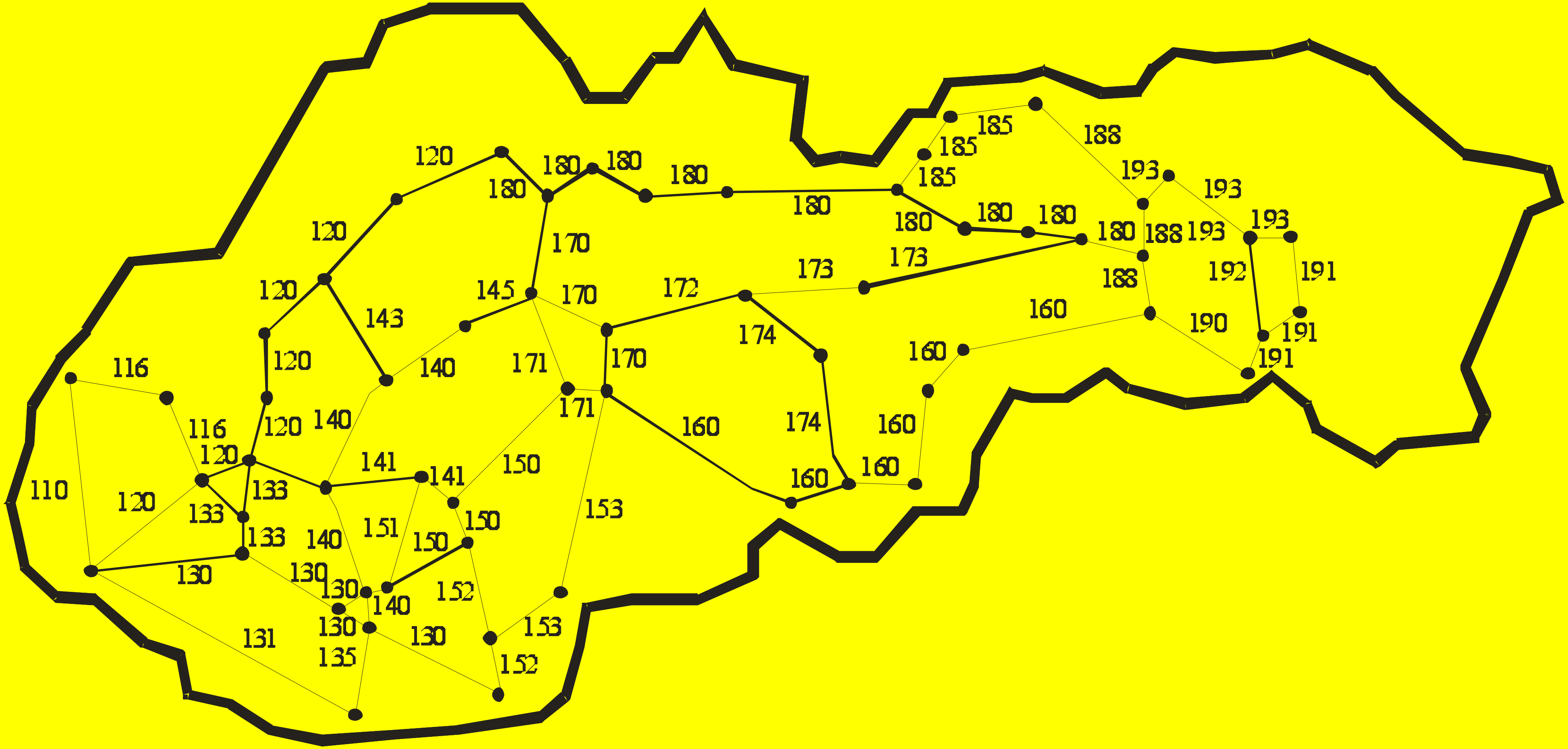
Teória grafov II

- cesty v ohodnotených grafoch
- planárne grafy
- Kuratowskeho veta
- farbenie grafov a máp
- Eulerova formula
- aplikácie farbenia
- minimálna dominujúca vrcholová množina
- číslo vrcholovej nezávislosti

Ohodnotené grafy (weighted graphs)

každej hrane je priradené reálne číslo - váha (weight).



Zjednodušená mapa železničnej siete Slovenska s očíslovaním koridorov tvorí ohodnotený graf (hranice republiky do grafu nepatria)

Aplikácie:

železničná, cestná alebo letecká sieť

vzdialenosti medzi mestami

priradení triedy cesty (1-3.),

čas potrebný na cestu

cena cestovného lístku

počítačová alebo telefónna sieť

rýchlosť odozvy

priepustnosť linky

cenu prenájmu linky

Typy problémov:

Zistiť ***dĺžku cesty*** v ohodnotenom grafe, ktorá sa bude rovnať súčtu váh hrán tejto cesty (táto dĺžka je rozdielna od dĺžky cesty neohodnoteného grafu, ktorá predstavuje počet hrán cesty, formálne si môžeme predstaviť, že každá hrana má váhu rovnú jednej).

Ktorá cesta medzi dvoma vrcholmi je ***najkratšia***, teda, aká je najmenšia vzdialenosť, ktorú musíme prejsť, aby sme sa dostali z Bratislavy do Medzilaboriec?

Ktorú cestu máme vybrať, aby sme v cieli boli čo najrýchlejšie?

Ktorú cestu máme vybrať, aby sme sa do cieľa dostali za čo najmenej peňazí?

V počítačových sieťach sa môžeme spýtať:

Ktoré telefónne ústredne máme prepojiť, aby sme dostali čo najlacnejšie spojenie?

Ktoré telefónne ústredne máme prepojiť, aby sme mali čo najrýchlejšiu odozvu?

Problém obchodného cestujúceho: máme navštíviť každý vrchol (mesto) práve raz a vrátiť sa do východzieho vrcholu s cieľom precestovať pritom čo najkratšiu trasu (obecne NP úplný problém, riešenie heuristikami)

Nájdenie najkratšej cesty (viac algoritmov)

Holandský matematik Edsger **Dijkstra** r. 1959 pre ohodnotené neorientované grafy so všetkými váhami ohodnotenými kladným číslom (jednoduchá adaptácia na orientované grafy)

Hľadáme cestu najkratšej dĺžky medzi vrcholmi *a* a *z* zadaného grafu *G*.

1. Nájsť dĺžku najkratšej cesty z *a* do najbližšieho vrcholu
2. Nájsť dĺžku najkratšej cesty z *a* do druhého najbližšieho vrcholu, atď. dokiaľ nenájdeme dĺžku najkratšej cesty od *a* do *z*.

Pri každej iterácii pridávame nový vrchol do množiny vrcholov *S* so stanovenou najkratšou vzdialenosťou od vrcholu *a*. Robí sa vždy nové ohodnocovanie vrcholov. Vrchol *w* je ohodnotený dĺžkou najkratšej cesty z *a* do *w* obsahujúcej iba vrcholy z množiny *S*. Do *S* pridávame pri každej iterácii vrchol s minimálnym ohodnotením, ktorý ešte nie je v *S*. Algoritmus začína ohodnotením vrcholu *a* hodnotou 0 a všetkých ostatných ∞ .

procedure *Dijkstra*(G: ohodnotený súvislý obyčajný graf so všetkými váhami pozitívnymi) {G má vrcholy $a=v_0,v_1,\ldots,v_n=z$ a váhy $w(v_i,v_j)$ kde $w(v_i,v_j)=\infty$, keď (v_i,v_j) nie je hrana G}

for i:=1 **to** n

    $L(v_i) := \infty$

$L(a) := 0$; $S := \emptyset$;

{vrcholy ohodnotené ∞, okrem východzieho a, ktorý má 0, a množina vrcholov S s nájdenou najmenšou vzdialenosťou od a je prázdna}

