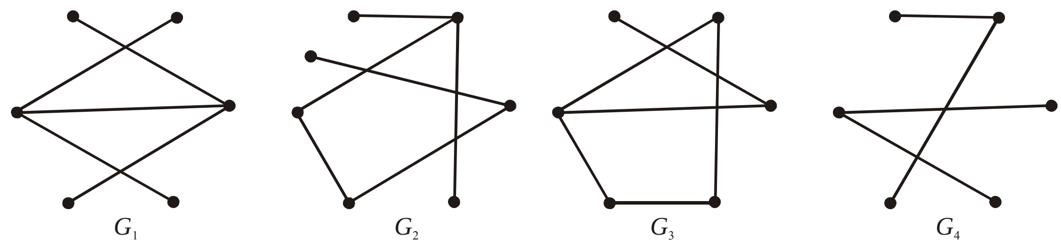
Cvičenie:

12.1. Ktoré z nasledujúcich grafov na obr. 12.C1 nie sú stromy a prečo?

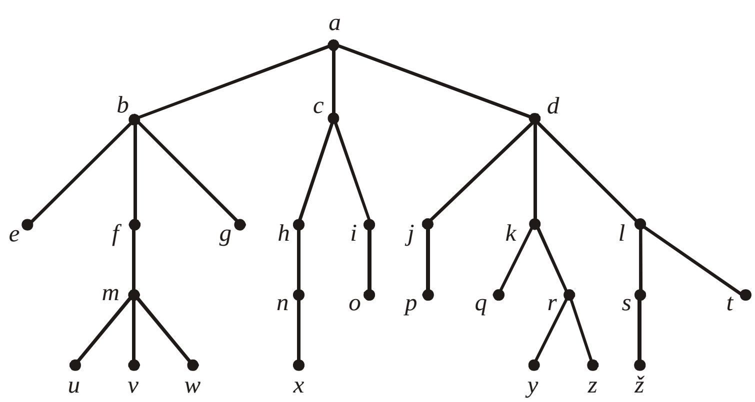


Obrázok 12.C1. Ktoré sú stromy?

Riešenie: Grafy G_1 a G_2 sú stromy, neobsahujú cyklus a sú súvislé, graf G_3 nie je strom, obsahuje cyklus, graf G_4 nie je strom, nie je súvislý.

12.2. Odpovedzte pre graf na obr. 12.C2 nasledujúce dotazy:

a) Ktorý z vrcholov je koreň?
b) Ktoré vrcholy sú vnútorné?
c) Ktoré vrcholy sú listy?
d) Ktoré vrcholy sú nasledovníci (synovia) vrcholu *k*?
e) Ktoré vrcholy sú rodičia vrcholu *k*?
f) Ktoré vrcholy sú predkovia *k*?
g) Ktoré vrcholy sú potomkovia vrcholu *k*?

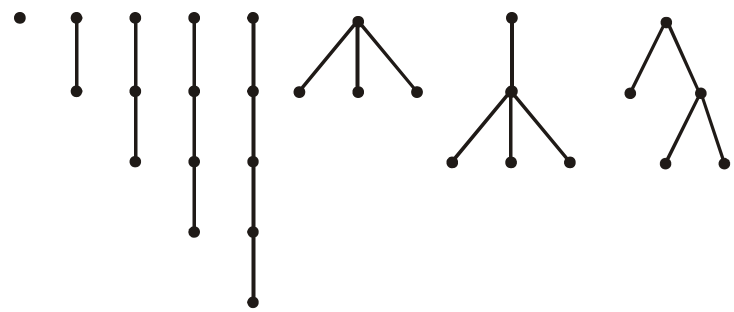


Obrázok 12.C2. Koreňový strom.

Riešenie:

a) Koreň je *a*.
b) Vnútorné vrcholy sú $\{a,b,c,d,f,h,i,j,k,l,m,n,r,s\}$.
c) Listy sú $\{e,u,v,w,g,x,o,p,q,y,z,ž,t\}$.
d) Nasledovníci vrcholu *k* sú vrcholy *q* a *r*.
e) Rodič vrcholu *k* je *d*.
f) Predkovia vrcholu *k* sú vrcholy *d* a *a*.
g) Potomkovia vrcholu *k* sú vrcholy *q*, *r*, *y*, *z*.

