_1|=|R_2|$, $|K_1| = |K_2| -1$. V opačnom prípade $|R_1|=|R_2|+1$, $|K_1| = |K_2|$. V obidvoch prípadoch $|R_1|=(m+1) - |V|+|K_1| +1$, čo sme mali dokázať. ■

Príklad: Predpokladajme, že planárny obyčajný súvislý graf má 20 vrcholov, každý stupňa 3. Na koľko stien rovinná reprezentácia tohto grafu rozdeľuje rovinu?

Riešenie: Pretože suma stupňov vrcholov je rovná dvojnásobku počtu hrán, $2|E|=\sum_{v\in V} deg(v)$, $2|E|=20\times 3=60$, $|E|=30$. Z Eulerovej formuly vyplýva $|R|=|E|-|V|+|K| +1=30-20+1+1=12$.

Z Eulerovej formuly vyplývajú aj nasledujúce vety:

Veta 11.2. Nech G je súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V|\geq 3$, potom $|E|\leq 3|V|-6$.

Dôkaz: Súvislý planárny obyčajný graf rozdeľuje rovinu na $|R|$ stien. Počet hrán ohraničujúcich stenu R (ktorý budeme volať ***stupeň steny***, resp. ***dĺžku oblasti*** $deg(R)$) je najmenej 3. (Do stupňa počítame ako prírastok 2 tie hrany, ktoré sú v stene „z obidvoch strán“.) Suma stupňov stien sa teda presne rovná dvojnásobku počtu hrán v grafe. Pretože každá oblasť má stupeň väčší alebo rovný 3 (musí platiť pre súvislý graf s aspoň troma vrcholmi), dostávame

$$2|E|=\sum_{\text{všetky steny } R} deg(R)\geq 3|R|$$

Odtiaľ (2/3) $|E|\geq |R|$. Použitím Eulerovej formuly dostávame (2/3) $|E|\geq|E|-|V|+2$, z čoho vyplýva $|E|/3\leq|V|-2$ a teda $|E|\leq 3|V|-6$. ■

Príklad: Ukážte pomocou Vety 11.2, že K_5 nie je planárny graf.

Graf K_5 má 5 vrcholov a 10 hrán. Keďže podmienka $|E|\leq 3|V|-6$ neplatí pre $10\leq 3\times 5-6$, K_5 nie je planárny.

Veta 11.3. Nech G je súvislý planárny obyčajný graf, potom obsahuje vrchol stupňa menšieho alebo rovného 5.

Dôkaz: Keď by bol stupeň každého vrcholu aspoň 6, potom podľa vzorca $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$ by sme mali $2|E| \geq 6|V|$. To je ale v kontradikcii s nerovnosťou podľa 11.2, $2|E| \leq 6|V| - 12$. ■

Veta 11.4. Nech G je súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V| \geq 3$, a neobsahuje žiadnu kružnicu dĺžky 3, potom $|E| \leq 2|V| - 4$.

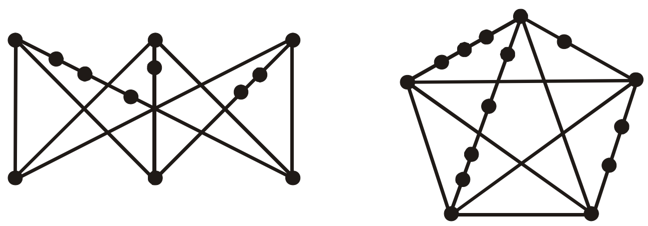
Dôkaz vety je podobný dôkazu vety 11.2, je zadaný ako cvičenie 11.10.

Príklad: Použite vetu 11.4 na dôkaz toho, že $K_{3,3}$ nie je planárny.

Riešenie: Pretože $K_{3,3}$ nemá žiadnu kružnicu dĺžky 3, čo je zrejmé z toho, že je bipartitný, môžeme použiť vetu 11.4. $K_{3,3}$ má 6 vrcholov a 9 hrán, teda nerovnica $|E| \leq 2|V| - 4$ nie je splnená.

Je jasné, že keďže ani $K_{3,3}$ ani K_5 nie sú planárne, nebudú planárne ani grafy, ktoré ich majú ako podgrafy. Je ale prekvapujúce, že všetky neplanárne grafy nutne obsahujú podgraf, ktorý môže byť skonštruovaný z $K_{3,3}$ ani K_5 pomocou určitých povolených operácií.

Z grafov $K_{3,3}$ a K_5 môžeme vytvoriť ďalšie neplanárne grafy, ak ich hrany rozdelíme na viac hrán pomocou vrcholov druhého stupňa (pozri Obr. 11.6). Všetky grafy, ktoré takýmto spôsobom získame, vrátane samotných $K_{3,3}$ a K_5, voláme ***Kuratowského[1] grafy***.



Obrázok 11.6. Kuratowského grafy.