while $z \notin S$

begin

    u := vrchol nepatriaci do S s minimálnou $L(u)$

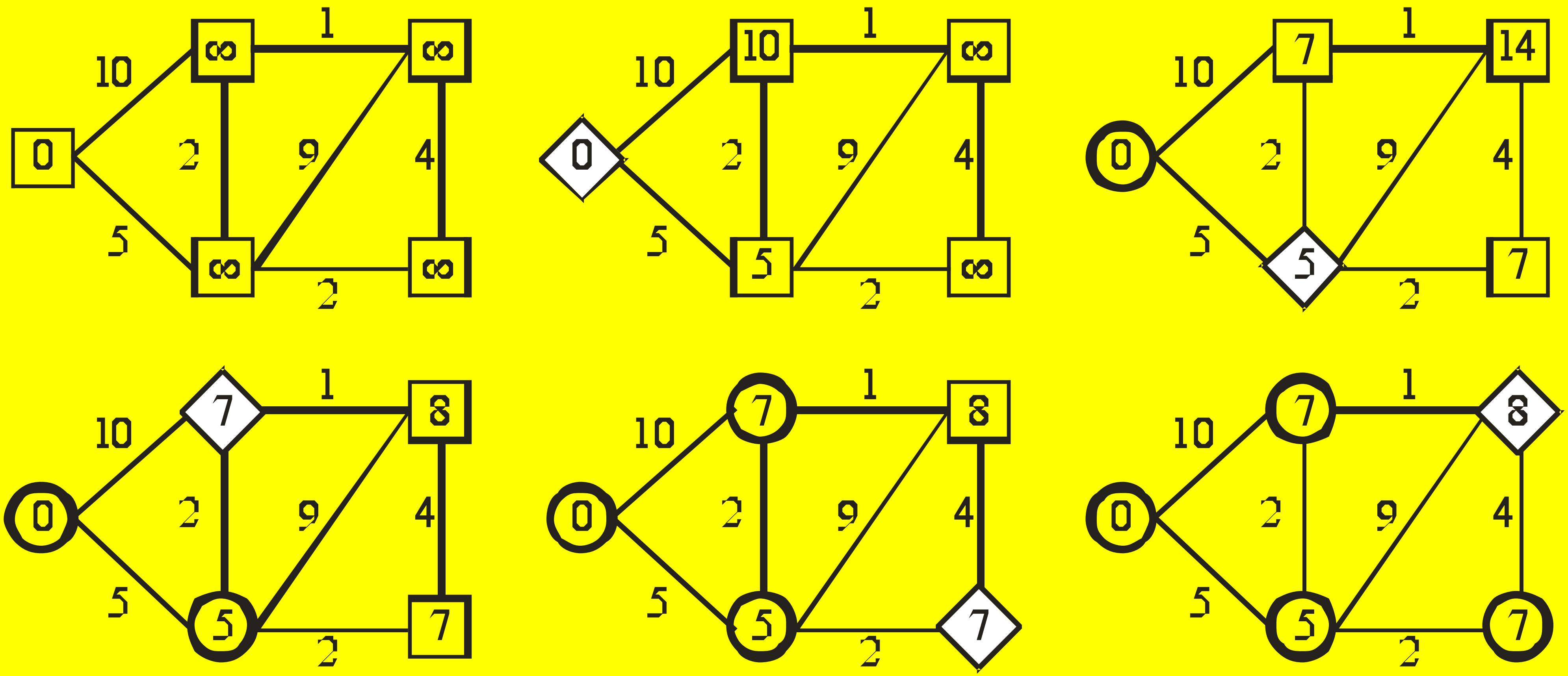
    $S := S \cup \{u\}$

    for všetky vrcholy v nepatriace do S

        if $L(u)+ w(u,v)< L(v)$ **then** $L(v) := L(u)+ w(u,v)$

{takto do S pridávame vrchol s najmenšou vzdialenosťou a upravujeme hodnoty vrcholov nepatriacich do S}

end { $L(z)$ je najkratšia cesta z a do z }

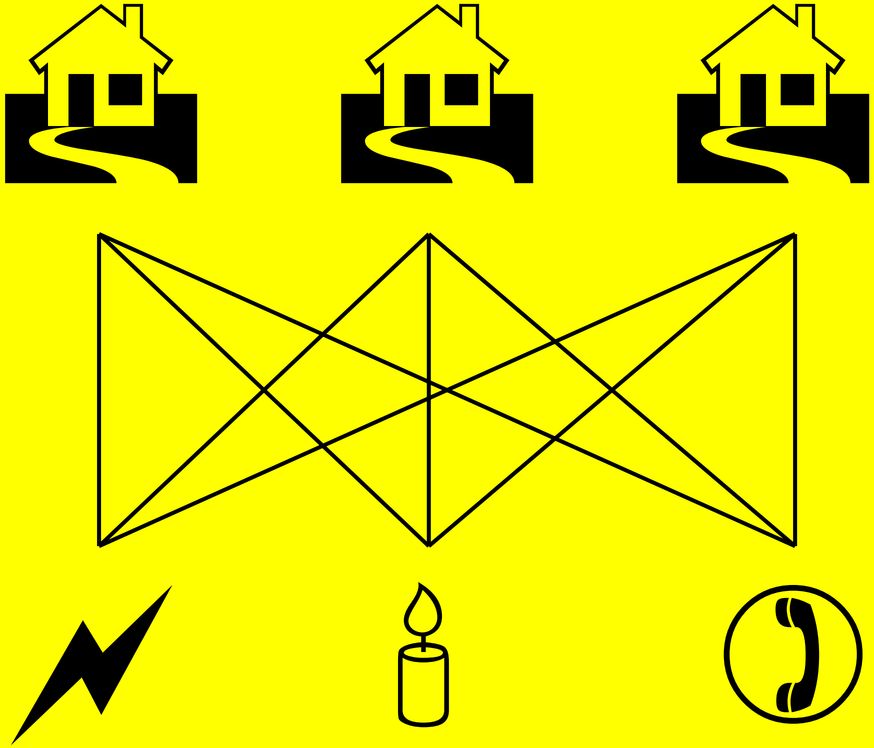


Priebeh Dijkstrova algoritmu pre hľadanie dĺžky najkratšej cesty od vrcholu vľavo. Vrchol vyznačený kosoštvorcom predstavuje aktuálne spracovávaný vrchol, vrcholy v krúžku patria do množiny *S*, pre tieto vrcholy bola najkratšia cesta už vypočítaná a ich ohodnotenie sa už nebude meniť

Časová zložitosť: Najhorší prípad časovej zložitosti pre **Dijkstrov** algoritmus s n vrcholmi a m hranami je $\boldsymbol{O(n^2)}$. Táto hodnota môže byť podstatne vylepšená pre grafy s málo („riedko rozmiestnenými“) hranami.

Problém obchodného cestujúceho, je ekvivalentný nájdeniu hamiltonovskej kružnice s minimálnym súčtom váh v kompletnom ohodnotenom neorientovanom grafe. Keď si zvolíme ľubovoľný štartovací bod, keďže kružnica (a,b,c,d,a) je pre nás totožná s kružnicou (b,c,d,a,b), máme (n-1)! možností permutácií, vyjadrujúcich kružnice, a keď si zoberieme, že nám nezáleží u kružnice na smeru, keďže (a,b,c,d,a) je pre nás rovnaká kružnica ako (a,d,c,b,a), máme (n-1)!/2 možností, čo je stále **NP-úplný** problém. V praxi sa problém obchodného cestujúceho pre veľa vrcholov rieši aproximačnými algoritmami, ktoré nemusia nutne nájsť najlepšie riešenie, ale nájdu riešenie blízke najlepšiemu. Napríklad, pokiaľ graf spĺňa trojuholníkovú nerovnosť, existuje polynomiálny algoritmus, ktorý nájde prinajhoršom o 50% dlhšiu cestu ako je najlepšia možná. V praxi sa využívajú algoritmy, ktoré sú schopné nájsť riešenie pre problému o 1000 vrcholoch v priebehu niekoľko minút, a také riešenie bude v priemere do 2% horšie ako ideálne.

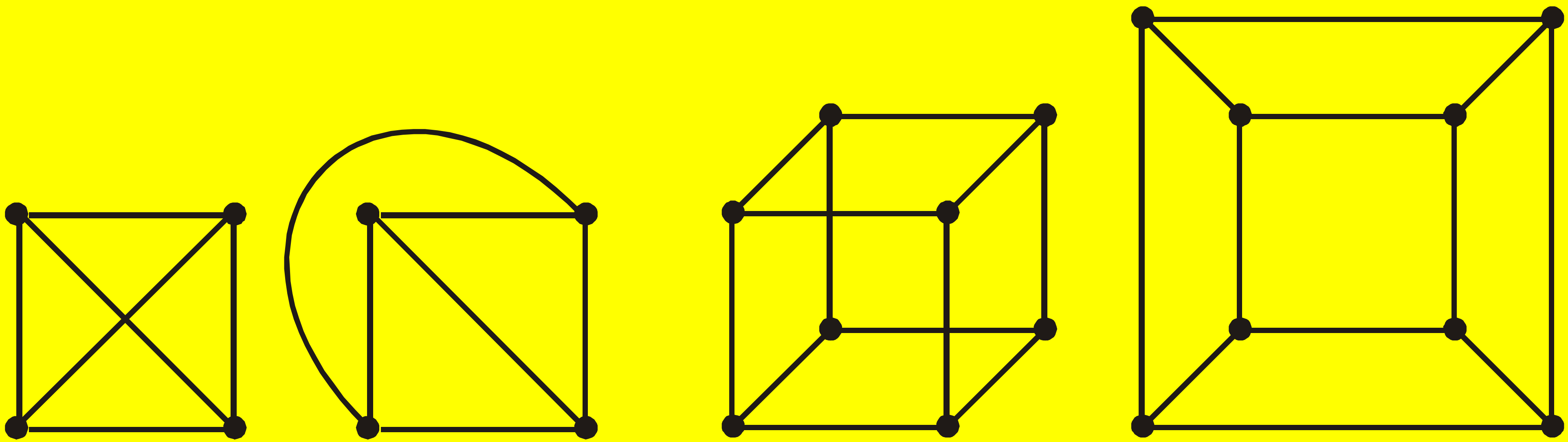
Planárne grafy



Dajú sa rozvody viesť tak, aby sa nikde nekrížili?

