Vladimír Kvasnička

Úvod do logiky pre informatikov

Ústav aplikovanej informatiky
Fakulta informatiky a informačných technológií
Slovenská technická univerzita v Bratislave
2012

Úvod

V tejto knihe, ktorá je venovaná prezentácii moderných základov logiky pre potreby informatikov (menovite pre tých čo rozjímajú nad možnosťami ako simulovať ľudskú myseľ informatickými prostriedkami) sú prezentované základy nielen klasickej logiky (t. j. výrokovej a predikátovej logiky) ale aj základné pojmy modálnej logiky s dôrazom na kripkeovskú sémantickú interpretáciu pomocou susedných svetov.

Centrálne postavenie v našom texte majú sémantické tablá, ktoré považujem za jednoduchý a univerzálny teoretický prostriedok k dôkazu pravdivosti formúl na sémantickej úrovni. Používame dve sémantické tablá: normálne sémantické tablá a duálne sémantické tablá, ktoré majú to výhodu, že k dôkazu tautologičnosti výrokovej logiky stačí dokázať uzavretosť tabla pre danú formulu (v štandardnom prístupe zostrojujeme normálne sémantické tablo pre negovanú formulu, potom uzavretosť table implikuje kontradikčnosť študovanej formuly, čiže tautologičnosť jej negácie). Táto vlastnosť duálnych sémantických tabiel je veľmi výhodná pre priamy dôkaz formuly (nie jej negácie, ako je to u normálneho sémantického tabla) pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá je zostrojená inverziou table. Podobným spôsobom môžeme interpretovať aj metódu rezolučného princípu, podrobnou analýzou sa dá ukázať, že existuje veľmi tesný vzťah medzi pomocou sémantickými tablami a technikou rezolučného princípu.

Skutočnosť, že táto kniha je zameraná hlavne (ale nielen) na informatikov, je najlepšie demonštrovaná obsahom posedných dvoch kapitol (ôsmej a deviatej kapitoly). V ôsmej kapitole je podrobne študovaný prístup McCullocha a Pittsa založený na logických neurónoch, ktorá bola publikovaná v r. 1943 a je v súčasnosti považovanú za prácu, ktorou bol iniciovaný vznik umelej inteligencie a kognitívnej vedy. Hlavným prínosom tejto kapitoly pre informatikov je jednoduchý dôkaz skutočnosti, že tieto jednoduché neurónové siete sú univerzálnym aproximátorom v doméne Boolovych funkcii. Tento prístup taktiež poskytujú vhodný teoretický rámec pre štúdium vzťahu medzi mysľou a mozgom. Jednoduché argumentačné prostriedky ukazujú na skutočnosť, že myseľ a mozog tvoria jeden neseparovateľný celok - komplex, kde aktivity mozgu (proces myslenia) sú výsledkom architektúry neurónovej siete tvoriacej mozog.

V poslednej deviatej kapitole sú študované možnosti výrokovej logiky ako teoretického základu Boolovych funkcií a ich aplikácie na návrh prepínacích logických obvodov. Tieto technické aplikácia výrokovej logiky sú jedinečným ilustračným príkladom skutočnosti, že moderná matematická logika má nezastupiteľnú úlohu pri návrhu a konštrukcii binárnych obvodov pre potreby mikroelektroniky. Je potrebné zdôrazniť, že logika má nezastupiteľné miesto nielen pri algoritmizácii procesov usudzovania, ale aj ako generátor nových koncepcií, ktoré zohrali dôležitú úlohu pri rozvoji počítačovej vedy (informatiky).

Jún – august 2012

Vladimír Kvasnička

Obsah

1. kapitola

Výroková logika I – Špecifikácia logiky, história logiky, syntax a sémantika logiky , Boolove funkcie

1.2 Čo je logika?