12.3. Koľko neizomorfných podstromov do 5 vrcholov obsahuje graf na obr. 12.C2?
Riešenie: 8, všetky stromy, ktoré do 5 vrcholov existujú.



12.4. Majme n prirodzených čísel $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$, kde $n \geq 2$. Nutná a postačujúca podmienka, aby existoval strom na n uzloch taký, že $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$, sú po poriadku stupne jeho vrcholov, je

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 2n-2$$

Dokážte.

Riešenie: Keď existuje strom so stupňami $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$, potom z vzorca (10.1) určujúceho $\sum_{i=1}^{n} s_i = 2|E|$, a zo vzorca pre stromy vety 12.2 $|E|=|V| - 1$ vychádza vzorec, ktorý máme dokázať.
V opačnom prípade, keď platí dokazovaný vzorec, postupujeme matematickou indukciou, aby sme dokázali, že existuje strom so stupňami $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$. Pre $n=2$ je $s_1=s_2=1$ a strom existuje. Nech $n>2$ a predpokladáme existenciu stromu pre každú (n-1)ticu čísel s_i, ktoré spĺňajú dokazovaný vzorec. Keď zvolíme n čísel s_i, ktoré spĺňajú dokazovaný vzorec, je vidno, že aspoň dve z nich (povedzme s_1, s_2) sa rovnajú 1 a aspoň jedno ďalšie (povedzme s_3) je väčšie ako 1. Čísla $s_2, s_3-1, s_4, ..., s_n$ spĺňajú indukčný predpoklad a existuje teda strom o n-1 vrcholoch s príslušnými stupňami. Označme v ňom x vrchol (s_3-1)ého stupňa a nech y je ďalší vrchol nepatriaci do uvedeného stromu o n-1 vrcholoch. Teraz doplníme tento strom vrcholom y a hranou xy.

12.5. Nech G je jednoduchý graf o n vrcholoch. Ukážte, že G je strom vtedy a len vtedy, keď je súvislý a má $n-1$ hrán.
Riešenie: Dokážeme toto tvrdenie indukciou pre n, počet vrcholov grafu G. Keď $n=1$, ide o izolovaný vrchol, ktorý je formálne strom, je súvislý a má 1-1=0 hrán. Tvrdenie je teda pravdivé. Teraz predpokladajme, že tvrdenie je pravdivé pre obyčajné grafy o n vrcholoch, a nech G je obyčajný graf o n+1 vrcholoch.

Po prvé predpokladajme, že G je strom; musíme ukázať že G je súvislý a že má (n+1)-1=n hrán. Samozrejme, G je súvislý podľa definície. Aby sme dokázali, že G má požadovaný počet hrán, potrebujeme nasledujúcu skutočnosť: strom s aspoň jednou hranou musí obsahovať vrchol stupňa 1. (Aby sme to ukázali, stačí si zobrať najdlhšiu jednoduchú cestu. Nejaká cesta maximálnej dĺžky musí v konečnom grafe existovať. Konce tejto cesty musia byť v strome vrcholy stupňa 1, pretože inak by táto cesta mohla byť predlžená.) Nech v je vrchol stupňa 1 v G, a nech G' je G s v a s ním incidentnou hranou odstránený. Nový graf G' je stále strom, nemá žiadne kružnice (graf G nemal žiadne) a je stále súvislý (odstránená hrana nie je potrebná na vytvorenie cesty medzi vrcholmi rozdielnymi od v). Preto podľa indukčnej hypotézy, G', ktorý má n vrcholov, má n-1 hrán; keďže G má o hranu viac ako G', má teda n hrán.