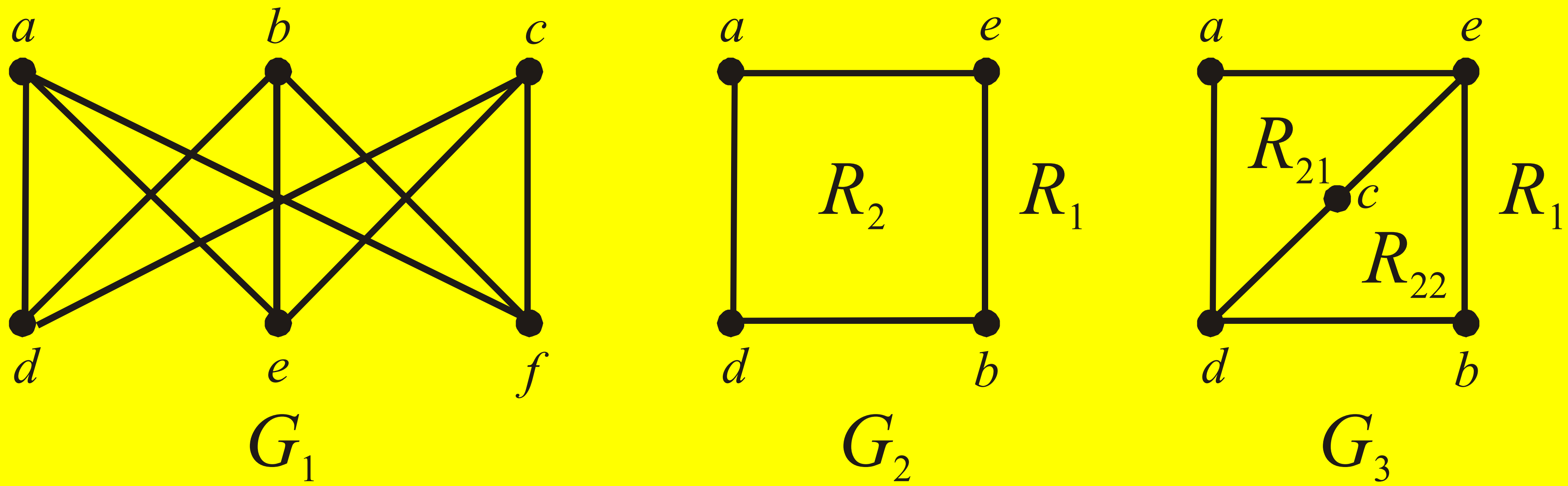
Dá sa bipartitný kompletný graf $K_{3,3}$ prekresliť tak, aby sa žiadne dve hrany nekrížili?

Problém tlačených spojov: formálne sa rieši ako otázka, či je graf planárny.
Graf voláme planárny, keď môže byť zakreslený v rovine bez toho, že by sa jeho hrany krížili (pod krížením hrán rozumieme preťatie priamok alebo oblúkov reprezentujúcich hrany na inom mieste ako sú s nimi incidentné spoločné vrcholy). Nákres = rovinná (planárna) reprezentácia grafu.
Graf môže byť planárny, aj keď sa zvyčajne zakresľuje s prekríženými hranami.



K_4 K_4 Q_3 Q_3

Kompletný graf K_4 a hyperkocka Q_3 s bežným nákresom a v rovinnej reprezentácii



Prečo je kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$ neplanárny?

Musia byť prepojené vrcholy a,b s vrcholmi d,e. Tieto 4 hrany vymedzujú rovinu na dve oblasti, R_1 a R_2, ako je ukázané na grafu G_2. Vrchol c je alebo v jednej, alebo v druhej oblasti; oblasť, v ktorej je, rozdeľuje na dve časti, ako je to vidno pre R_{21} a R_{22} v grafu G_3 z Obr. 11.5. Potom nie je možné umiestniť vrchol f bez toho, aby sa krížili hrany. Keď je f v oblasti R_1, nie je možné vytvoriť hranu $\{f,c\}$ bez kríženia. Keď je f v oblasti R_{21}, nie je možné vytvoriť hranu $\{f,b\}$ bez kríženia. Keď je f v oblasti R_{22}, nie je možné vytvoriť hranu $\{f,a\}$ bez kríženia. Podobné argumenty by sa dali použiť, keby bod c bol v oblasti R_1.

Elektronický obvod si môžeme abstrahovať ako graf, kde jednotlivé súčiastky tvoria vrcholy a spojenia medzi nimi sú reprezentované hranami. Elektronický obvod môžeme vytlačiť na jednu dosku, pokiaľ dokážeme pre jemu odpovedajúci graf nájsť rovinnú reprezentáciu. Keď graf nie je planárny, môžeme použiť zložitejšie riešenia. Napríklad môžeme vrcholovú množinu grafu rozdeliť na disjunktívne podgrafy, ktoré už budú planárne. Potom môžeme skonštruovať obvod prepojením viacerých vrstiev. Ďalšou možnosťou je pri krížení hrán použiť izolovaný drôt; v tomto prípade sa budeme snažiť navrhnúť reprezentáciu s čo najmenej prekríženiami.

Eulerova formula

Rovinná reprezentácia planárneho grafu rozdeľuje rovinu na časti, ktoré nazývame steny. Za stenu považujeme aj vonkajšiu, neohraničenú oblasť. Súhrn vrcholov, hrán a stien (rovinnej) reprezentácie (planárneho) grafu tvorí (rovinnú) mapu.

Veta (rozšírená Eulerova formula): Nech G je planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami, $|V|$ vrcholmi a $|K|$ komponentmi. Nech $|R|$ je počet stien jeho rovinnej reprezentácie. Potom

$$|R|=|E|-|V|+|K|+1 \tag{11.1}$$

Dôkaz: Použijeme indukciou na počet hrán pri fixnom počte vrcholov. Ak $|E|=0$, potom $|R|=1$, $|V|=|K|$ a rovnosť (11.1) platí. Nech (11.1) platí, ak $|E|=m$, kde m je celé nezáporné číslo. Majme mapu M_1 s $m+1$ hranami. Odstráňme z nej ľubovoľnú hranu e. Vznikne mapa M_2 s m hranami. Označme počet stien, resp. komponentov mapy M_1 ako $|R_1|$, resp.$|K_1|$, podobne pre M_2 ako $|R_2|$, resp. $|K_2|$. Podľa indukčného predpokladu platí $|R_2|= m - |V|+|K_2| +1$. Ak e je most, potom $|R_1|=|R_2|$, $|K_1| = |K_2| -1$. V opačnom prípade $|R_1|=|R_2|+1$, $|K_1| = |K_2|$. V obidvoch prípadoch $|R_1|=(m+1) - |V|+|K_1| +1$, čo sme mali dokázať. ■

Príklad: Predpokladajme, že planárny obyčajný spojitý graf má 20 vrcholov, každý stupňa 3. Na koľko stien rovinná reprezentácia tohto grafu rozdeľuje rovinu?

Riešenie: Pretože suma stupňov vrcholov je rovná dvojnásobku počtu hrán, $2\left|E\right| = \sum_{v\in V} deg\left(v\right)$, $2|E|=20\times3=60$, $|E|=30$. Z Eulerovej formuly vyplýva $|R|=|E|-|V|+|K| +1=30-20+1+1=12$.

Veta 2. Nech G je spojitý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V|\geq 3$, potom $|E|\leq 3|V|-6$.

Dôkaz: Spojitý planárny obyčajný graf rozdeľuje rovinu na $|R|$ stien. Počet hrán ohraničujúcich stenu R (ktorý budeme volať ***stupeň steny*** $deg(R)$) je najmenej 3. (Do stupňa počítame ako prírastok 2 tie hrany, ktoré sú v stene „z obidvoch strán".) Suma stupňov stien sa teda presne rovná dvojnásobku počtu hrán v grafu. Pretože každá oblasť má stupeň väčší alebo rovný 3 (musí platiť pre spojitý graf s aspoň troma vrcholmi), dostávame

$$2\left|E\right| = \sum_{\textit{všetky oblasti } R} \deg\left(R\right) \geq 3\left|R\right|$$

Odtiaľ (2/3) $|E|\geq |R|$. Použitím Eulerovej formuly dostávame (2/3) $|E|\geq|E|-|V|+2$, z čoho vyplýva $|E|/3\leq|V|-2$ a teda $|E|\leq 3|V|-6$. ■

Príklad: Ukážte pomocou Vety 2, že K_5 nie je planárny graf.
Graf K_5 má 5 vrcholov a 10 hrán. Keďže podmienka $|E|\leq 3|V|-6$ neplatí pre $10\leq 3\times 5-6$, K_5 nie je planárny.

Veta 3. Nech G je spojitý planárny obyčajný graf, potom obsahuje vrchol stupňa menšieho alebo rovného 5.

Dôkaz: Keď by bol stupeň každého vrcholu aspoň 6, potom podľa vzorca $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$ by sme mali $2|E| \geq 6|V|$. To je ale v kontradikcii s nerovnosťou podľa 11.2, $2|E| \leq 6|V| - 12$. ■

Veta 4. Nech G je spojitý planárny obyčajný graf s $|E|$ hranami a $|V|$ vrcholmi, kde $|V| \geq 3$, a neobsahuje žiadnu kružnicu dĺžky 3, potom $|E| \leq 2|V| - 4$.