Môžeme si položiť otázku – čo je logika? Odpoveď na túto otázku je, že logika je *veda o správnom usudzovaní*. Preto našu pozornosť musíme obrátiť na špecifikáciu pojmu „správna usudzovanie“, čím sa správne usudzovanie odlišuje od nesprávneho? V logike študujeme také schémy usudzovania, ktoré sú správne (korektné) bez ohľadu na pravdivosť alebo nepravdivosť ich zložiek. Uvažujme dvojicu jednoduchých tvrdení – výrokov: „*prší*“ a „*ak prší, potom je cesta mokrá*“. Z týchto dvoch tvrdení – výrokov vyplýva nové tvrdenie „*cesta je mokrá*“. Uvažujme ďalšiu podobnú dvojicu tvrdení: „*Fido je smädný*“ a „*ak je Fido smädný, potom hľadá vodu*“. Záver z týchto dvoch tvrdení je, „*Fido hľadá vodu*“. Ak porovnáme túto dvojicu usudzovaní zistíme, že aj keď sú diametrálne odlišné obsahovo, majú veľa spoločného. V oboch prípadoch existujú dve nezávislé tvrdenia (v ďalšom texte ich budeme nazývať výroky), ktoré označíme[1] symbolmi p a q, pričom prvé tvrdenie je totožné s „p“ a druhé tvrdenie má tvar „*ak* p*, potom* q“. Záver z týchto dvoch tvrdení je „q“, ktoré predtým nevystupovalo samostatne, ale len ako časť zložitejšieho tvrdenia „*ak* p*, potom* q“. To znamená, že v procese usudzovania výrok „q“ je vyvodený z pôvodných predpokladov „p“ a „*ak* p*, potom* q“, čo sa obvykle zapisuje takto

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ q \end{array}$$

kde symbol $\Rightarrow$ vyjadruje spojku „ak..., potom...“. Táto formálna schéma usudzovania sa už od čias stredoveku označuje ako *modus ponens* (slov. *pravidlo odlúčenia*) a patrí medzi základne pravidlá správneho (logického) usudzovania, na ktorom je založená naša racionalita .

Naznačená formalizácia našej hovorovej reči je pre logiku charakteristická, logika študuje všeobecné formy usudzovania na symbolickej úrovni, v ktorých sa ignoruje konkrétny obsah jednotlivých tvrdení. Z týchto dôvodov býva aj moderná logika označovaná ako *formálna logika* alebo *matematická logika* [2-8] (v prvej polovici 20. storočia sa používal aj termín *logistika*, ktorý však v súčasnosti, hlavne pod vplyvom americkej angličtiny, má diametrálne odlišný význam a označuje procesy zásobovania alebo zabezpečenia potrebným

[1] Používanie symbolov abecedy miesto konkrétnych tvrdení typu „*Fido je smädný*“ alebo „*prší*“ pochádza od gréckeho filozofa Aristotela (384-322 pr. n. l.), ktorý je považovaný za zakladateľa logiky. Toto používanie symbolov, namiesto konkrétnych tvrdení, je pokladané súčasnou históriou vedy za veľký civilizačný obrat, ktorým sa grécka civilizácia odlíšila od babylonskej a egyptskej civilizácie, pre ktoré bol pojem symbolu ešte neznámy pri popise matematických algoritmov (napr. výpočet plochy obdĺžnikovej oblasti), ktoré z tohto dôvodu boli veľmi ťažkopádne, pretože operovali s konkrétnymi číslami.

materiálom). Nebudeme odlišovať formálnu logiku od matematickej, základným momentom v oboch prípadoch je nielen používanie symbolov a ich zgrupovania pomocou logických spojok (jazykové prostriedky typu „...*a*...“, „...*alebo*...“, „*ako*..., *potom*...“, ...) do väčších celkov nazývaných formuly, ale aj formalizácia procesu transformácie danej formuly na inú formulu metódami, ktoré sú charakteristické pre matematiku. Tak napríklad, výroková logika môže byť chápaná ako špeciálny druh algebry (Boolovej), obsahujúcej premenné (výroky), unárne a binárne operácie nad týmito premennými (logické spojky) a kde taktiež existuje striktný matematický systém odvodzovania nových formúl pomocou povolených operácií z jednoduchších formúl (axióm).