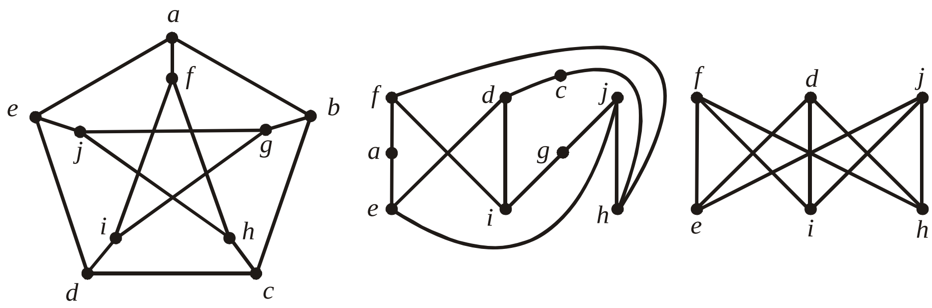
Veta 11.5. (**Kuratowského veta**) Konečný graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje ako podgraf nijaký Kuratowského graf.

Dôkaz toho, že keď graf obsahuje Kuratowského podgrafy, tak nie je planárny, je jednoduchý. Opačná strana dôkazu, že každý neplanárny graf obsahuje ako podgraf Kuratowského graf, je natoľko komplikovaný, že ho tu nebudeme uvádzať.

Príklad: Je Petersenov graf na Obr. 11.7 planárny? (Julius Petersen bol dánsky matematik, graf navrhnutý 1891 je často používaný pre štúdium).

Riešenie: Vzhľadom k tomu, že sa z grafu dá vytvoriť odstránením vrcholov a s ním spojených hrán a nasledovným odstránením vrcholov stupňa 2 (s tým, že dvojica hrán, s ktorými bol taký vrchol incidentný, vytvorí jednu hranu) graf izomorfný s grafom $K_{3,3}$, Petersenov graf nie je planárny.

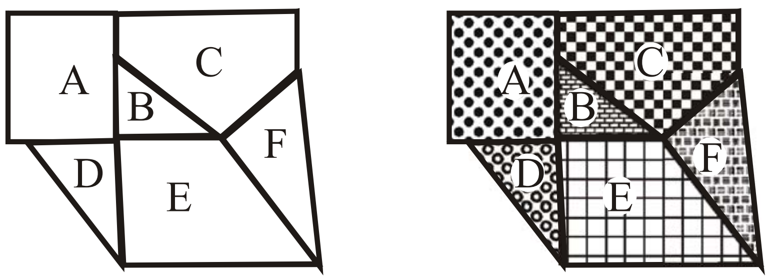
[1] Kazimierz Kuratowski (1896-1980) bol poľský matematik, ktorý študoval pred 1. svetovou vojnou v Glasgowe v Škótsku, potom pracoval v Ľvove a na Varšavskej univerzite. V priebehu 2. svetovej vojny kvôli prenasledovaniu vzdelaných Poliakov za okupácie nacistami vyučoval tajne. Zaslúžil sa o poľskú matematiku, publikoval viac ako 180 článkov, pracoval v teórii množín a v topológii, r. 1930 navrhol charakterizáciu neplanárnych grafov.



Obrázok 11.7. Petersenov graf, jeho podgraf získaný odstránením vrcholu b a $K_{3,3}$, z ktorého sa dá získať graf izomorfný s prostredným grafom pridaním vrcholov a, c a g medzi hrany $\{e,f\}$, $\{d,h\}$ a $\{i,j\}$.

11.3 Farbenie grafov

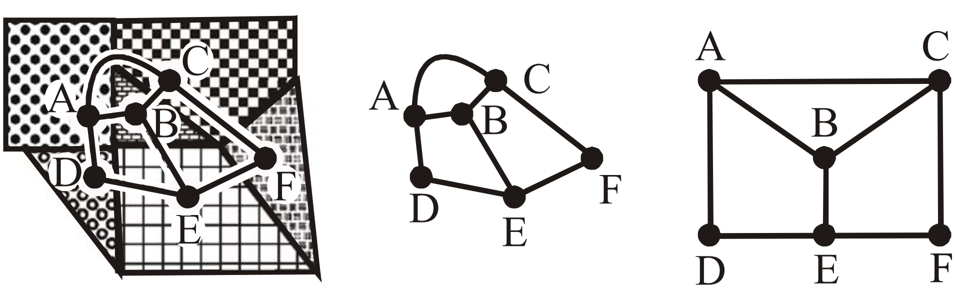
Politické mapy sa zvyčajne kreslia tak, že štáty, ktoré zdieľajú hranice, sú vyfarbené odlišnou farbou. (Keď sa hranice štátov dotýkajú iba v jednom bode, potom môžu štáty byť vyfarbené rovnakou farbou.) Na obr. 11.8 je ukázaná jedna možná mapa a spôsob, ako ju vyfarbiť piatimi farbami.



Obrázok 11.8. Mapa a jej farbenie (namiesto farieb sú použité odlišné čierno-biele vzory).