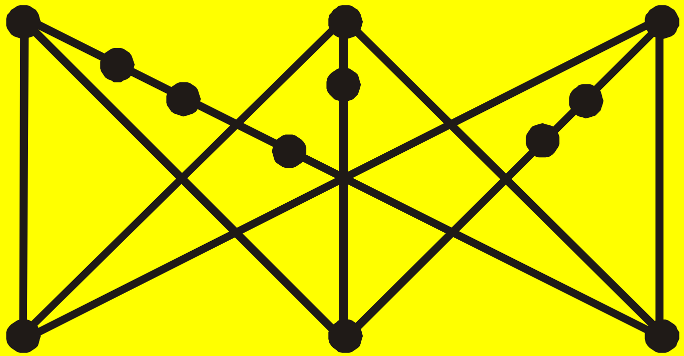
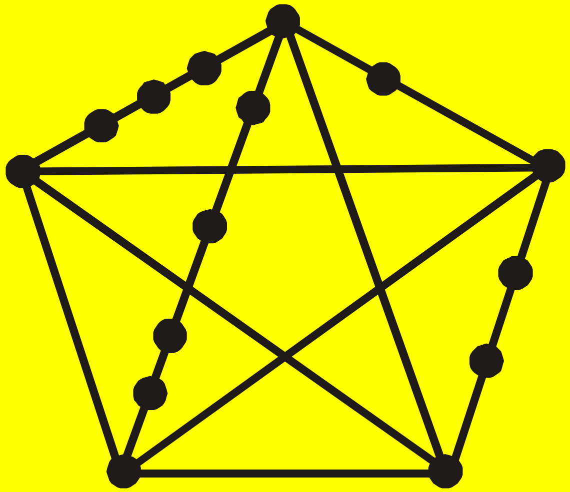
Príklad: Použite vetu 4 na dôkaz toho, že $K_{3,3}$ nie je planárny.
Riešenie: Pretože $K_{3,3}$ nemá žiadnu kružnicu dĺžky 3, čo je zrejmé z toho, že je bipartitný, môžme použiť vetu 11.4. $K_{3,3}$ má 6 vrcholov a 9 hrán, teda nerovnica $|E| \leq 2|V| - 4$ nie je splnená.

Keďže ani $K_{3,3}$ ani K_5 nie sú planárne, nebudú planárne ani grafy, ktoré ich majú ako podgrafy. Je ale prekvapujúce, že všetky neplanárne grafy nutne obsahujú podgraf, ktorý môže byť skonštruovaný z $K_{3,3}$ ani K_5 pomocou určitých povolených operácií.

Z grafov $K_{3,3}$ a K_5 môžeme vytvoriť ďalšie neplanárne grafy, ak ich hrany rozdelíme na viac hrán pomocou vrcholov druhého stupňa (pozri Obrázok). Všetky grafy, ktoré takýmto spôsobom získame, vrátane samotných $K_{3,3}$ a K_5, voláme ***Kuratowského***[1] ***grafy***.

---

[1] Kazimierz Kuratowski (1896-1980) bol poľský matematik, ktorý študoval pred 1. svetovou vojnou v Glasgowe v Škótsku, potom pracoval v Ľvove a na Varšavskej univerzite. V priebehu 2. svetovej vojny kvôli prenasledovaniu vzdelaných Poliakov za okupácie nacistami vyučoval tajne. Zaslúžil sa o poľskú matematiku, publikoval viac ako 180 článkov, pracoval v teórii množín a topológii, r. 1930 navrhol charakterizáciu neplanárnych grafov.

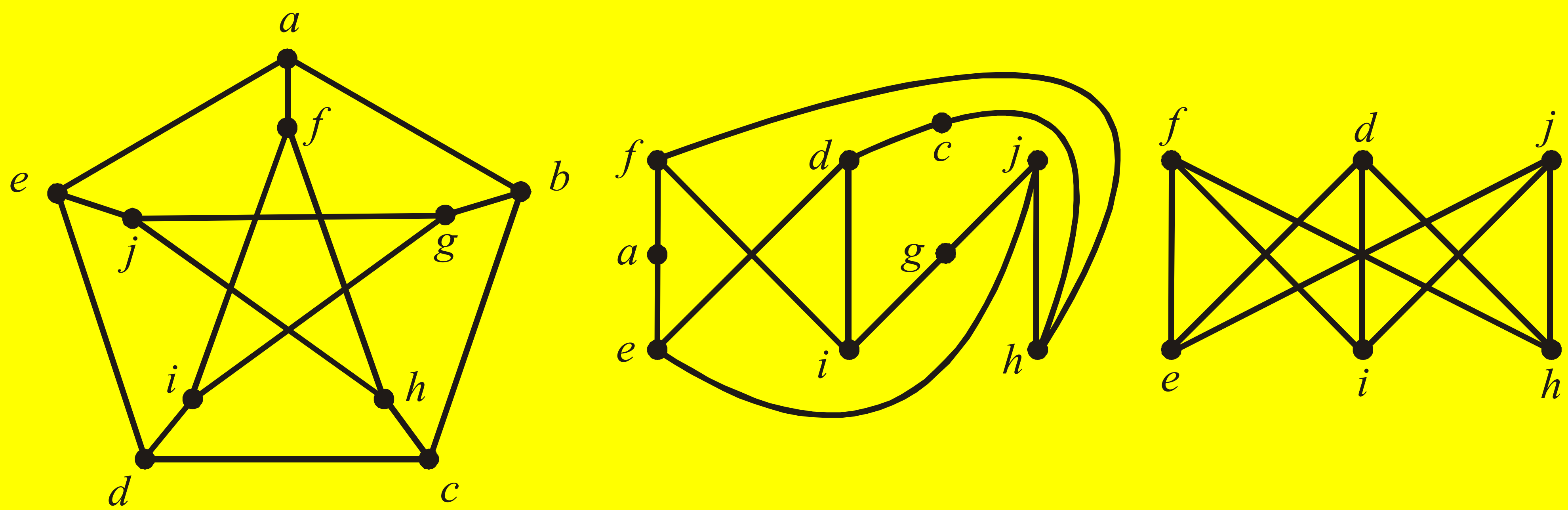
Kuratowského grafy

Veta 5 (**Kuratowského veta**): Konečný graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje ako podgraf nijaký Kuratowského graf.

Opačná strana dôkazu, že každý neplanárny graf obsahuje ako podgraf Kuratowského graf, je natoľko komplikovaný, že ho tu nebudeme uvádzať.

Je Petersenov graf planárny? (Julius Petersen bol dánsky matematik, graf navrhnutý 1891 je často používaný pre štúdium).

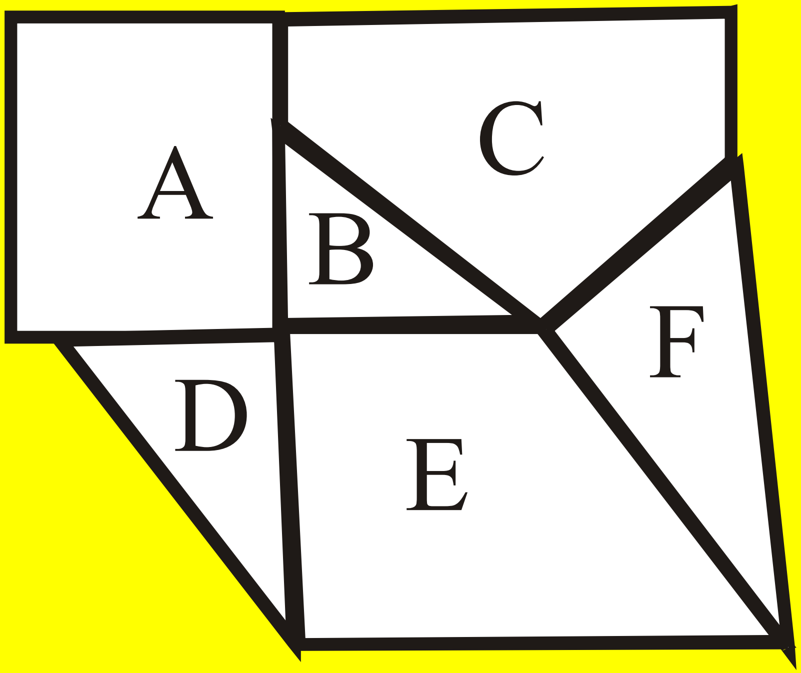
Riešenie: Z grafu dá vytvoriť odstránením vrcholov a s ním spojených hrán a nasledovným odstránením vrcholov stupňa 2 (s tým, že dvojica hrán, s ktorými bol taký vrchol incidentný, vytvorí jednu hranu) graf izomorfný s grafom $K_{3,3}$, Petersenov graf nie je planárny.