Použitie matematických metód v logike nie je samoúčelné. Umožňuje získať hlboké výsledky, ktoré odlíšili modernú logiku 20. storočia definitívne od klasickej neformálnej logiky predchádzajúcich období. Predmetom záujmu tohto textu je práve štúdium matematickej logiky pre potreby umelej inteligencie a kognitívnej vedy. Použitý prístup je založený na formalizácii prirodzeného jazyka pomocou výrokových symbolov a logických spojok, pričom usudzovanie je formalizované pomocou niekoľkých jednoduchých pravidiel. Snáď teraz si už môžeme položiť otázku, aký je rozdiel medzi matematickou a nematematickou logikou? Ako už bolo uvedené, predmetom nášho záujmu bude matematická logika. Môžeme sa teda pýtať, čo ešte zostáva v logike okrem matematickej logiky. Obvykle sa uvádza, že logika sa delí na dve časti: na matematickú logiku a na filozofickú logiku. Toto delenie má svoje historické pozadie, ktoré tu nebudeme hlbšie špecifikovať. Do filozofickej logiky sa obvykle vydeľovali neklasické logiky, ktoré mali viac ako dve pravdivostné hodnoty alebo obsahovali netradičné logické spojky (napr. modálne spojky „nutne“ a „možne“). V počiatkoch modernej logiky sa nevedelo, ako túto „neklasickú“ problemtatiku formálne spracovať, preto sa štúdium týchto neklasických logík stalo výhradne doménou „špekulatívnej“ filozofickej logiky. Avšak v súčasnosti, už aj tieto logiky majú, podobne ako výroková alebo predikátová logika, svoje formálne teórie používajúce sofistikované algebraické a množinové techniky. Z týchto dôvodov sa v súčasnosti zdá byť už rozdelenie logiky na matematickú a filozofickú umelým, neprirodzeným a prekonaným[2].

V súčasnej literatúre sa často spomínajú „neklasické logiky“. Ako odlíšime klasickú logiku od neklasickej logiky? V klasickej logike sa postuluje, že výroky sú dvojhodnotové, t.j. sú buď pravdivé alebo nepravdivé, žiadna iná tretia možnosť neexistuje. Naviac, elementárne výroky spájame do väčších zložitejších výrokov pomocou logických spojok („...*a*...“, „...*alebo*...“, „*ako*..., *potom*...“, ...), pričom pravdivosť týchto nových výrokov je plne určená pomocou pravdivostných hodnôt jej elementárnych výrokov a použitými logickými spojkami. Metódy konštrukcie pravdivostných hodnôt týchto zložených výrokov sú vytvárané pomocou „klasických“ tabuliek známych už od stredoveku a ktoré študenti obvykle už poznajú zo strednej školy. Tak napríklad, vieme, že výrok „*p* a *q*“ je pravdivý len vtedy, ak obe jeho zložky sú súčasne pravdivé, vo všetkých ostatných troch prípadoch výrok je nepravdivý. Ďalšia črta „neklasičnosti“ logiky môže spočívať v tom, že používame nové logické spojky, ktoré nie sú obvyklé v klasickej logike. Tieto nové spojky môžu vyjadrovať

[2] Podobná situácia existuje aj v chémii, ktorá je z historických a didaktických dôvodov rozdelené na dve veľké poddisciplíny, na anorganickú a organickú chémiu. Toto rozdelenie, ktoré vniklo v 18. storočí, keď existovala zreteľná demarkačná čiara medzi anorganickými (neživými) a organickými (živými) látkami, sa stalo v súčasnosti vedeckým anachronizmom, zákony chémie sú rovnaké pre obe časti chémie.

buď časové alebo modálne aspekty výrokov, alebo môžu byť dokonca ternárne (spájajúce tri elementárne výroky do nového zložitejšieho výroku).

Na záver tejto kapitoly uvedieme ešte niekoľko poznámok o význame matematickej logiky pre umelú inteligenciu a kognitívnu vedu. V umelej inteligencii existujú odbory, ktoré sa zaoberajú simuláciou ľudského usudzovania (reprezentácia poznatkov, expertné systémy a pod.). Preto potrebujeme metódy algoritmizácie metód usudzovania, ktoré nám poskytuje matematická logika svojim formálno-matematickým aparátom. Podobne, v kognitívnej vede, ktorá sa zaoberá ľudskou kogníciou, centrálne postavenie majú procesy kognície ľudského usudzovania, ktoré sú formalizované pomocou matematickej logiky. Môžeme teda konštatovať, že ***matematická logika tvorí jeden z pilierov moderných metód umelej inteligencie a kognitívnej vedy***. Umožňuje do určitej miery formalizovať prirodzený jazyk pomocou výrokov a logických spojok, pomocou zákonov usudzovania matematickej logiky vyvodzovať deduktívnym spôsobom z takto formalizovaných poznatkov nové poznatky, ktoré neboli v pôvodnej „databáze“ explicitne obsiahnuté.