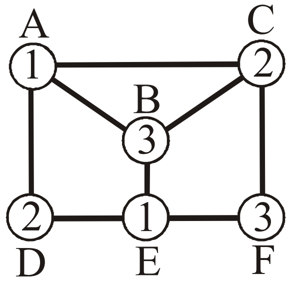
Otázka je, dokážeme zafarbiť túto mapu aj menej ako piatimi farbami?

Takže, čo to má čo spoločné s grafmi? Farbenie máp je otázka susednosti – ktoré štáty zdieľajú netriviálnu hranicu. Všetky ostatné informácie (ako veľkosť alebo tvar štátu) sú nepodstatné. Takže môžeme odstrániť túto zvyšnú informáciu nahradením štátu vrcholom a spojením vrcholov, keď im odpovedajúce krajiny zdieľajú hranicu. Inak povedané, umiestnime vrchol do každej mapy štátu a spojíme vrcholy, keď štáty zdieľajú spoločnú hranicu. Výsledný graf sa volá ***duálny graf*** k danej mape.



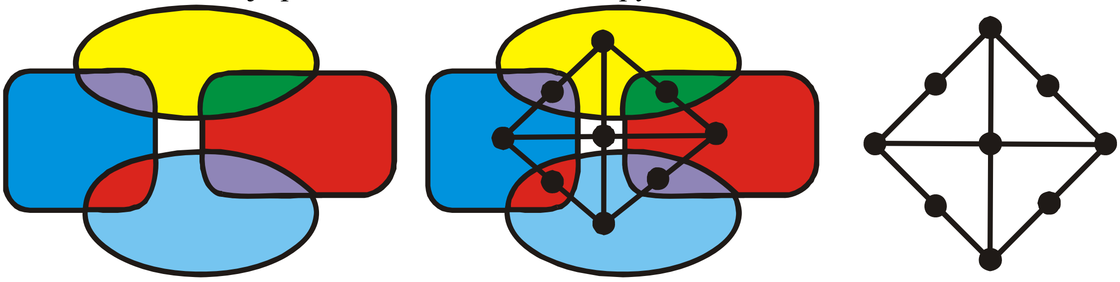
Obrázok 11.9. Graf odpovedajúci mape, jeho vybratie z mapy a pravidelnejšie zakreslenie.

Keď máme takýto graf, ako je na Obr. 11.9, je možné jeho vrcholy zafarbiť menej farbami tak, aby susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou?



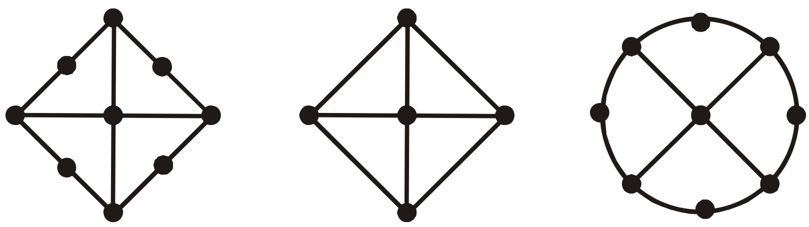
Obrázok 11.10. Zafarbenie vrcholov grafu menej farbami (farby nahradené číslami), mapa by vyžadovala iba 3 farby.

Príklad: Koľko farieb je potrebné na zafarbenie mapy na Obr. 11.11?

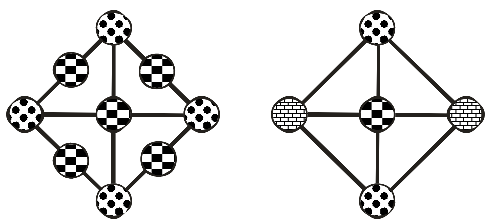


Obrázok 11.11. Mapa a jej prevedenie na graf.

Na obr. 11.11 je súčasne s mapou uvedený jej prevod na graf. Namiesto pôvodnej otázky sa teda môžeme pýtať, koľkými najmenej farbami zafarbíme vrcholy grafov, aby susedné vrcholy mali rôznu farbu? Odpovedajúci graf máme znova na obr. 11.12, spolu s dvoma ďalšími grafmi, u ktorých sa tiež spýtame na najmenší počet farieb na zafarbenie ich vrcholov. Ako vidno na obr. 11.13, na zafarbenie prvého grafu a teda pôvodnej mapy postačujú dve farby, zatiaľ čo napodiv u druhého, jednoduchšieho grafu získaného odstránením vrcholov sú potrebné 3 farby. Tretí graf z obr. 11.12 je izomorfný s prvým grafom, a teda má rovnaké minimálne zafarbenie – pamätajte si, že pri grafoch si musíte predstavovať vrcholy ako korálky, a hrany ako kúsky gumy, ktoré je možno ľubovoľne naťahovať a krútiť.



Obrázok 11.12. Koľko farieb je potrebných na zafarbenie vrcholov grafov?



Obrázok 11.13. Napodiv, prvý graf s viac vrcholmi si vyžiadal menej farieb.

Koľko farieb by bolo potrebných na zafarbenie kompletného grafu K_n? Samozrejme n, keďže každý vrchol je spojený s každým.