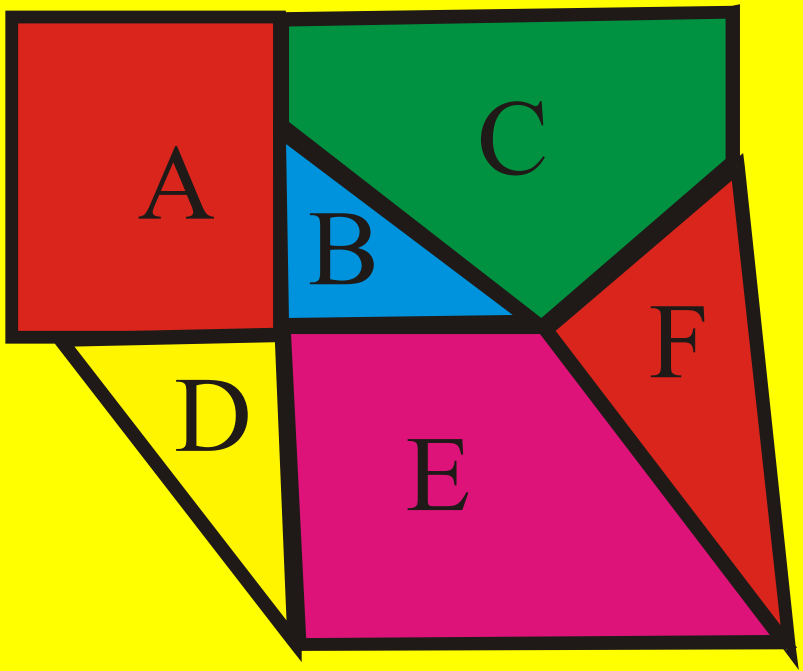


Petersenov graf, jeho podgraf získaný odstránením vrcholu b a $K_{3,3}$, z ktorého sa dá získať graf izomorfný s prostredným grafom pridaním vrcholov a, c a g medzi hrany $\{e,f\}$, $\{d,h\}$ a $\{i,j\}$.

Farbenie grafov

Politické mapy sa zvyčajne kreslia tak, že štáty, ktoré zdieľajú hranice, sú vyfarbené odlišnou farbou. (Keď sa hranice štátov dotýkajú iba v jednom bode, potom môžu štáty byť vyfarbené rovnakou farbou.)



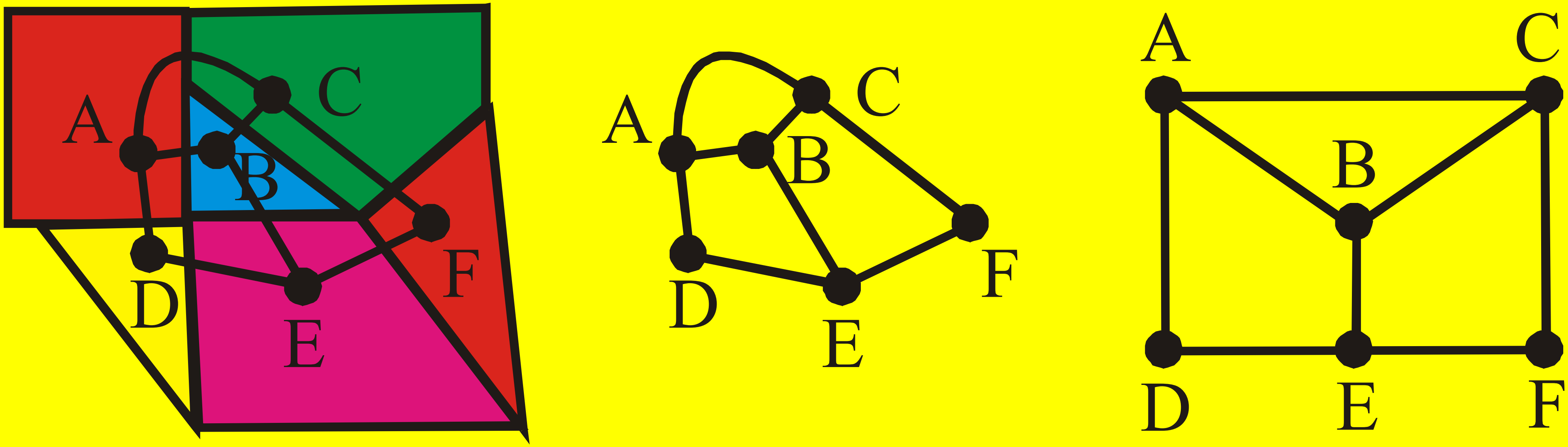


Mapa a jej farbenie.

Otázka je, dokážeme zafarbiť túto mapu aj menej ako piatimi farbami?

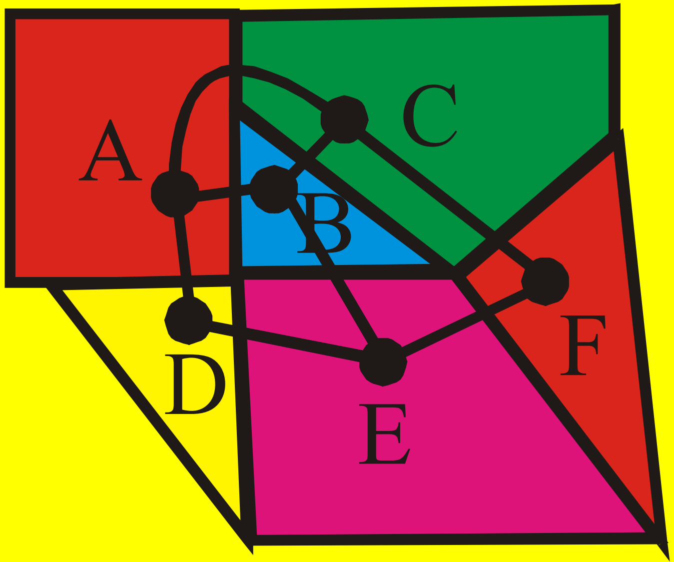
Farbenie máp je otázka susednosti – ktoré štáty zdieľajú netriviálnu hranicu. Všetka ostatná informácia (ako veľkosť alebo tvar štátu) je nepodstatná.

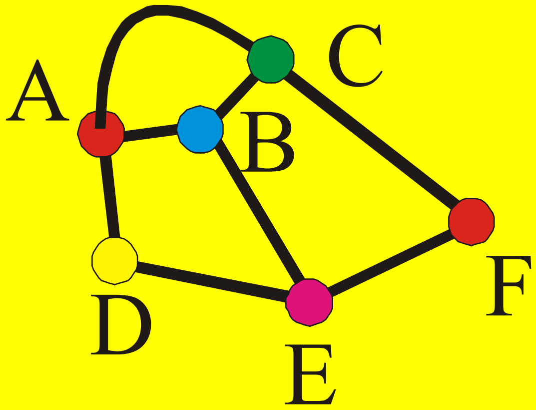
Duálny graf k danej mape - nahradením štátu vrcholom a spojením vrcholov, keď im odpovedajúce krajiny zdieľajú hranicu

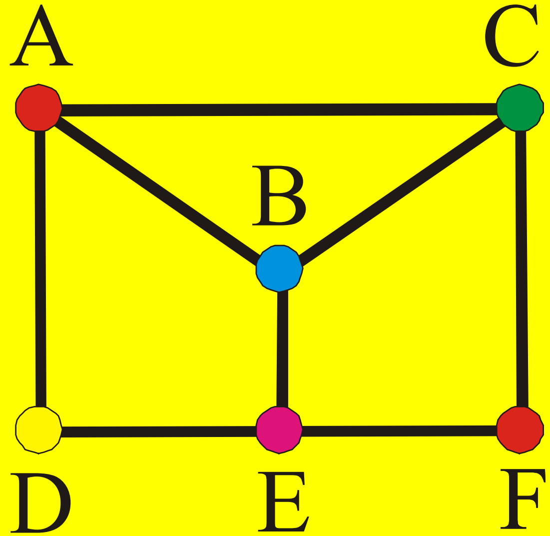


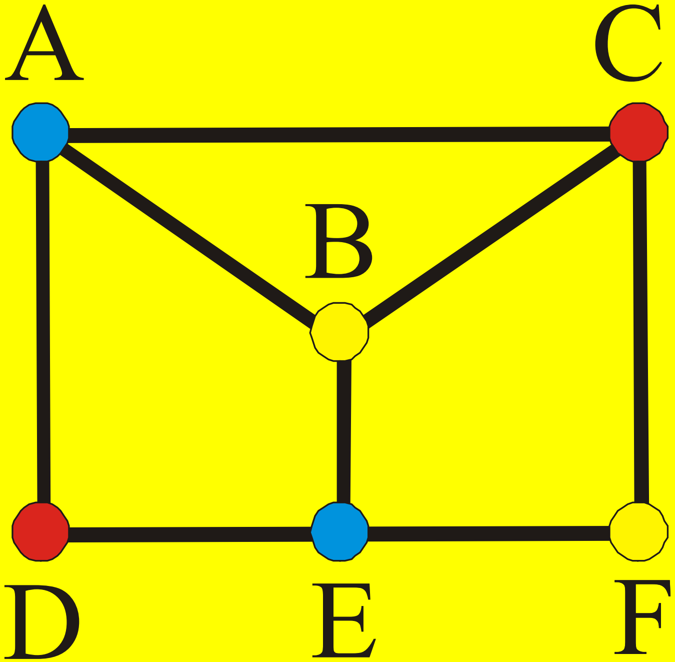
Graf odpovedajúci mape, jeho vybratie z mapy a pravidelnejšie zakreslenie

Je možné vrcholy grafu zafarbiť menej farbami ako 5 tak, aby susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou?