1.1.1 História výrokovej logiky

Štúdium logiky ako nezávislej vednej disciplíny bolo zahájené v starom Grécku filozofom Aristotelom (384-322 pr. n. l.). Musíme však poznamenať, že predmetom hlavného záujmu Aristotela boli kvantifikátory „každý“ a „niektorý“, ktoré nie sú predmetom záujmu výrokovej logiky. Avšak vo svojich rukopisoch o metafyzike Aristoteles diskutuje dva dôležité zákony výrokovej logiky: zákon vylúčenia tretieho a zákon kontradikcie. Podľa prvého zákona platí, že každý výrok je buď pravdivý alebo nepravdivý, tretia možnosť neexistuje; druhý zákon hovorí, že výrok nemôže byť súčasne pravdivý a nepravdivý. Oba tieto zákony majú fundamentálny význam pre klasickú výrokovú logiku, menovite špecifikujú dvojhodnotový pravdivostný charakter výrokovej logiky. V jeho spisoch existujú náznaky toho, že rozpoznal dôležitosť zložitých výrokov tvorených pomocou spojok konjunkcie, disjunkcie a implikácie, avšak prienik Aristotela alebo jeho nasledovníkov do tejto nádejnej oblasti bol veľmi malý.

Podstatne úspešnejšie pokusy o využitie logických spojok k vytváraniu zložitejších výrokov pomocou logických spojok konjunkcie, disjunkcie a implikácie boli vykonané stoickou filozofiou (koniec 3. storočia pr. n. l.) . Pretože väčšina ich rukopisov bola nenávratne stratená, nemôžeme sa jednoznačne v súčasnosti vyjadrovať o tom, kto vytvoril tento nádejný smer v antickej logike a ktoré oblasti logiky boli študované týmto prístupom. Pozitívne vieme, na základe rukopisu Sextosa Empirikosa, že Diodorus Kronus a jeho žiak Philo navzájom diskutovali o tom, či pravdivostná hodnota implikácie závisí len na pravdivostnej hodnote predpokladu, ale taktiež aj na pravdivostnej hodnote dôsledku. Stoický filozof Chrysippos (približne 280-205 pr. n. l.) vykonal najväčší krok v rozvoji stoickej výrokovej logiky tým, že zostrojil päť rôznych schém usudzovania, ktoré sú založené na zložených výrokoch [1]:

1	$\dfrac{\textit{ak prvé, tak druhé} \\ \textit{avšak prvé}}{\textit{teda druhé}}$		2	$\dfrac{\textit{ak prvé, tak druhé} \\ \textit{avšak nie druhé}}{\textit{teda nie prvé}}$

3	*nie je pravda, že aj prvé aj druhé* *avšak prvé* *teda nie druhé*	4	*buď prvé alebo druhé* *avšak prvé* *teda nie druhé*
5	*prvé alebo druhé* *avšak nie prvé* *teda druhé*		

Z pohľadu súčasnej logiky pravidlo 4 je platné len pre exkluzívnu disjunkciu (XOR), ak by sme uvažovali obyčajnú inkluzívnu disjunkciu (OR), potom je toto pravidlo evidentne neplatné. Pravidlá usudzovania z tejto tabuľky sú totožné s pravidlami prirodzenej dedukcia, ktorá patrí medzi moderné súčasti výrokovej logiky. Prvá a druhá schéma usudzovania je totožná pravidlam *modus ponens* resp. *modus tollens*. Tretiu schému usudzovania, použitím de Morganovho zákona a zámenou premenných ich negáciami, môžeme prepísať do tvaru ekvivalentného s piatou schémou. Tieto schémy usudzovania patria už od dob gréckeho a rímskeho staroveku k základným schémam usudzovania. Stoická logika bola postupne rozvíjaná v druhom storočí nášho veku rímskym lekárom a logikom Galénom (približne 129-210), v šiestom storočí filozofom Boethiusom (približne 480-525) a neskoršie stredovekými mysliteľmi Petrom Abelardom (1079-1142) and Williamom z Ockhamu (1288-1347) a inými. Ich príspevky väčšinou spočívali v zdokonaľovaní a v lepšej formalizácii základných princípov vytvorených Aristotelom alebo Chrysipposom, menovite v spresnení terminológie a v prehĺbení argumentácie správnosti získaných výsledkov a vzájomných vzťahov medzi logickými spojkami. Tak napríklad, Abelard bol prvý logik, ktorý odlíšil exkluzívnu od inkluzívnej disjunkciu a dôvodil, že inkluzívna disjunkcia je podstatne dôležitejšia ako exkluzívna disjunkcia pre potreby výrokovej logiky.