Chromatické číslo grafu je počet farieb nutných na zafarbenie vrcholov tak, že susedné vrcholy majú rôznu farbu. Chromatické číslo grafu G sa zvyčajne označuje $\chi(G)$.

Napríklad Petersenov graf na Obr. 11.8 má chromatické číslo 3.

Chromatické číslo grafu K_n je n, a chromatické číslo bipartitného grafu $K_{n,m}$ je 2 (dve množiny vrcholov zafarbíme každú inou farbou).

Chromatické číslo grafu C_n pre párne n je dva. Na skonštruovanie takého farbenia stačí vybrať vrchol a zafarbiť ho jednou farbou, a postupovať po kruhu v smere hodinových ručičiek a farbiť vrcholy vždy alternatívnou farbou. N-tý vrchol musí byť zafarbený druhou farbou, pretože prvý a (n-1)prvý boli zafarbené prvou z farieb.

Chromatické číslo grafu C_n pre nepárne n je tri. Na skonštruovanie takého farbenia stačí vybrať vrchol a zafarbiť ho jednou farbou, a postupovať po kruhu po smeru hodinových ručičiek a farbiť vrcholy vždy alternatívnou farbou. N-tý vrchol musí byť zafarbený treťou farbou, pretože prvý a (n-1)prvý boli zafarbené prvou, resp. druhou z farieb.

Veta 11.6. (R.L. Brooks, 1941): Nech je najväčší zo stupňov vrcholov grafu G rovný d. Ak $d \neq 2$ a graf G neobsahuje kompletný podgraf s d+1 vrcholmi, tak $\chi(G) \leq d$ (inak $\chi(G)=d+1$). Ak $d=2$ a graf G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, tak $\chi(G)=2$, inak $\chi(G)=3$.

Vetu uvádzame bez dôkazu.

Jedna z najznámejších viet matematiky je veta o štyroch farbách:

Veta 11.7. Každý planárny graf má chromatické číslo maximálne 4.

Prvá písomná zmienka o tomto probléme pochádza z dopisu Augusta De Morgana nám známemu siru Hamiltonovi z 1852. Po sade neúspešných pokusov bola táto teoréma dokázaná pomocou počítačov r. 1976, pomocou skontrolovania niekoľko tisíc špeciálnych prípadov. To vyvolalo diskusiu, pre tak rozsiahle použitie počítačov v dôkaze. Čo keď bola chyba v programe?

Najlepší známy algoritmus na farbenie grafov má v najhoršom prípade exponenciálnu zložitosť v závislosti na počte vrcholov v grafe. Aj nájsť aproximáciu chromatického čísla je zložité.

Jeden z možných algoritmov na zafarbenie obyčajného grafu s greedy (pažravým) prístupom:

1. Zoraďte vrcholy $v_1, v_2, ..., v_n$ podľa veľkosti ich stupňov, tak, že $deg(v_1) \geq deg(v_2) \geq ... deg(v_n)$; i=0
2. Priraď farbu i+1 prvému ešte nezafarbenému vrcholu v zozname. Postupne priraď farbu i+1 vrcholom v zozname, ktoré ešte neboli zafarbené a nesusedia s vrcholmi, ktorým už bola priradená farba i+1.
3. Opakuj krok 2, dokiaľ všetky vrcholy nebudú zafarbené

Uvedený algoritmus však nezaručuje získanie zafarbenia vrcholov s minimálnym počtom farieb.

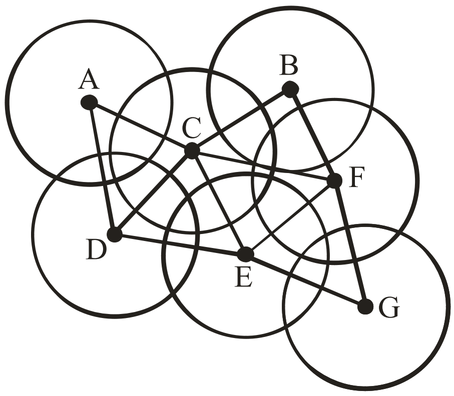
Použitie farbenia grafov

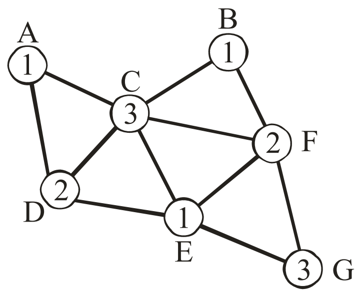
Príklad: ***Rozvrh*** - Ako môžu byť rozvrhnuté skúšky na univerzite, aby žiaden študent nemal naplánované dve skúšky naraz?

Riešenie: Vrcholy budú reprezentovať kurzy, hrana bude spájať vrcholy vtedy, keď existuje študent, ktorý ide na obidve skúšky. Každé časové priradenie skúške je reprezentované rozdielnou farbou. Rozvrh skúšok potom odpovedá zafarbeniu odpovedajúceho grafu. (Pozri cvičenie 11.22.)

