Opravná písomná skúška z predmetu „Algebra a diskrétna matematika“ konaná dňa 5. 2. 2015

1. príklad. Dokážte, že kvadráty celých čísel sú reprezentované dekadickými číslicami, ktoré končia 0, 1, 4, 5, 6, alebo 9..

2. príklad. Rozhodnite za akých **(čo najširšie definovaných, teda zhŕňajúcich najviac prípadov)** podmienok platí
(1) $A-B=A$
(2) $A\cup B=A$
(3) $A\cup B=\emptyset$
(4) $A-B=B-A$

3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{\emptyset,a\}$.

4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ a $Q=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ sú relácie nad $Y=\{1,2,3,4\}$. Zostrojte kompozície $P\circ Q$, $Q\circ P$.

5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x-y$, $A=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.

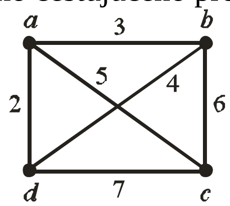
7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej *x* platia nasledujúce podmienky
(a) $\overline{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{1}$, (b) $\overline{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$, (c) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$, (d) $\overline{x}+\overline{x}=\mathbf{1}$.

8. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovej funkcii
$wxyz+wxy\overline{z}+\overline{w}xyz+\overline{w}xy\overline{z}$,

9. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$

10. príklad. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.

Poznámka: Každý príklad sa hodnotí maximálnym počtom bodov 8, písomka môže byť hodnotená max. 80 bodmi, čas na písomku je 90 minút.

Riešenie

1. príklad. . Dokážte, že kvadráty celých čísel sú reprezentované dekadickými číslicami, ktoré končia 0, 1, 4, 5, 6, alebo 9..

Riešenie:

$(...0)^2 = (...0)$
$(...1)^2 = (...1)$
$(...2)^2 = (...4)$
$(...3)^2 = (...9)$
$(...4)^2 = (...6)$
$(...5)^2 = (...5)$
$(...6)^2 = (...6)$
$(...7)^2 = (...9)$
$(...8)^2 = (...4)$
$(...9)^2 = (...1)$

2. príklad. Rozhodnite za akých **(čo najširšie definovaných, teda zhŕňajúcich najviac prípadov)** podmienok platí

(1) $A-B=A \Rightarrow (A\cap B=\emptyset)$

(2) $A\cup B=A \Rightarrow (B\subseteq A)$, riešenie $(B=\emptyset)$ je iba čiastočné za pol boda

(3) $A\cup B=\emptyset \Rightarrow A=B=\emptyset$

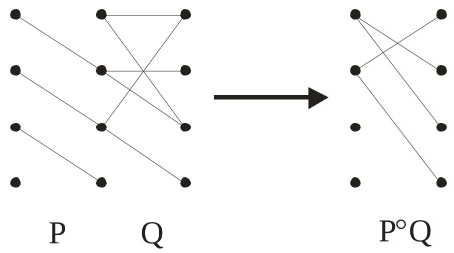
(4) $A-B=B-A \Rightarrow (A=B)$

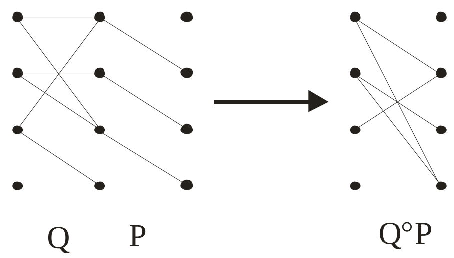
3. príklad. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(A)$ pre $A=\{\emptyset,a\}$.

Riešenie: $A=\left\{\underbrace{\emptyset}_{a},\underbrace{a}_{b}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{a\},\{\emptyset.a\}\}$

4. príklad. $P=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ a $Q=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4)\}\subseteq Y\times Y$ sú binárne relácie nad $Y=\{1,2,3,4\}$. Zostrojte kompozície $P\circ Q$, $Q\circ P$.

Riešenie:





5. príklad. Koľko existuje permutácií nad reťazcom UVWXYZAB, ktoré obsahujú podreťazec WYB?