Zo súčasného pohľadu možno konštatovať, že veľmi pozitívnu úlohu pre rozvoj modernej logiky zohral nemecký filozof a matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Tento filozof v logike, podobne ako Descartes v geometri (kde nahradil geometrické konštrukcie matematickými manipuláciami s algebraickými výrazmi), pokúsil sa vybudovať formálny systém, ktorý by nahradil verbálne metódy usudzovania manipuláciami s formulami. Postuloval formálny systém s dvoma časťami: (1) jazyk logiky *lingua characteristica*, pomocou ktorého je možné reprezentovať každý výrok a (2) počítanie *calculus ratiocinator*, pomocou ktorého je možné uskutočňovať usudzovanie systematickým a matematicky presným spôsobom. Žiaľ, trvalo ešte ďalších 200 rokov než sa naplnila táto Leibnizova idea, keď v polovici 19 st. anglický matematici A. de Morgan a G. Boole zostrojili „kalkulus“ – výrokovú logiku.

Pre Descartesovho súčasník anglického filozofa T. Hobbesa (1588–1679) myslenie už nebolo nič iné, ako len špeciálny druh výpočtu. Hlavným argumentom Hobbesa pre toto tvrdenie bola Aristetolova teória sylogizmov, ktorých riešenie mu pripomínalo aritmetické operácie nad číslami Táto hypotéza, ktorá v 17. storočí znela veľmi neobvykle, ba až exoticky, bola až v súčasnosti plne akceptovaná a realizovaná pomocou umelej inteligencie a kognitívnej vedy, kde má postavenie centrálnej paradigmy. Tento názor na myslenie, ako na špeciálny druh výpočtu, bol veľmi stimulujúci pre Leibniza, pri jeho snahách zostrojiť calculus ratiocinator-um.

Stav výrokovej logiky vo forme vyvinutej v podstate už v starovekom Grécku a Ríme, pretrvával až do začiatku 19. storočia, kedy vďaka rozvoju algebry, došlo hlavne zásluhou Augustusa DeMorgana (1806-1871) a Georga Boola (1815-1864) v polovici tohto storočia k algebraizácii Aristotelovskej sylogistickej logiky, kde číslica "1" bola použitá pre univerzálnu triedu, číslica "0" pre prázdnu triedu, súčin "xy" pre prienik tried a súčet "x + y" pre zjednotenie tried, a pod. Tento kvázimatematický prístup umožnil formalizovať výroky aristotelovskej logiky: napr. "každé *x* je *y*" je v tomto prístupe formalizované ako "$xy = 1$". Avšak je potrebné poznamenať, že Boole zaviedol aj druhú alternatívnu interpretáciu, kde rovnica "x = 1" sa číta ako "x je pravdivé" a "x = 0" sa číta ako "x je nepravdivé", formuly získané pre jeho logiku tried môžu byť transformované do výrokovej logiky. Napríklad, formula "x + y = 1" je interpretovaná tak, že x alebo y je pravdivé, podobne, formula "xy = 1" je interpretovaná tak, že x a y sú pravdivé. Booleho matematický prístup k formulácii výrokovej logiky zaznamenal veľký záujem u matematikov. Jeho myšlienky boli neskoršie precizované a preformulované do tvaru „Boolovej algebry“, ktorá v súčasnosti tvorí matematický základ výrokovej logiky a taktiež tvorí jeden z pilierov modernej matematickej logiky s plodnými aplikáciami v informatike a umelej inteligencii.

Koncom 19. storočia nemecký matematik a logik Gottlob Frege (1848-1925) prezentoval logiku ako súčasť systematických snáh jej povýšenia na metavedu pre matematiku, z ktorej sa dajú odvodiť čisto logickými deduktívnymi prostriedkami všetky teorémy matematiky. Frege taktiež navrhol prvý moderný axiomatický systém logiky, ktorá z dnešného pohľadu obsahuje výrokovú logiku a časť predikátovej logiky. Pri formulácii tejto axiomatizácie použil skutočnosť, že výrokové spojky môžu byť redukované na negáciu a implikáciu, spojky konjunkcie, disjunkcie a ekvivalencie sú z nich odvoditeľné.