Príklad: ***Priradenie frekvencií*** **-** Frekvenčné kanály sú priradené vysielačom (nech už rozhlasovým, televíznym, či iným) tak, že žiadne dva vysielače vzdialené do 100 km nemôžu používať rovnaký kanál. Ako priradenie kanálov riešiť farbením grafov?

Riešenie: Každému vysielaču bude priradený vrchol. Dva vrcholy sú spojené, keď sú menej ako 100 km vzdialené. Priradenie kanálov odpovedá zafarbeniu grafu, kde každá farba reprezentuje iný kanál (obr. 11.14).



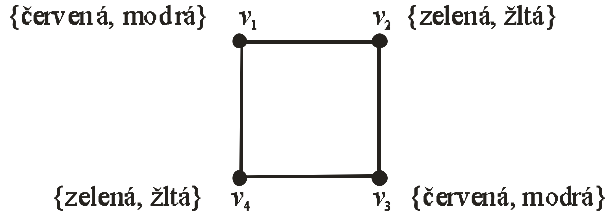


Obrázok 11.14. Dosah vysielačov A,B,C,D,E,F,G je znázornený kruhmi, možnosť interferencie spojením vysielačov hranami, a ako je na grafe napravo, na vysielanie bez interferencie stačia 3 frekvencie reprezentované farbami (v obrázku napravo sú vyznačené iba čísla farieb).

Príklad: ***Indexový register*** – V efektívnych kompilátoroch je výpočet cyklu zrýchlený, pokiaľ sú použité premenné ukladané dočasne v indexových registroch v CPU namiesto regulárnej pamäti. Koľko indexových registrov je potrebných pre danú slučku?

Riešenie: Každý vrchol grafu bude reprezentovať premennú v slučke. Hrana medzi dvoma vrcholmi existuje, keď im odpovedajúce premenné musia byť uložené v indexovom registri v rovnakom čase výpočtu. Potom chromatické číslo grafu dáva počet potrebných registrov (pozri cvičenie 11.23).

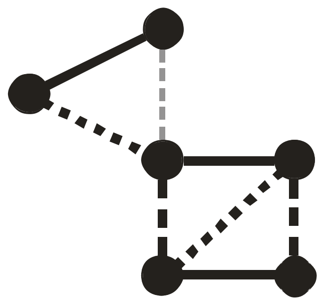
K aplikáciám spojeným priradením frekvencií patrí aj ***"k-tuple" farbenie*** grafu, čo je priradenie množiny *k* rôznych farieb každému z vrcholov grafu, takže žiadne dva susedné vrcholy nemajú priradenú spoločnú farbu. Pre graf *G* sa zvyčajne označuje $\chi_k(G)$ také najmenšie prirodzené číslo *n*, že graf *G* má *k*-tuple farbenie s použitím *n* farieb. Napríklad, $\chi_2(C_4)=4$. Stačí nám teda použiť 4 farby tak, aby sme priradili dve farby každému vrcholu grafu C_4, tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali priradenú ani jednu rovnakú farbu. Ďalej, menej ako 4 farby nestačia, pretože dva susedné vrcholy musia mať priradené po dvoch farbách, ktoré sú rôzne (pozri obr. 11.15). Tohto farbenia sa využíva, pokiaľ máme priradiť vysielačom viac kanálov, aby nenastala interferencia – jednotlivé kanály či frekvencie sú reprezentované farbami.



Obrázok 11.15. „*k*-tuple“ farbenie $\chi_2(C_4)=4$

Okrem vrcholového zafarbenia grafov existuje aj hranové zafarbenie, kedy hrany, ktoré sú incidentné s rovnakými vrcholmi, musia mať rôzne farby, pozri Obr. 11.16.

Shannon (zakladateľ teórie informácie a informatiky) položil úlohu: Majme elektrické zariadenia, v ktorom sú určité miesta prepojené drôtmi. Aby sme drôty vychádzajúce z určitého miesta rozlíšili, použijeme drôty rozličných farieb. Aký najmenší počet farieb na to potrebujeme? Tento problém sa dá riešiť ako problém hranového chromatického čísla.



Obrázok 11.16. Hranové zafarbenie grafu (farby sú nahradené rôznym čiarkovaním).

Hranové chromatické číslo $\chi_{hranové}(G)$ je najmenší počet farieb, ktorý môže byť použitý v hranovom zafarbení grafu G.

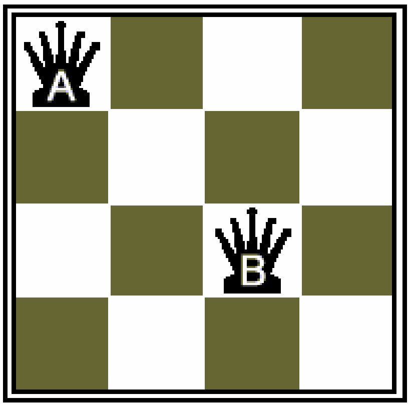
Veta 11.8. (Vizing, 1964) Keď G je konečný graf bez slučiek, ktorého najväčší stupeň vrcholu je r, potom $r \leq \chi_{hranové}(G) \leq r+1$.