Z druhej strany, predpokladajme, že G je súvislý a má n hrán a (n+1) vrcholov. Keď G nie je strom, potom musí obsahovať kružnicu. Keď z tejto kružnice odstránime jednu hranu, výsledný graf G' bude stále súvislý. Keď je G' strom, potom s odstraňovaním hrán končíme; v opačnom prípade proces opakujeme. Pretože G má konečný počet hrán, tento proces musí skončiť pre nejaký strom o n+1 vrcholoch (strom má rovnaký počet vrcholov ako pôvodný graf G). Podľa predchádzajúceho odseku má tento strom n hrán. To je ale v protiklade s tým, že sme odstránili najmenej jednu hranu. Preto náš predpoklad, že G nie je strom je zlý. ■

12.6. Predpokladajme, že 1024 ľudí sa účastní šachového turnaja. Použite koreňový strom ako model turnaja na určenie, koľko hier musí byť odohraných, aby sa určil víťaz, pokiaľ je hráč eliminovaný po jednej prehre a turnaj pokračuje, dokiaľ iba jeden účastník neprehral. Predpokladáme, že nebudú žiadne remízy.

Riešenie: Turnaj môžeme modelovať ako úplný binárny strom. Každý vnútorný vrchol reprezentuje výhercu hry hranej jeho dvoma deťmi. Máme 1024 listov, jeden pre každého hráča. Koreň je víťaz turnaja. Podľa vety 12.3, pre m=2 a l=1024, $n=i+l=m\times i+1$; z toho dostávame $i=(l-1)/(m-1)=1023$. Preto musí byť odohraných presne 1023 hier na určenie víťaza.

12.7. Reťazový list začína človekom posielajúcim list desiatim ďalším ľuďom. Každý príjemca je požiadaný, aby poslal list ďalším desiatim, a každý list obsahuje zoznam predchádzajúcich šiestich ľudí v reťazci. Pokiaľ zoznam neobsahuje menej ako šesť mien, každý príjemca pošle dvadsať korún prvému človeku v zozname, odstráni jeho meno zo zoznamu, a pridá svoje vlastné meno na koniec zoznamu. Keď všetci takto odpovedia na list a nikto nedostane viac ako jeden list, koľko peňazí človek zapojený do reťazca nakoniec dostane?

Riešenie: Nech P je človek rozposielajúci list. Potom 10 ľudí dostane jeho list na konci zoznamu (na 6. pozícii). Potom 100 ľudí dostane list s jeho menom na piatej pozícii, atď., až 1 000 000 ľudí dostane list s menom P na prvej pozícii. Preto by P mal dostať 20 000 000. Model je tu úplný strom s vetvením stupňa 10.

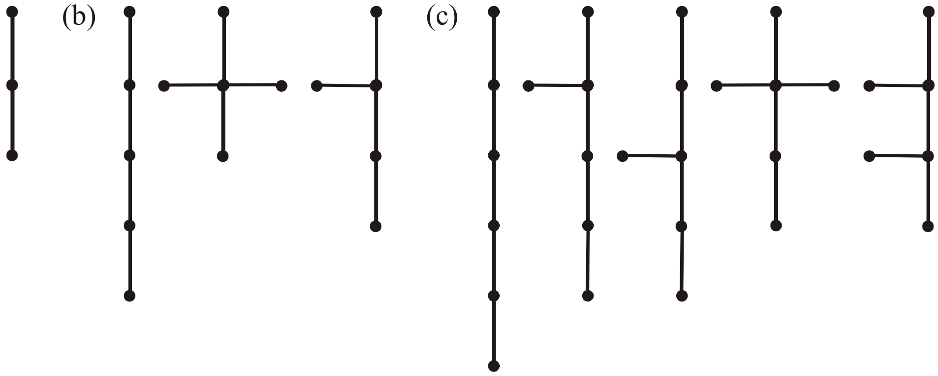
12.8. Koľko rôznych izomérov majú nasledujúce nasýtené uhľovodíky?

(a) C_3H_8

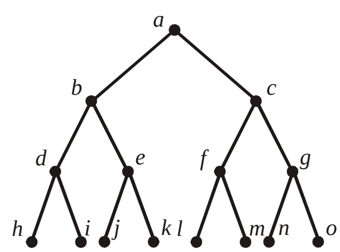
(b) C_5H_{12}

(c) C_6H_{14}

Riešenie: Z definície alkánov (nasýtených uhľovodíkov) vyplýva, že alkány majú štruktúru stromov. Stačí si všímať iba stromy z uhlíkových atómov týchto uhľovodíkov, hrany s vodíkovými atómami stupňa vrcholov 1 potom iba automaticky dopĺňajú počet incidentných hrán s každým uhlíkovým atómom stupeň 4. Ak chceme teda spočítať alkány s daným počtom n atómov uhlíka, stačí spočítať všetky typy stromov s n vrcholmi, v ktorých sa nevyskytujú vrcholy stupňa väčšieho ako 4. Pre prípad (a) je to iba jeden graf, pre prípad (b) 3 a pre (c) 5, ako je vidno na nasledujúcom obrázku.