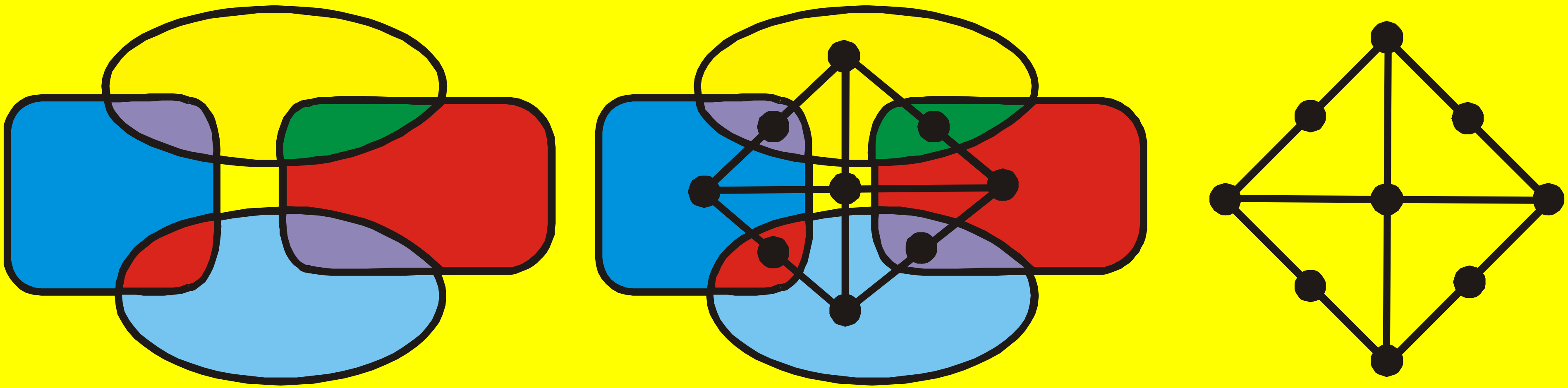


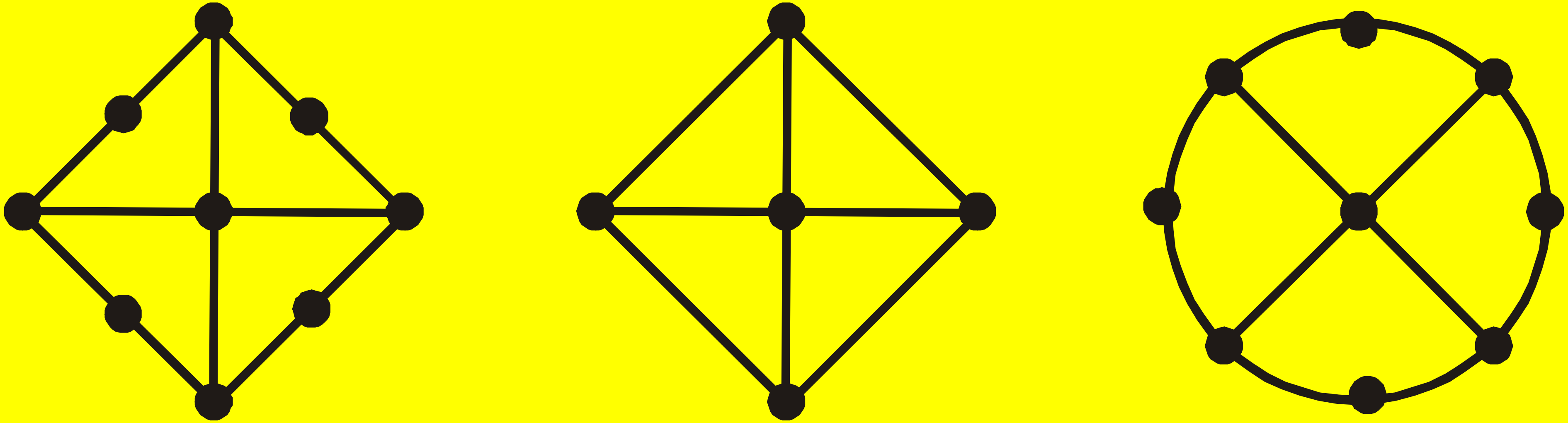




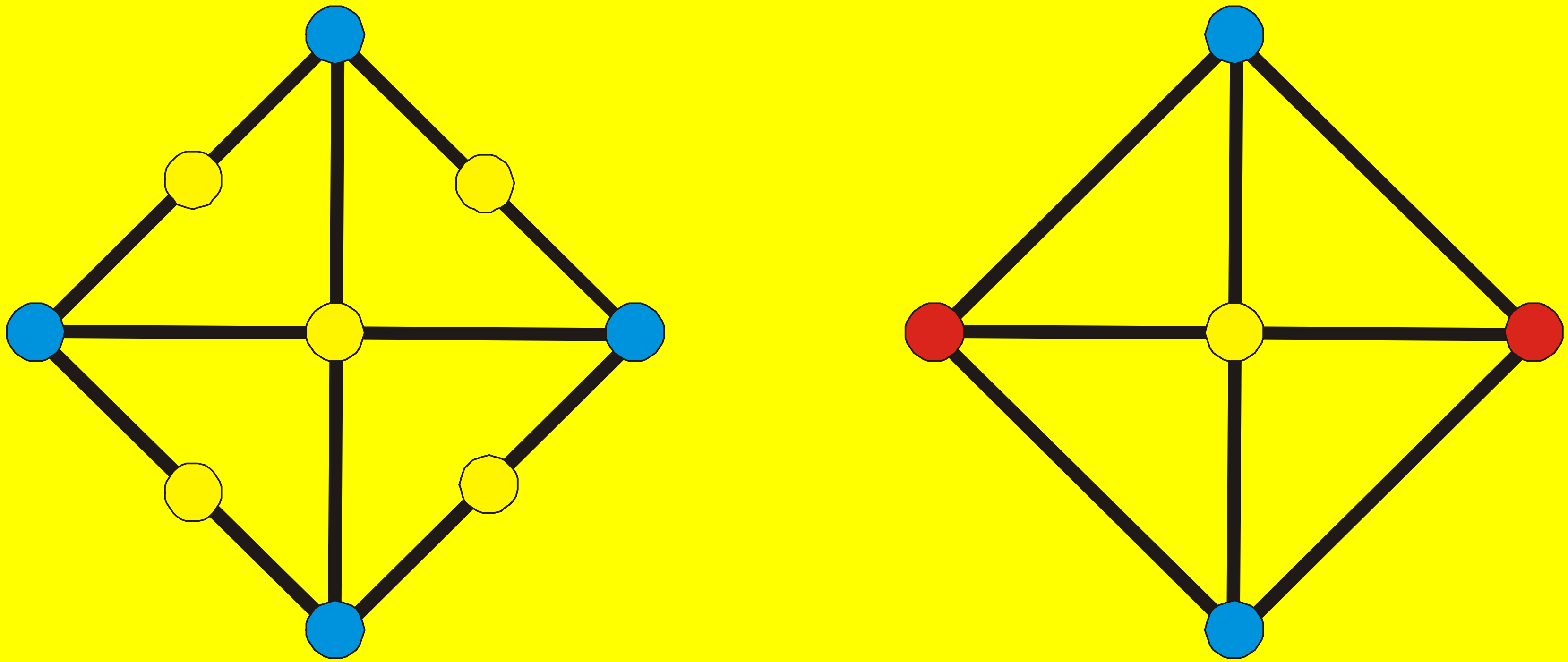
Zafarbenie vrcholov grafu menej farbami, mapa by teda vyžadovala iba 3 farby.

Koľko farieb je potrebné na zafarbenie dolu uvedenej mapy?





Koľko farieb je potrebných na zafarbenie vrcholov grafov?

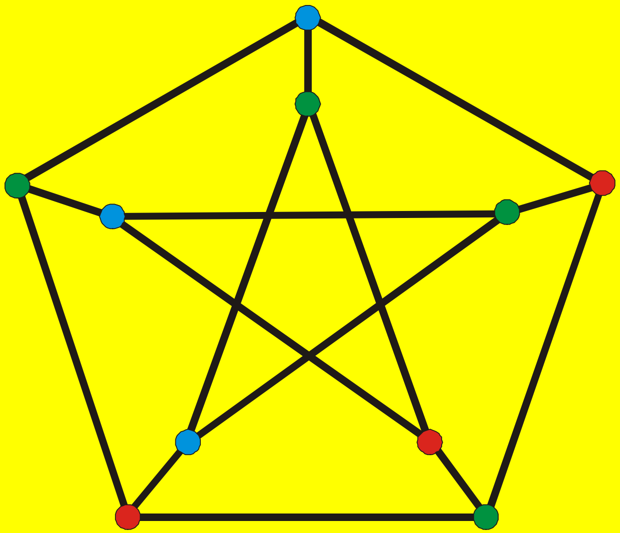


Napodiv, prvý graf s viac vrcholmi si vyžiadal menej farieb.

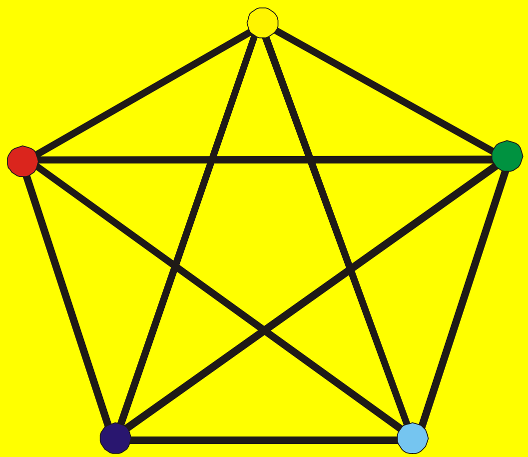
Koľko farieb by bolo potrebných na zafarbenie kompletného grafu $\boldsymbol{K_n}$?
Samozrejme n, keďže každý vrchol je spojený s každým.