Vetu uvádzame bez dôkazu.

Každý graf sa dá ohodnotiť veľa ďalšími číselnými charakteristikami, ktoré sú rovnaké pre izomorfné grafy a ktoré preto voláme invarianty. Uvedieme si dve také základné charakteristiky, a to veľkosť minimálnej dominujúcej množiny a veľkosť čísla vrcholovej nezávislosti.

Dominujúca množina (dominating set) je množina vrcholov taká, že všetky ostatné vrcholy sú spojené hranou aspoň s jedným vrcholom dominujúcej množiny. Dominujúca množina s najmenším počtom vrcholov sa volá ***minimálna dominujúca množina*** (minimum dominating set).

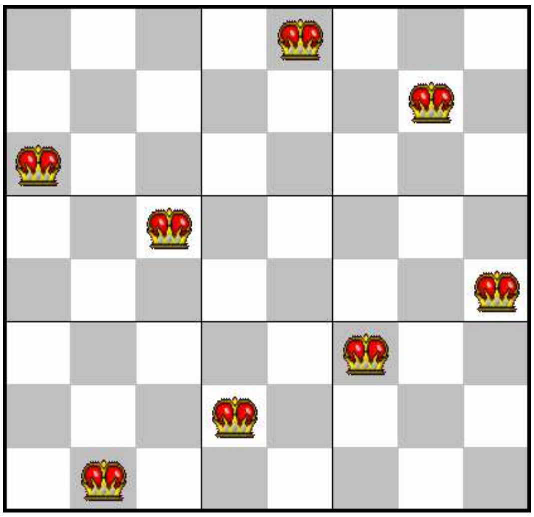
Túto množinu si ukážeme na šachovom príklade. Na určenie minimálneho počtu dám na šachovnici, tak, aby každé voľné pole bolo ohrozené aspoň jednou dámou, môže byť použitý obyčajný graf. Šachovnica $n \times n$ má n^2 štvorcov v $n \times n$ konfigurácii. Dáma v danej pozícii ohrozuje všetky štvorce v danom rade, v danom stĺpci a na obidvoch diagonálach prechádzajúcich štvorcom pozície dámy. Odpovedajúci obyčajný graf má n^2 vrcholov, jeden za každý štvorec a dva vrcholy sú spojené hranou, keď dáma umiestnená na štvorci odpovedajúcemu jednému z vrcholov ohrozuje štvorec reprezentovaný druhým vrcholom. Sada pozícií minimálneho počtu dám umiestnených na šachovnici, tak, aby každé voľné pole bolo ohrozené aspoň jednou dámou, odpovedá v grafe minimálnej dominujúcej množine. Príklad minimálneho počtu dám dominujúcich 4×4 šachovnicu je uvedený na obr. 11.17.



Obrázok 11.17. Príklad minimálneho počtu dám dominujúcich 4×4 šachovnicu

Množina vrcholov v grafe sa volá nezávislá, keď nie sú žiadne dva vrcholy z tejto množiny spojené hranou. ***Číslo vrcholovej nezávislosti*** grafu je maximálny počet vrcholov v nezávislej množine vrcholov grafu.

Toto číslo si môžeme ilustrovať na obdobnej úlohe, ako bola predchádzajúca. V polovici 19. storočia sa objavila v šachovej rubrike jedného nemeckého obrázkového časopisu úloha: Na prázdnu normálnu šachovnicu máme postaviť osem dám tak, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu. Cieľom bolo vyšetriť, koľko riešení má táto úloha, a hneď vtedy bola daná aj odpoveď – 92 riešení. Pre nás je však zaujímavá inak položená úloha: Koľko dám možno umiestniť na šachovnicu, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu. Na riešenie môžeme využiť rovnakého typu grafu ako v predchádzajúcom prípade, iba teraz hľadáme najväčšiu množinu vrcholov tak, aby žiadna dvojica z nich nebola spojená hranou. Ako výsledok potom môžeme dostať graf odpovedajúci napr. šachovnici na obr. 11.18

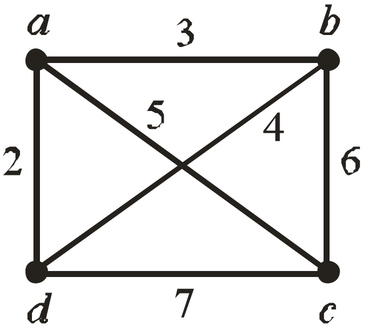


Obrázok 11.18. Koľko dám možno umiestniť na šachovnicu, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu.