Riešenie:

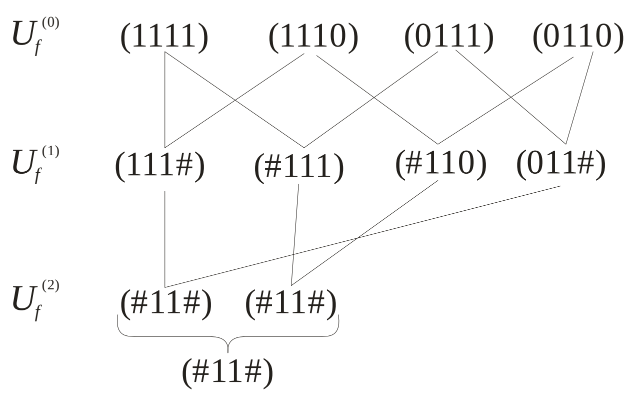
6!=720

6. príklad. Rozhodnite, či symbol * definovaný ako $x*y=x-y$, $A=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ špecifikuje binárnu operáciu na množine *A*. Ak nie, tak vysvetlite prečo.
Riešenie:
Nie je binárna operácia, pretože pre $x,y\in A$ výsledok binárnej operácie $x*y\notin A$ (napr. pre $x < y$ dostaneme záporné $z = x - y$), čo je v protiklade s definíciou binárnej operácie, ktorá požaduje, aby aj jej výsledok patril do *A*.

7. príklad. Pre ktoré hodnoty Boolovej premennej *x* platia nasledujúce podmienky
(a) $\overline{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{1}$
(b) $\overline{x}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$
(c) $x\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}$,
(d) $\overline{x}+\overline{x}=\mathbf{1}$,
Riešenie:
(a) neplatí pre žiadne *x*
(b) neplatí pre žiadne *x*
(c) $x=\mathbf{0}$,
(d) $x=\mathbf{0}$,
(e) platí pre každé *x*

8. príklad.
Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám
$wxyz+wxy\overline{z}+\overline{w}xyz+\overline{w}xy\overline{z}$,

1. etapa		2. etapa			3. etapa		
1	$wxyz$	1	(1,2)	wxy	1	(1,4)	xy
2	$wxy\overline{z}$	2	(1,3)	xyz	2	(2,3)	xy
3	$\overline{w}xyz$	3	(2,4)	$xy\overline{z}$			
4	$\overline{w}xy\overline{z}$	4	(3,4)	$\overline{w}xy$			



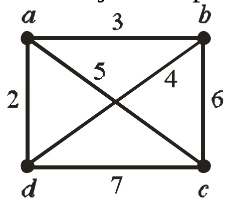
Optimálna Boolova funkcia priradená tejto množine má tvar
$$f(w,x,y,z)=xy$$

9. príklad Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc
$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & = & 6 \\ 2x & -2y & -z & = & -5 \\ 3x & -y & & = & 1 \end{array}$$
Riešenie:

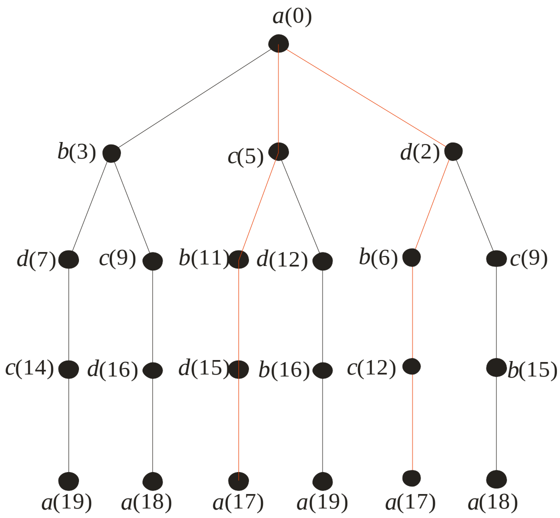
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{-3} & \cancel{-17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array}\right)$$

$$z = t\,,\ -4y - 3z = -17 \Rightarrow y = \frac{17}{4} - \frac{3}{4}t\,,\ x + y + z = 6 \Rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}t\,,\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. príklad. Vyriešte problém obchodného cestujúceho pre graf



pomocou úplného stromu riešení tak, aby celkový súčet váh bol pre uzavretú cestu (hamiltonovskú kružnicu) minimálny.



Minimálna hamiltonovská kružnica je a-d-b-c-a (prípadne reprezentovaná v opačnej orientácii) s dĺžkou 17.