Od dôb staroveku až po súčasnú dobu, logika bola predmetom intenzívneho záujmu mnohých učencov, bolo objavených mnoho nových koncepcií a tematických okruhov, ktoré definitívne odlíšili stredovekú a novovekú logiku od starovekej Aristetolovskej logiky. Hlavné tematické okruhy logiky boli charakteru filozofického a zaoberali sa fundamentálnymi otázkami o podstate ľudského usudzovania. Až na prelome 19. a 20. storočia nastala výrazná matematizácia logiky, pričom sa riešili hlavne problémy formalizácie ľudského usudzovania. Preto vznikal dojem, že v logike existujú problémy, ktoré sú touto matematizáciou nepostihnuteľné a preto sú výlučnou doménou tzv. filozofickej logiky. Tak napr. moment času v usudzovaní (výrok „*niekedy v minulosti padal sneh*“) alebo modalita výrokov („*je možné, že padá sneh*“) boli považované za nepostihnuteľné matematickými metódami. Štúdium týchto a podobných aspektov bolo považované za výlučnú doménu filozofickej logiky, ktorá sa týmto pomerne jasne oddelila od matematickej logiky, ktorá akoby sa zaoberala len štúdiom jednoduchých usudzovaní, ktoré nie sú časovo alebo modálne štruktúrované. Postupne sa však ukazovalo, že aj tieto aspekty logiky sú dobre matematicky formalizovateľné a že delenie logiky na ‚matematickú a filozofickú nemá hlbšieho opodstatnenia.

Počiatkom 20. storočia Alfred Whitehead a Bertrand Russell napísali gigantické dielo *Principia Mathematica*, ktoré možno pokladať za „štartovný kameň“ vzniku modernej logiky a ktoré je stále čitateľné a plne zrozumiteľná aj súčasníkovi, pretože použitý formalizmus je stále používaný. Koncepcia „pravdivostných tabuliek“ vznikla v druhe polovici 19. storočia hlavne zásluhou spisovateľa a popularizátora vedy L. Carrolla (1832-1898) a matematika J. Venna (1834-1923). Systematický záujem o tvorbu axiomatických systémov výrokovej logiky prejavili v prvej polovici 20. storočia takí vynikajúci matematici a lgici, akými boli David Hilbert, Paul Bernays, Alfred Tarski, Jan Łukasiewicz, Kurt Gödel, Alonzo Church a iný. V priebehu tohto obdobia bola dosiahnutých väčšina metateoretických výsledkov výrokovej logiky, ktoré budú diskutované v druhej časti tejto kapitoly. Rôzne systémy prirodzenej dedukcie, ktoré podstatne uľahčujú odvodenie zákonov výrokovej logiky vznikli na základe pionierskej práce nemeckého matematika a logika Gerharda Gentzena, ktorý v polovici 30. rokov minulého storočia publikoval túto metódu a ktorá sa veľmi rýchlo stala veľmi populárnou vo všetkých oblastiach modernej logiky.

1.2 Výrok, pravdivostná hodnota a logické spojky

Výroková logika [2-8] študuje také všeobecné formy usudzovania, pre ktoré platnosť záverov nezávisí od obsahu a ani od vnútornej štruktúry výrokov, ale výlučne len pravdivosti či nepravdivosti týchto výrokov. Analyzujme tieto jednoduché oznamovacie vety:

(1) Atóm je fyzikálna štruktúra.
(2) Atóm je sociálna štruktúra.
(3) Vo vesmíre existuje život aj mimo Zeme.
(4) Láska je rádioaktívna.
(5) Rast nášho hospodárstva má neustálu tendenciu.

Medzi uvedenými piatimi vetami sú veľké rozdiely. Možno konštatovať, že veta (1) je pravdivá, zatiaľ čo veta (2) je nepravdivá. Pri (3) zatiaľ nemôžeme rozhodnúť o jej pravdivosti alebo nepravdivosti. Veta (4) je síce gramaticky správna, ale je to zrejmý nezmysel vzhľadom na predikátu „rádioaktívny“, čiže nemá zmysel uvažovať o jej pravdivosti alebo nepravdivosti. Napokon skladba vety (5) (ktorú autor tohto textu zachytil v čsl. televízii koncom 80-tich rokov minulého storočia pri prejave vtedajšieho významného federálneho politika) je chybná, takže nemá vôbec žiadny zmysel sa pýtať na jej pravdivosť alebo nepravdivosť. Po týchto jednoduchých ilustračných príkladoch môžeme pristúpiť k tejto definície výroku.

Definícia 1.1. ***Elementárny výrok*** *je jednoduchá oznamovacia veta, pri ktorej má zmysel pýtať sa, či je alebo nie je pravdivá. Elementárne výroky budeme označovať malými písmenami abecedy* p, q, r, s, p_1, p_2, ... ***Pravdivostná hodnota*** *výroku p bude označená* $val(p)$, *pričom, ak výrok p je pravdivý (nepravdivý), potom* $val(p)=1$ ($val(p)=0$).