Cvičenie:

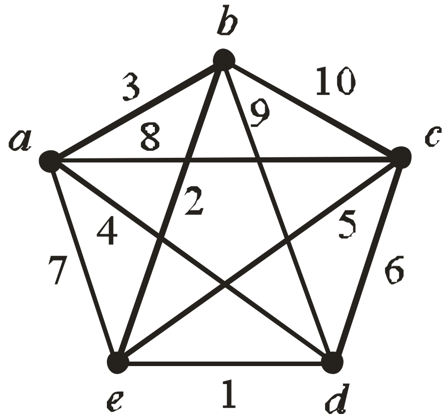
11.1. Upravte Dijkstrov algoritmus pre nájdenie najkratšej vzdialenosti medzi dvoma vrcholmi *a* a *z* v obyčajnom súvislom ohodnotenom grafe tak, aby bola nájdená dĺžka najkratšej cesty od východzieho vrcholu *a* ku každému inému vrcholu.

11.2. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre grafy na obr. 11.C1 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.



Obrázok 11.C1. Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

11.3. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre grafy na obr. 11.C2 nájdením celkového súčtu váh pre všetky hamiltonovské kružnice a určením kružnice s najmenším celkovým súčtom.

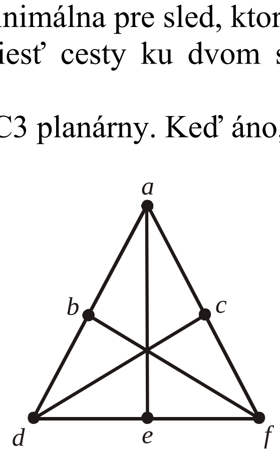


Obrázok 11.C2. Hľadajte hamiltonovské kružnice a ich dĺžky (váhy).

11.4. Navrhnite ohodnotený graf tak, že celková suma váh uzavretého sledu, ktorý navštívi každý vrchol aspoň raz je minimálna pre sled, ktorý navštívi niektoré vrcholy viackrát.

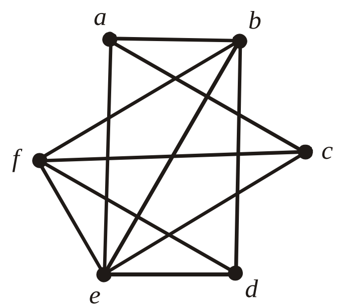
11.5. Dajú sa z piatich domov viesť cesty ku dvom studniam tak, aby sa žiadna z ciest nekrížila?

11.6. Zistite, či je graf na obr. 11.C3 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.



Obrázok 11.C3. Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?

11.7. Zistite, či je graf na obr. 11.C4 planárny. Keď áno, nakreslite ho bez kríženia hrán.



Obrázok 11.C4. Dá sa nájsť rovinná reprezentácia daného grafu?

11.8. Ukážte, že kompletný graf K_5 nie je planárny pri použití podobných argumentov, aké boli použité v príklade s oblasťami R pre $K_{3,3}$.

11.9. Predpokladajme, že súvislý planárny graf má šesť vrcholov, každý stupňa 4. Na koľko strán (oblastí) je rovina rozdelená planárnou reprezentáciou tohto grafu?

11.10. Dokážte Vetu 11.4.

11.11. Predpokladajme, že súvislý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi neobsahuje kružnice dĺžky 4 alebo kratšie. Dokážte, že $|E|\leq(5/3)|V|-(10/3)$, keď počet vrcholov je väčší ako 4.

11.12. Ktorý z nasledujúcich neplanárnych grafov má vlastnosť, že po odstránení ľubovoľného vrcholu a všetkých s ním incidentných hrán dostávame planárny graf? (a) K_5 (b) K_6 (c) $K_{3,3}$ (d) $K_{3,4}$

11.13. ***Priesečníkové číslo*** (***crossing number***) obyčajného grafu je najmenší možný počet preťatí dvoch hrán inde ako v s nimi incidentných vrcholoch (pričom žiadne tri hrany sa nesmú pretnúť v spoločnom bode). Vo všeobecnosti ide o veľmi zložitý problém, dôležitý pre návrh elektronických obvodov (definuje počet izolovaných drôtov potrebných na pridanie k plošnému obvodu). Vašou úlohou je ukázať, že $K_{3,3}$ má priesečníkové číslo rovno jednej.

11.14. ***Hrúbka (Thickness***) jednoduchého grafu je najmenší počet planárnych podgrafov, ktoré majú graf G ako ich zjednotenie. To je dôležité pre návrh elektronických obvodov, aby bolo možné zistiť, koľko najmenej vrstiev je potrebné na stavbu obvodu. Ukážte, že graf $K_{3,3}$ má hrúbku 2.

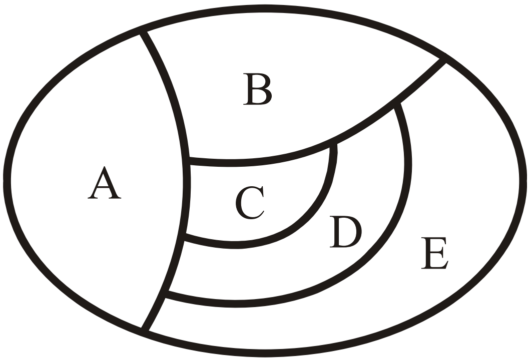
11.15. Nájdite hrúbku grafov (a) K_5 (b) K_6 (c) K_7 (d) $K_{3,4}$ (e) $K_{4,4}$ (f) $K_{5,5}$

11.16. Ukážte, že keď je G súvislý obyčajný graf s $|V|$ vrcholmi a $|E|$ hranami, potom jeho hrúbka je najmenej $\lceil |E|/(3|V|-6) \rceil$.