12.9. Ukážte, ako môže byť 16 čísel sčítaných pomocou 15 procesorov v priebehu 4 časových krokov potrebných na sčítanie dvojice čísel (vstup a prenos informácie neuvažujeme za časovo náročné kroky a ich čas zanedbávame v porovnaní so sčítaním).
Riešenie: Vytvoríme kompletný binárny strom o 15 vrcholoch, ktorý reprezentuje sieť so stromovou štruktúrou o 15 procesoroch. V prvom kroku sčítame prvých 8 dvojíc čísel v procesoroch $h,...,o$. V druhom časovom okamihu sčítame výsledky týchto súčtov v procesoroch d, ...,g, v treťom časovom okamihu sú to súčty výsledkov procesorov d a e v b a f a g v c, a v poslednom štvrtom časovom okamihu sčítame výsledky z b,c v a.



12.10. Nech n je mocnina dvoch. Ukážte, že n čísel môže byť sčítané v $\log_2 n$ krokoch za použitia siete so stromovou štruktúrou o n -1 procesoroch.
Riešenie: Predpokladajme, že $n=2^k$, kde k je kladné celé číslo. Chceme ukázať ako sčítať n čísel za $\log_2 n$ krokov za použitia siete so stromovou štruktúrou o n-1 procesoroch. Dokážme to matematickou indukciou na k. Keď k=1, potom n=2 a n-1=1 a v $\log_2 2=1$ kroku dokážeme sčítať 2 čísla jedným procesorom. Predpokladajme ako induktívnu hypotézu, že môžeme sčítať $n=2^k$ v $\log_2 n$ krokoch za použitia siete so stromovou štruktúrou o n-1 procesoroch. Predpokladajme teraz, že máme $2n=2^{k+1}$ čísel na sčítanie, x_1, x_2, ..., x_{2n}. Sieť so stromovou štruktúrou o $2n$-1 procesoroch spočíva zo siete so stromovou štruktúrou o n-1 procesoroch spolu s dvoma novými procesormi ako deťmi každého listu v (n-1)-procesorovej sieti. V jednom kroku môžeme použiť listy rozšírenej siete pre sčítanie x_1+x_2, x_3+x_4, $x_{2n-1}+x_{2n}$. To nám dáva n čísel. Podľa induktívnej hypotézy teraz môžeme použiť zvyšok siete na sčítanie týchto čísel v $\log_2 n$ krokoch. Dovedna sme použili 1+ $\log_2 n$ krokov, a, ako sme potrebovali ukázať $\log_2(2n)=\log_2 2+\log_2 n=1+\log_2 n$. ■

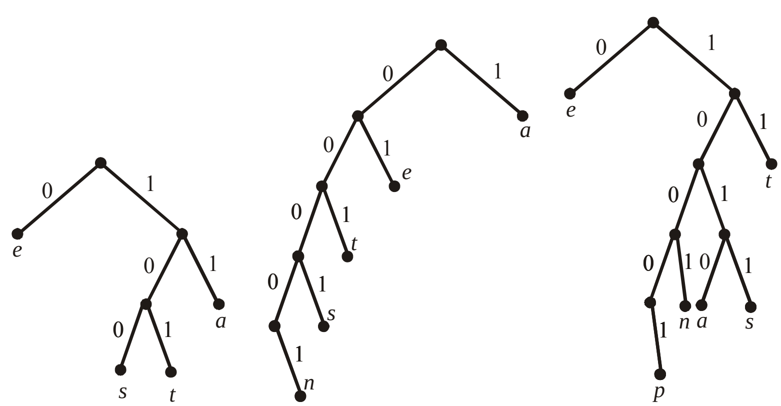
12.11. Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie ľahšej falošnej mince spomedzi štyroch mincí? Popíšte algoritmus na nájdenie tejto ľahšej mince za použitia tohto počtu vážení.
Riešenie: Mince rozdelíme na dve dvojice a tie porovnáme, zoberieme ľahšiu dvojicu a tu porovnáme. Potrebujeme teda dve porovnania.

