Prvá kontrolná písomkla z ADM konaná dňa 29. 10. 2014

Príklad 1 Dokážte vetu „ak $3n$+2 je nepárne číslo, potom aj n je nepárne číslo“.

Príklad 2 Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:
(a) $0 \in \emptyset$
(b) $\emptyset \in \{0\}$
(c) $\{0\} \subset \emptyset$
(d) $\emptyset \subset \{0\}$

Príklad 3. Pre každú z týchto relácií nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
(b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(c) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$
(c) $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$

Príklad 4. Nájdite koeficient $x^8 y^9$ v rozvoji $(3x+2y)^{17}$.

Príklad 5. Pre každý uvedený prípad, rozhodnite, či symbol $x * y$ špecifikuje binárnu operáciu na množine A. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

(a) $x * y = x - y,\ A = \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$
(b) $x * y = x + y$, pre $A = \mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
(c) $x * y = x^y,\ A = \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$
(d) $x * y = \dfrac{x}{y},\ A = \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

Poznamka: cas na pisanie je 45 minut, ak priklad obsahuje podpriklady, tak kazdy podpriklad je hodnoteny 1 bodom.

RIEŠENIE

Príklad 1 Dokážte vetu „ak 3*n*+2 je nepárne číslo, potom aj *n* je nepárne číslo“.
Vetu upravíme do tvaru implikácie

$$\underbrace{\left(3n+2\ \ je\ nepárne\ číslo\right)}_{p}\Rightarrow\underbrace{\left(n\ \ je\ nepárne\ číslo\right)}_{q}$$

Budeme dokazovať inverznú implikáciu

$$\underbrace{\left(n\ \ je\ \ párne\ číslo\right)}_{\neg q}\Rightarrow\underbrace{\left(3n+2\ \ je\ \ párne\ číslo\right)}_{\neg p}$$

Nech *n* je párne číslo, potom existuje také nezáporné celé číslo *k*, že *n* = 2*k*. Pre takto špecifikované číslo *n* dostaneme $3n+2=3(2k)+2=2(3k+1)$, ktoré je párne. Týmto sme dokázali inverznú implikáciu $\neg q\Rightarrow\neg p$, čiže musí platiť aj „pôvodná“ implikácia $p\Rightarrow q$.

Príklad 2 Rozhodnite, či výroky sú pravdivé alebo nepravdivé:
(a) $0\in\emptyset$, nepravdivý
(b) $\emptyset\in\{0\}$, nepravdivý
(c) $\{0\}\subset\emptyset$, nepravdivý
(d) $\emptyset\subset\{0\}$, pravdivý

Príklad 3. Pre každú z týchto relácií nad množinou $\{1,2,3,4\}$ zistite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, alebo tranzitívna.

(a) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$,
nie je reflexívna, $(1,1)\notin R$
nie je symetrická, $(2,4)\in R\Rightarrow(4,2)\notin R$
nie je antisymetrická, pretože obsahuje (2,3) a (3,2)
je tranzitívna

(b) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
je reflexívna: $\forall x\left((x,x)\in R\right)$
je symetrická
nie je antisymetrická, pretože obsahuje (1,2)$\in R$ (2,1)$\in R$
je tranzitívna

(c) $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$
$\emptyset$

(d) $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$
nie je reflexívna: $(1,1)\notin R$
nie je symetrická, $(1,2)\in R$ a $(2,1)\notin R$
je antisymetrická
nie je tranzitívna, $(1,2)\in R$, $(2,3)\in R$ ale $(1,3)\notin R$

Príklad 4. Nájdite koeficient x^8y^9 v rozvoji $(3x+2y)^{17}$.

$$(3x+2y)^{17}=\sum_{i=0}^{17}\binom{17}{i}(3x)^{17-i}(2y)^i=\ldots+\binom{17}{9}(3x)^8(2y)^9+\ldots=\ldots+\binom{17}{9}3^8 2^9\left(x^8y^9\right)+\ldots$$

Potom, hľadaný koeficient stojací pri x^8y^9 má tvar

$$\binom{17}{9}3^8 2^9=81662929920$$

Príklad 5. Pre každý uvedený prípad, rozhodnite, či symbol $x*y$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

Binárna operácia „súčin“ je definovaná podmienkou

$$\forall(x\in A)\forall(y\in A)\exists!(z\in A)(z=x*y)$$

(a) $x*y=x-y$, $A=\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. Nie je binárna operácia, pretože pre $x,y\in A$ výsledok binárnej operácie $x*y\notin A$ (napr. pre x < y dostaneme záporné $z = x - y$), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do *A*.

(b) $x*y=x+y$, pre $A=\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Je binárna operácia . Takto definovaná binárna operácia vyhovuje podmienke, že výsledok musí patriť do *A*.

(c) $x*y=x^y$, $A=\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. Je binárna operácia, $x*y=x^y\in A$

(e) $x*y=\dfrac{x}{y}$, $A=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$. Nie je binárna operácia, pre delenie nulou.