Pod pojmom „jednoduchá“ veta, budeme rozumieť takú nerozvinutú vetu, ktorá neobsahuje spojky. Pomocou týchto spojok (napr. *a*, *alebo*, *ak..., potom...*, *je ekvivalentné*, *nie je pravda, že*...) z elementárnych výrokov vytvárame zložitejšie výroky (výroky), pričom ich pravdivosť alebo nepravdivosť je určená len pravdivostnými hodnotami ich zložiek (elementárnymi výrokmi). Vo výrokovej logike sa používa jedna unárna logická spojka a štyri binárne spojky nazývané konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia (pozri Tabuľka 1).

(1) *Negácia.* Táto unárna logická spojka pre výrok p má formu „nie je pravda, že p“, čo zapíšeme pomocou symbolu negácie takto: $\neg p$. Za premennú p môžeme dosadiť nejaký

konkrétny výrok, ktorý je pravdivý alebo nepravdivý. Ak je tento výrok pravdivý (nepravdivý), potom jeho negácia je nepravdivá (pravdivá), formálne

$$val(\neg p) = 1 - val(p) \tag{1.1}$$

(2) *Konjunkcia.* Binárna symetrická spojka z dvoch výrokov p, q vytvára nový výrok „p a q“, ktorý je formálne označený „$p \wedge q$“. Pre konkrétnosť uvažujme zložený výrok „Peter je v škole a Milan je v kine“, kde elementárne výroky sú p = ‘*Peter je v škole*‘ a q = ‘*Milan je v kine*‘. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí od pravdivostných hodnôt jeho zložiek, pričom nutným predpokladom, aby jeho pravdivostná hodnota bola pravda je pravdivosť oboch jeho zložiek

$$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\} \tag{1.2}$$

(3) *Disjunkcia.* Binárna symetrická logická spojka z dvoch výrokov p, q vytvára nový výrok „p alebo q“, ktorý je formálne označený „$p \vee q$“. K tomu, aby bol pravdivý zložený výrok $p \vee q$, nutne aspoň jedna jeho zložka musí byť pravdivá; ak sú obe nepravdivé, potom pravdivostná hodnota zloženého výroku je nepravda

$$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\} \tag{1.3}$$

(4) *Implikácia.* Táto binárna logická spojka z dvoch výrokov p a q vytvára nový výrok „ak p, potom q“, alebo „p implikuje q“, formálne „$p \Rightarrow q$“. Na rozdiel od logických spojok konjunkcie a disjunkcie, vzťah pravdivostnej hodnoty implikácie $p \Rightarrow q$ k pravdivostným hodnotám jej zložiek je o mnoho zložitejší a závislý na konvenciách prirodzeného jazyka. Budeme postulovať, že implikácia je nepravdivá len vtedy, ak $val(p)=\mathbf{1}$ a $val(q)=\mathbf{0}$, pre všetky ostatné pravdivostné hodnoty p a q je pravdivá

$$val(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) \le val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) = 1, val(q) = 0) \end{cases} \tag{1.4}$$

Dosaďme napríklad v implikácii za p nepravdivý výrok „*5+2=8*“ a za q pravdivý výrok „*Masaryk bol prvý prezident Československa*“. Podľa Tabuľky 1.1, implikácia $p \Rightarrow q$ je pravdivá pre nepravdivé p a pravdivé q, potom zložený výrok „pretože *5+2=8,* potom „*Masaryk bol prvý prezident Československa*“ je pravdivý výrok, aj keď bežný čitateľ bude pokladať tento výrok za nepravdivý ba až nezmyselný. Jeden zo zakladateľov modernej logiky G. Frege (1848-1925) navrhol riešiť tento problém tak, že v rámci tejto „materiálnej“ implikácie sa môžu vyskytovať len výroky, ktoré sú v príčinnej súvislosti. Tieto problémy s určením pravdivostných hodnôt implikácie viedli v prvej polovici 20.storočia niektorých logikov k štúdiu tzv. *neklasických logík*, ktoré majú jemnejšie prostriedky na špecifikáciu implikácie (chápanej ako relácia príčinného vzťahu).