11.17. Použite cvičenie 11.16 na to, aby ste ukázali, že hrúbka pre K_n je najmenej $\lfloor (n+7)/6 \rfloor$.

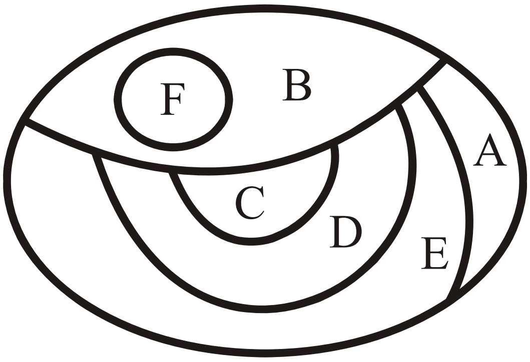
11.18. Nakreslite $K_{3,3}$ na torus, aby sa hrany neprekrývali.

11.19. Skonštruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.C5. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné steny (oblasti) nemali rovnakú farbu.



Obrázok 11.C5. Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.

11.20. Skonštruujte duálny graf pre mapu na obr. 11.C6. Nájdite počet farieb potrebných na zafarbenie mapy tak, aby žiadne dve susedné steny (oblasti) nemali rovnakú farbu.



Obrázok 11.C6. Nájdite duálny graf a zafarbenie mapy.

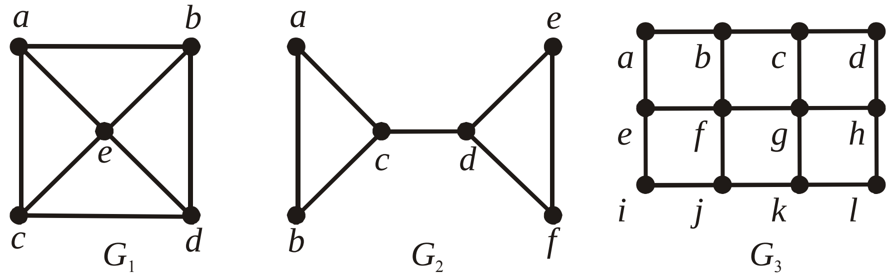
11.21. Aké je chromatické číslo grafu typu "koleso" W_n?

11.22. Navrhnite rozvrh pre skúšky z predmetov Analýza algoritmov (A), Modelovanie a simulácia (M), Počítačová grafika (P), Databázy (D), Umelá inteligencia (U), Neurónové siete (N), Evolučné algoritmy (E), Operačné systémy (O), keď žiadni študenti nemajú naraz zapísanú Analýza algoritmov a Operačné systémy, nemajú naraz zapísanú Modelovanie a simulácia a Operačné systémy, nemajú naraz zapísanú Databázy a Umelá inteligencia, nemajú naraz zapísanú Databázy a Neurónové siete, nemajú naraz zapísanú Analýza algoritmov a Modelovanie a simulácia, nemajú naraz zapísanú Analýza algoritmov a Počítačová grafika, nemajú naraz zapísanú Počítačová grafika a Databázy, ale existujú študenti, ktorí majú zapísané všetky ostatné možné kombinácie.

11.23. V slučke počítačového programu sa objavuje 7 premenných. Premenné a kroky, v priebehu ktorých musia byť uložené sú:
t kroky 1-6
u krok 2
v kroky 2-4
w kroky 1,3 a 5
x kroky 1 a 6
y kroky 3-6
z kroky 4-5
Koľko rozdielnych indexových registrov potrebujeme na uloženie týchto premenných v priebehu výpočtu?

11.24. Frekvencie mobilných telefónov sú priraďované podľa zón. Každá zóna má priradenú sadu frekvencií, ktoré môžu byť použité mobilnými telefónmi v tej zóne. Rovnaká frekvencia nemôže byť použitá v zónach, kde by bol problém s interferenciou. Vysvetlite, ako *k*-tuple zafarbovanie môže byť použité pre priradenie *k* frekvencií každému mobilného telefónu.

11.25. Nájdite minimálne dominujúce množiny grafov na Obr. 11.C7.



Obrázok 11.C7. Minimálne dominujúce množiny?

11.26. Nájdite minimálny počet dám dominujúcich $n \times n$ šachovnicu
(a) pre n=3, (b) pre n=4, (c) pre n=5

11.27. Ukážte, že počet vrcholov obyčajného grafu je menší alebo rovný násobku čísla vrcholovej nezávislosti (=maximálneho počtu vrcholov nezávislej množiny vrcholov, t. j. independence set) a chromatického čísla grafu.