12.12. Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie falošnej mince spomedzi štyroch mincí, ktorá môže byť ľahšia alebo ťažšia ako ostatné tri?
Riešenie: Pretože sú 4 rôzne výsledky na túto testovaciu procedúru, potrebujeme aspoň dve váženia, pretože jedno váženie nám môže dať iba 3 možné výsledky (ternárny rozhodovací strom výšky 1 má iba 3 listy). Označme si mince písmenami A,B,C,D. Porovnáme mince A a B. Pokiaľ sú v rovnováhe, falošná minca je medzi druhými dvoma. V tom prípade, porovnajte C s A, pokiaľ sú v rovnováhe, D je falošná minca, keď nie, C je falošná. Na druhej strane, keď A a B nie sú v rovnováhe, jedna z nich je falošná. Opäť porovnajte C s A. Keď sú v rovnováhe, B je falošná, v opačnom prípade je A falošná.

12.13. Koľko vážení na rovnoramenných váhach je potrebné na nájdenie spomedzi 12 mincí falošnej mince, ktorá je ľahšia ako ostatné?
Riešenie: Pretože existuje 12 rozdielnych výsledkov testovacej procedúry, potrebujeme aspoň 3 váženia, pretože 2 váženia by nám dali 9 možných výsledkov (rozhodovací strom hĺbky 2 má iba 9 listov). Rozdeľte mince na 3 skupiny po 4 minciach, a porovnajte dve skupiny. Keď sú vyvážené, falošná minca je medzi ostatnými štyrmi mincami. Keď nie sú v rovnováhe, falošná minca je medzi ľahšou štvoricou. Teraz môžeme využiť cvičenie 12.11, pomocou dvoch ďalších vážení určíme falošnú mincu.

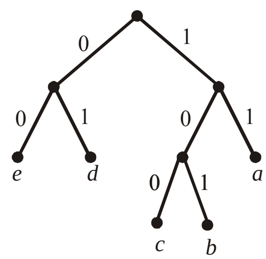
12.14. Ktorý z nasledujúcich kódov je prefixový kód?
(a) a: 11, e: 00, t: 10, s: 01
(b) a: 0, e: 1, t: 01, s: 001
(c) a: 101, e: 11, t: 001, s: 011, n: 010
(d) a: 010, e: 11, t: 011, s: 1011, n: 1001, p: 10101
Riešenie:
(a) Je prefixový kód, žiaden z kódov nie je začiatkom iného kódu
(b) Nie je prefixový kód, napríklad kód pre a je začiatkom kódu pre s
(c) Je prefixový kód, žiaden z kódov nie je začiatkom iného
(d) Je prefixový kód, žiaden z kódov nie je začiatkom iného kódu

12.15. Skonštruujte binárny strom s prefixovými kódmi reprezentujúcimi tieto kódové schémy:
(a) a: 11, e: 0, t: 101, s: 100
(b) a: 1, e: 01, t: 001, s: 0001, n: 00001
(c) a: 1010, e: 0, t: 11, s: 1011, n: 1001, p: 10001
Riešenie:



12.16. Skonštruujte Huffmanove kódovanie pre nasledujúce symboly s frekvenciami: a: 0.2, b: 0.1, c: 0.15, d: 0.25, e: 0.3