Chromatické číslo grafu je počet farieb nutných na zafarbenie vrcholov tak, že susedné vrcholy majú rôznu farbu. Chromatické číslo grafu G sa zvyčajne označuje $\chi(G)$.

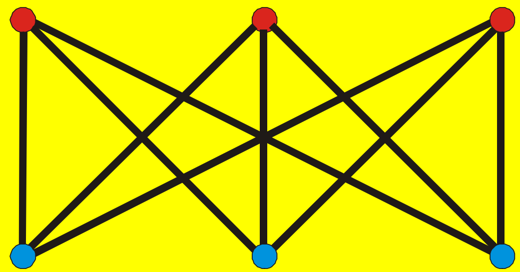
Napríklad Petersenov graf má chromatické číslo 3.



Petersen



K_5

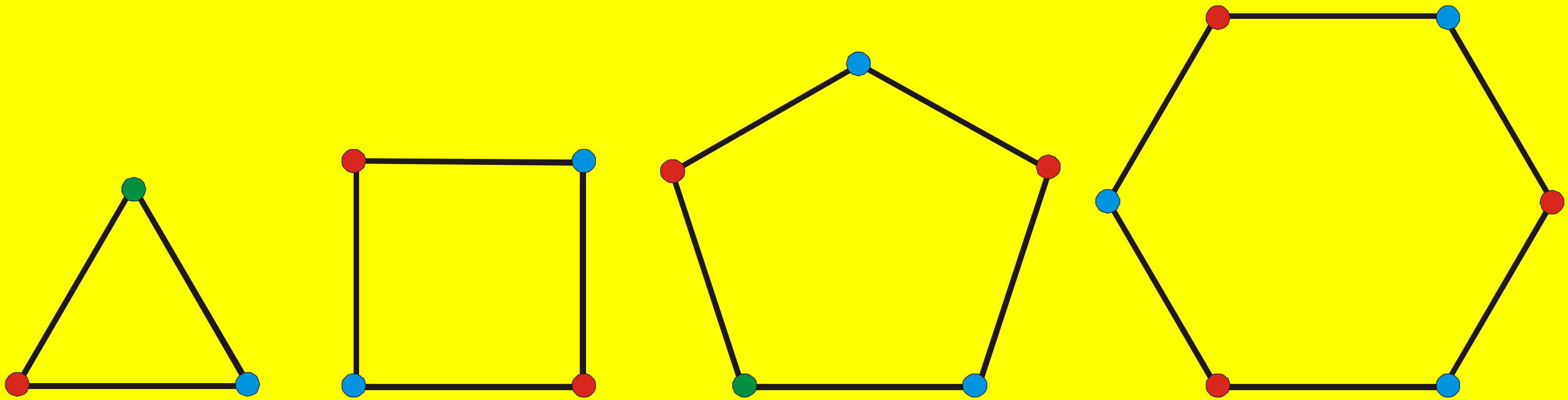


$K_{3,3}$

Chromatické číslo grafu K_n je n, a chromatické číslo bipartitného grafu $K_{n,m}$ je 2 (dve množiny vrcholov zafarbíme každú inou farbou).

Chromatické číslo grafu C_n pre párne n je dva. Stačí vybrať vrchol a zafarbiť ho jednou farbou, a postupovať po kruhu po smeru hodinových ručičiek a farbiť vrcholy vždy alternatívnou farbou. N-tý vrchol musí byť zafarbený druhou farbou, pretože prvý a (n-1)prvý boli zafarbené prvou z farieb.

Chromatické číslo grafu C_n pre nepárne n je tri. Stačí vybrať vrchol a zafarbiť ho jednou farbou, a postupovať po kruhu po smeru hodinových ručičiek a farbiť vrcholy vždy alternatívnou farbou. N-tý vrchol musí byť zafarbený treťou farbou, pretože prvý a (n-1)prvý boli zafarbené prvou, resp. druhou z farieb.



C_3 C_4 C_5 C_6

Veta 6. (R.L. Brooks, 1941): Nech je najväčší zo stupňov vrcholov grafu G rovný d. Ak $d \neq 2$ a graf G neobsahuje kompletný podgraf s $d+1$ vrcholmi, tak $\chi(G) \leq d$ (inak $\chi(G)=d+1$). Ak $d=2$ a graf G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, tak $\chi(G)=2$, inak $\chi(G)=3$.

Veta o štyroch farbách:

Veta 7. Každý planárny graf má chromatické číslo maximálne 4.

Prvá písomná zmienka o tomto probléme pochádza z dopisu Augusta De Morgana nám známemu siru Hamiltonovi z 1852. Po sade neúspešných pokusov bol tento teorém dokázaný pomocou počítačov r. 1976, pomocou skontrolovanie niekoľko tisíc špeciálnych prípadov. To vyvolalo diskusiu, pre tak rozsiahle použitie počítačov v dôkaze. Čo keď bola chyba v programe?

Najlepší známy algoritmus na farbenie grafov má v najhoršom prípade exponenciálnu zložitosť v závislosti na počtu vrcholov v grafe. Aj nájsť aproximáciu chromatického čísla je zložité.

Možný **algoritmus na zafarbenie obyčajného grafu** s greedy (pažravým) prístupom:

1. Zoraď vrcholy v_1, v_2,..., v_n podľa veľkosti ich stupňov, tak, že $deg(v_1) \geq deg(v_2) \geq \dots deg(v_n)$; $i=0$
2. Priraď farbu $i+1$ prvému ešte neofarbenému vrcholu v zozname. Postupne priraď farbu $i+1$ vrcholom v zozname, ktoré ešte neboli ofarbené a nesusedia s vrcholmi, ktorým už bola priradená farba $i+1$.
3. Opakuj krok 2, dokiaľ všetky vrcholy nebudú ofarbené

Uvedený algoritmus ale nezaručuje získanie ofarbenia vrcholov s minimálnym počtom farieb.

Použitie farbenia grafov

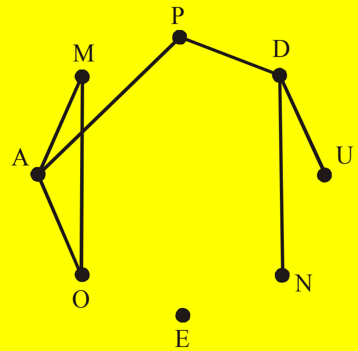
Príklad: ***Rozvrh*** - Ako môžu byť rozvrhnuté skúšky na univerzite, aby žiaden študent nemal naplánované dve skúšky zaraz?

Riešenie: Vrcholy budú reprezentovať kurzy, hrana bude spájať vrcholy vtedy, keď existuje študent, ktorý ide na obidve skúšky. Každé časové priradenie skúške je reprezentované rozdielnou farbou. Rozvrh skúšok potom odpovedá ofarbeniu odpovedajúceho grafu.

Navrhnite rozvrh pre skúšky z predmetov Analýza algoritmov (A), Modelovanie a simulácia (M), Počítačová grafika (P), Databázy (D), Umelá inteligencia (U), Neurónové siete (N), Evolučné algoritmy (E), Operačné systémy (O), keď žiadni študenti nemajú zaraz zapísanú Analýza algoritmov a Operačné systémy, nemajú zaraz zapísanú Modelovanie a simulácia a Operačné systémy, nemajú zaraz zapísanú Databázy a Umelá inteligencia, nemajú zaraz zapísanú Databázy a Neurónové siete, nemajú zaraz zapísanú Analýza algoritmov a Modelovanie a simulácia, nemajú zaraz zapísanú Analýza algoritmov a Počítačová grafika, nemajú zaraz zapísanú Počítačová grafika a Databázy, ale existujú študenti, ktorí majú zapísané všetky ostatné možné kombinácie.