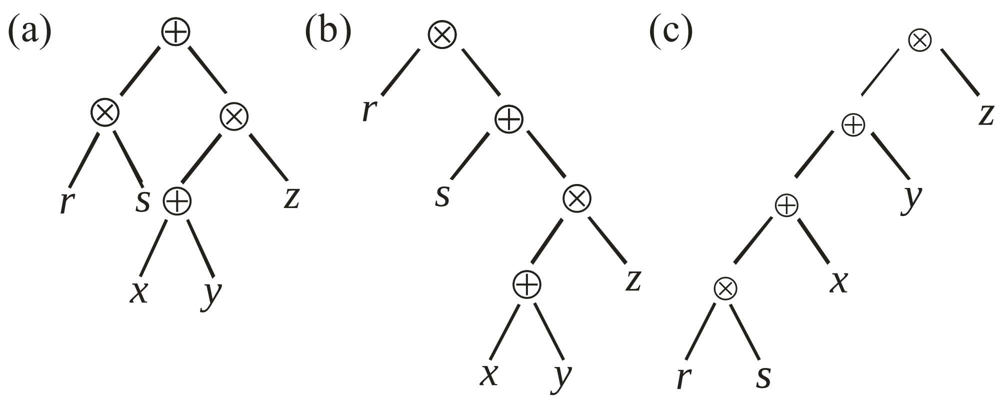
Riadime sa algoritmom pre Huffmanove kódovanie. Pretože b a c sú symboly s najmenšou váhou, skombinujeme ich do podstromu, ktorý budeme tu volať T1, s váhou 0.1 + 0.15=0.25, so symbolom s väčšou váhou naľavo. Teraz dva stromy o najmenšej váhe sú samostatný symbol a a buď T1 alebo samostatný symbol d, oba o váhe 0.25. Náhodne si zvolíme T1, a dostávame tak strom T2 s ľavým podstromom T1 a pravým podstromom a (mohli sme zvoliť aj druhú možnosť, výsledkom by bol odlišný, no rovnako kvalitný strom v ohľade priemerného počtu bitov na zakódovanie). Ďalším krokom je kombinácia e a d do podstromu T3 o váhe 0.55. Konečným krokom je kombinácia T2 a T3.
Riešenie:



12.17. Reprezentujte nasledujúce výrazy ako binárne stromy

(a) $(r\otimes s)\oplus((x\oplus y)\otimes z)$
(b) $r\otimes(s\oplus((x\oplus y)\otimes z))$
(c) $(((r\otimes s)\oplus x)\oplus y)\otimes z$

Riešenie:



12.18. Koľko rozdielnych možných interpretácií má každý z nasledujúcich výrazov, keď predpokladáme asociatívnosť operácie $\otimes$ a keď ju nepredpokladáme?

(a) $x\otimes y\otimes z$
(b) $t\oplus x\otimes y\otimes z$
(c) $t\otimes x\oplus y\otimes z$

Riešenie:

keď predpokladáme asociatívnosť operácie $\otimes$

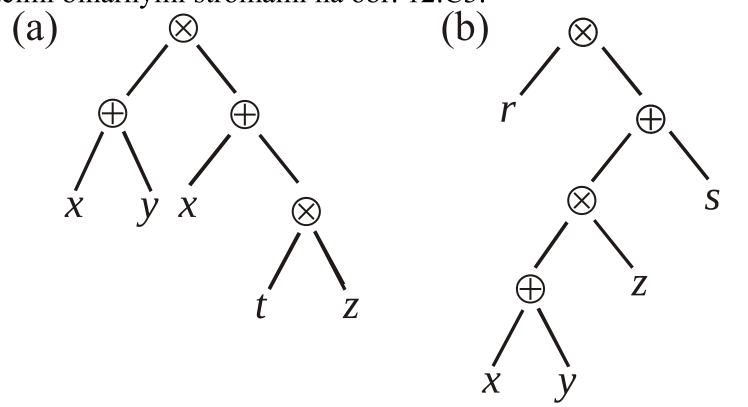
(a) 1 interpretácia, $x\otimes y\otimes z$
(b) 3 interpretácie, $(t\oplus x)\otimes y\otimes z$, $t\oplus(x\otimes y\otimes z)$, $(t\oplus(x\otimes y))\otimes z$
(c) 4 interpretácie, $(t\otimes x)\oplus(y\otimes z)$, $((t\otimes x)\oplus y)\otimes z$, $(t\otimes(x\oplus y))\otimes z$, $t\otimes(x\oplus(y\otimes z))$

keď nepredpokladáme asociatívnosť operácie $\otimes$

(a) 2 interpretácie, $(x\otimes y)\otimes z$, $x\otimes (y\otimes z)$
(b) 5 interpretácií, $(t\oplus x)\otimes(y\otimes z)$, $t\oplus((x\otimes y)\otimes z)$, $t\oplus(x\otimes(y\otimes z))$, $(t\oplus(x\otimes y))\otimes z$, $((t\oplus x)\otimes y)\otimes z$