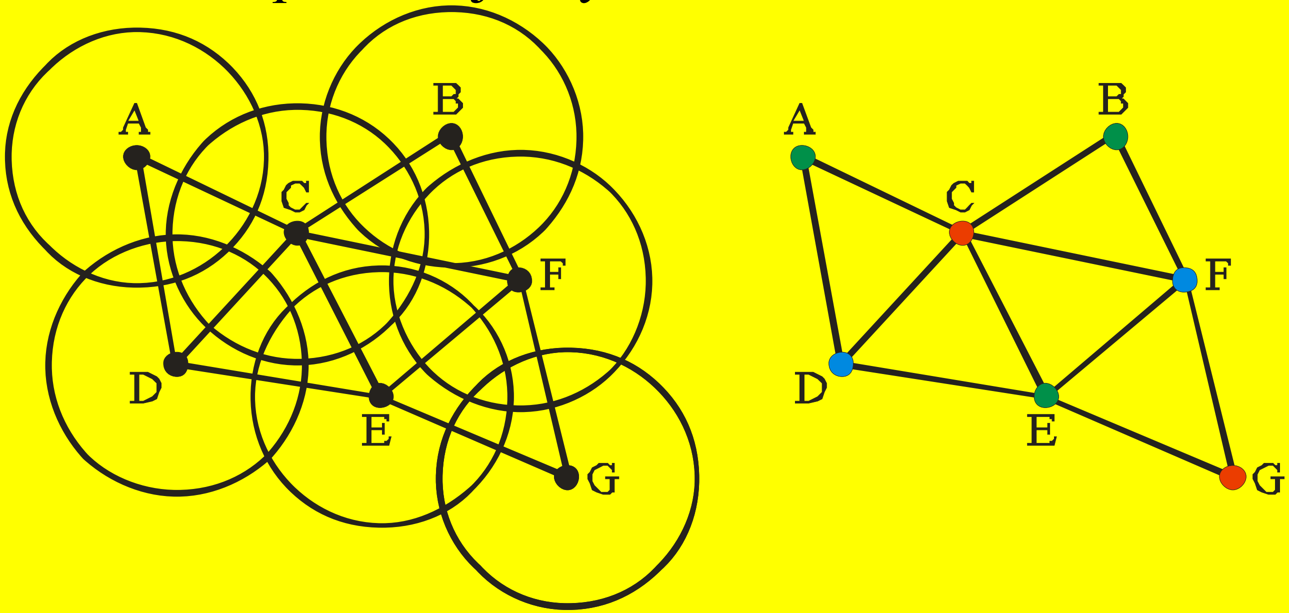
***Rozvrh* - Riešenie**:

Uvažujme graf reprezentujúci daný problém. Vrcholy reprezentujú 8 predmetov a sú spojené hranou, keď existujú študenti idúci na obidva predmety. Existujú teda hrany medzi všetkými okrem siedmich vymenovaných dvojíc. Je oveľa ľahšie nakresliť komplement grafu zobrazujúci iba hrany pre vymenované dvojice.



Chceme nájsť chromatické číslo grafu, ktorého komplement sme nakreslili, farby budú časové periódy pre skúšky. Pretože PUNEO tvoria K_5, chromatické číslo je najmenej 5. Aby sme ukázali, že je práve 5, stačí ofarbiť ostávajúce 3 vrcholy. D môže mať rovnakú farbu ako U, a A a M môžu mať rovnakú farbu ako O. Preto je 5 časových periód (farieb) postačujúcich.

Príklad: ***Priradenie frekvencií*** **-** Televizné kanály sú priradené staniciam tak, že žiadne dve stanice vzdialené do 100 km nemôžu používať rovnaký kanál. Ako priradenie kanálov riešiť farbením grafov?
Riešenie: Každému vysielaču bude priradený vrchol. Dva vrcholy sú spojené, keď sú menej ako 100 km vzdialené. Priradenie kanálov odpovedá zafarbení grafu, kde každá farba reprezentuje iný kanál.



Dosah vysielačov A,B,C,D,E,F,G je znázornený kruhmi, možnosť interferencie spojením vysielačov hranami, a ako je na grafe napravo, na vysielanie bez interferencie stačí 3 frekvencie reprezentované farbami.

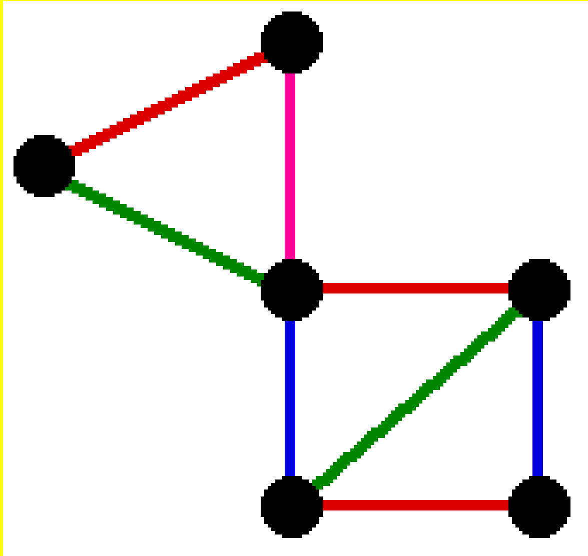
Príklad: ***Indexový register*** – V efektívnych kompilátoroch je výpočet v cyklu zrýchlený, pokiaľ sú použité premenné ukladané dočasne v indexových registroch v CPU namiesto regulárnej pamäti. Koľko indexových registrov je potrebných pre danú slučku?
Riešenie: Každý vrchol grafu bude reprezentovať premennú v slučke. Hrana medzi dvoma vrcholmi existuje, keď im odpovedajúce premenné musia byť uložené v indexovom registri v rovnakom čase výpočtu. Potom chromatické číslo grafu dáva počet potrebných registrov.

V slučke počítačového programu sa objavuje 7 premenných. Premenné a kroky, v priebehu ktorých musia byť uložené sú:

t kroky 1-6
u krok 2
v kroky 2-4
w kroky 1,3 a 5
x kroky 1 a 6
y kroky 3-6
z kroky 4-5

Riešenie: Tento problém môže byť modelovaný pomocou prienikového grafu množín krokov, v priebehu ktorých musia byť jednotlivé premenné uchovávané. Tento graf má 7 vrcholov, od t po z. Hrana medzi dvoma vrcholmi existuje, pokiaľ obidve im odpovedajúce premenné musia byť uschovávané v priebehu niektorého spoločného kroku. Odpoveďou na problém je chromatické číslo takého grafu. Skôr ako by sme analyzovali tento graf, zoberieme si jeho komplement, ktorý má oveľa menej hrán. Tu sú dva vrcholy spojené v prípade, keď im odpovedajúce množiny krokov nemajú spoločný prienik. Jediné také hrany sú $\{u,w\}$, $\{u,x\}$, $\{u,y\}$,$\{u,z\}$,$\{v,x\}$,$\{x,z\}$. Žiadna z hrán v komplemente nespája žiadnu dvojicu z množiny $\{t,v,w,y,z\}$, takže tieto vrcholy tvoria K_5 v pôvodnom grafe. Aby sme ukázali, že je práve 5, stačí ofarbiť vrchol u rovnakou farbou ako w, a x rovnako ako z (tieto páry sú spojené v komplementu hranou). Pretože chromatické číslo je 5, potrebujeme 5 registrov, s premennými u a w zdieľajúcimi register, rovnako ako x so z.

Okrem vrcholového zafarbenia grafov existuje aj hranové zafarbenie, kedy hrany, ktoré sú incidentné s rovnakými vrcholmi, musia mať rôzne farby



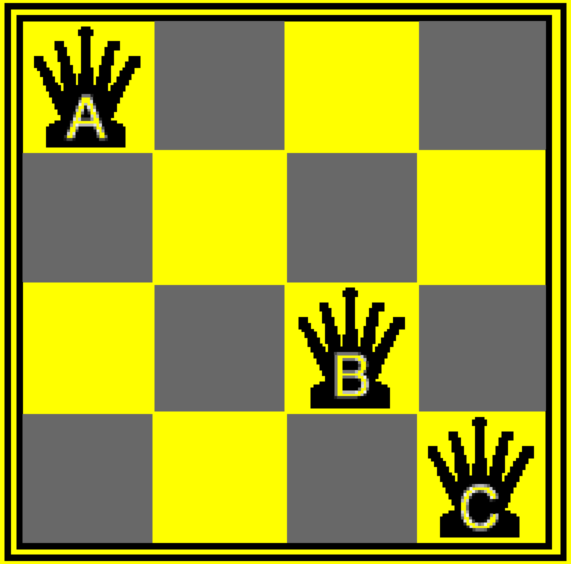
Hranové zafarbenie grafu.

Hranové chromatické číslo je najmenší počet farieb, ktorý môže byť použitý v hranovom zafarbení grafu.

Shannon (zakladateľ teórie informácie a informatiky): Majme elektrické zariadenia, v ktorom sú určité miesta prepojené drôtmi. Aby sme drôty vychádzajúce z určitého miesta rozlíšili, použijeme drôty rozličných farieb. Aký najmenší počet farieb na to potrebujeme?

Vizingov teorém, r. 1964: Keď *G je konečný graf bez slučiek, ktorého najväčší stupeň vrcholu je r, potom* $r \le \chi_{hranová}(G) \le r+1$.

Minimálna dominujúca vrcholová množina (minimum dominating set):
Všetky ostatné vrcholy sú spojené hranou aspoň s jedným vrcholom dominujúcej množiny
Dva vrcholy grafu reprezentujúceho šachovnicu sú spojené hranou, keď dáma umiestnená na štvorci odpovedajúcemu jednému z vrcholov ohrozuje štvorec reprezentovaný druhým vrcholom. Úloha nájsť minimálnu dominujúcu množinu je úloha: **Nájdite minimálny počet dám dominujúcich $n\times n$ šachovnicu**



Číslo vrcholovej nezávislosti grafu je maximálny počet vrcholov v nezávislej množine vrcholov grafu. Množina vrcholov v grafe sa volá nezávislá, keď nie sú žiadne dva vrcholy z tejto množiny spojené hranou.

Číslo vrcholovej nezávislosti môžme riešiť na príklade:
Koľko dám možno umiestniť na šachovnicu, aby žiadna neohrozovala nijakú ďalšiu?