(c) 5 interpretácií, $(t\otimes x)\oplus(y\otimes z)$, $((t\otimes x)\oplus y)\otimes z$, $(t\otimes(x\oplus y))\otimes z$, $t\otimes(x\oplus(y\otimes z))$, $t\otimes((x\oplus y)\otimes z)$

12.19. Zostrojte infixovú, prefixovú a postfixovú formu výrazov reprezentovaných nasledujúcimi binárnymi stromami na obr. 12.C3.



Obrázok 12.C3. Zostrojte infixovú, prefixovú a postfixovú formu stromov

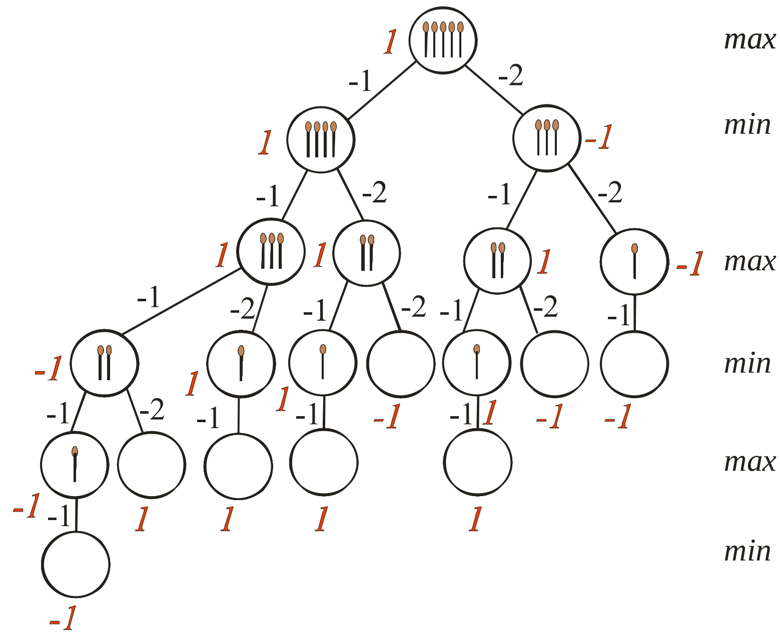
Riešenie:

(a) Infix $(x\oplus y)\otimes(x\oplus(t\otimes z))$, prefix $\otimes\oplus\, xy\oplus\, x\otimes\, tz$, postfix $xy\oplus\, xtz\otimes\oplus\otimes$

(b) Infix $r\otimes(((x\oplus y)\otimes z)\oplus s)$, prefix $\otimes r\, \oplus\otimes\oplus xyzs$, postfix $rxy\oplus\, z\otimes s\oplus\otimes$

12.20. Zostrojte strom riešení pre hru odoberania zápaliek, kedy máte na začiatku hry 5 zápaliek, každý hráč môže odobrať alebo jednu, alebo 2 zápalky, a kto odoberie poslednú zápalku, tak prehral. Vrcholy z jednotlivých vrstiev stromu ohodnoťte pomocou minimax princípu.

Riešenie: Na obrázku sú vrcholy s počtom zápaliek na hromádke, jednotka označená kurzívou znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 1. hráč (voliaci stratégiu max, teda vyberajúci pre seba ako ideálnu stratégiu maximálne ohodnotený zo svojich podstromov), –1 označená kurzívou znamená, že ide o podstrom, kde vyhráva 2. hráč (min). Ohodnotenia hrán –1 a –2 znamenajú odobratie jednej alebo dvoch zápaliek hráčom. Z ohodnotenia koreňa je zrejmé, že pre prvého hráča existuje víťazná stratégia. Existuje aj trocha zložitejšia populárnejšia verzia tejto hry, volaná **nim**, kde sú zápalky na niekoľkých hromádkach a hráč môže odobrať 1 alebo 2 iba z jednej z hromádok.


max
min
max
min
max
min
-1
-2
1
-1