(5) *Ekvivalencia.* Táto binárna symetrická logická „p je ekvivalentné q“, formálne „$p \equiv q$“, ktorá je pravdivá len vtedy, ak jej elementárne výroky p a q sú súčasne buď pravdivé alebo nepravdivé. Formálne túto skutočnosť vyjadríme pomocou relatívne komplikovaného vzťahu:

$$val(p \equiv q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) = val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) \neq val(q)) \end{cases} \qquad (1.5)$$

V matematike sa často používa táto logická spojka v týchto dvoch alternatívnych jazykových formách: „*p* je nutnou a postačujúcou podmienkou *q*“ alebo „*p* práve vtedy a len vtedy ak *q*“.

Tabuľka 1.1. Funkčné vyjadrenie pravdivostných hodnôt logických spojok.

logická spojka	funkčné vyjadrenie pravdivostnej hodnoty
$\overline{p}$	$val(\overline{p}) = 1 - val(p)$
$p \wedge q$	$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}$
$p \vee q$	$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}$
$p \Rightarrow q$	$val(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) \leq val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) = 1, val(q) = 0) \end{cases}$
$p \equiv q$	$val(p \equiv q) = \begin{cases} 1 & (\text{ak } val(p) = val(q)) \\ 0 & (\text{ak } val(p) \neq val(q)) \end{cases}$

Pravdivostné hodnoty jednotlivých logických spojok špecifikovaných vyššie sú uvedené v tabuľke 1.2. Poznamenajme, že všetkých možných binárnych logických spojok je 16, v tabuľke sú uvedené len štyri základné logické spojky, ostatné sa dajú vyjadriť pomocou týchto základných zložiek.

Tabuľka 1.2. Pravdivostné hodnoty základných logických spojok

p	q	$\neg p$ (negácia)	$p \wedge q$ (konjunkcia)	$p \vee q$ (disjunkcia)	$p \Rightarrow q$ (implikácia)	$p \equiv q$ (ekvivalencia)
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.3 Jazyk výrokovej logiky (syntax)

Zavedieme formálny systém nazývaný jazyk výrokovej logiky L nad množinou $P = \{p, q, r, ..., p_1, p_2, ...\}$ elementárnych výrokových premenných (alebo atómických formúl) a $\{0,1\}$ je množina výrokových konštánt, ktoré reprezentujú pravdivý resp. nepravdivý výrok.

Definícia 1.2. *Jazyk výrokovej logiky definovaný nad množinou P výrokových premenných je zostrojená opakovaným použitím týchto dvoch pravidiel:*

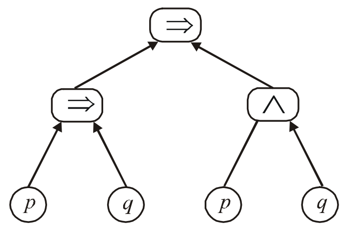
(1) *Každá výroková premenná* $p \in P$ *alebo výroková konštanta je výroková formula,*
(2) *ak výrazy* φ *a* ψ *sú výrokové formuly, potom aj výrazy* $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ *a* $(\varphi \equiv \psi)$ *sú výrokové formuly,*
(3) *žiadne iné symboly nie sú formuly.*

Zátvorky sa používajú ako pomocné symboly, pomocou ktorých môžeme odstrániť prípadnú nejednoznačnosť výrokových formúl. Uvažujme formulu $p \wedge q \vee r$, pomocou zátvoriek môžeme ju interpretovať dvoma rôznymi spôsobmi $(p \wedge q) \vee r$ a $p \wedge (q \vee r)$.

Definícia 1.3.
Konštrukcia *formuly* φ *nad množinami* P *a* $\{0,1\}$ *je tvorená postupnosťou formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, *pričom posledný prvok* φ_n *je totožný s formulou* φ, *pre každé* $i = 1, 2, ..., n$ *platí jedna s týchto troch možností:*
(1) φ_i *je výroková premenná z P alebo výroková konštanta.*
(2) φ_i *vznikla z niektorého z prvkov množiny* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou unárnej logickej spojky negácie,* $\varphi_i = (\neg\varphi_j)$, *pre* $j = 1, 2, ..., i-1$.
(3) φ_i *vznikla z niektorých dvoch prvkov množiny* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou nejakej binárnej logickej spojky* ♠ (konjunkcie, disjunkcie, implikácie alebo ekvivalencie), *t. j.* $\varphi_i = (\varphi_j \spadesuit \varphi_k)$, *pre* $j < k = 1, 2, ..., i-1$.
Prvky postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *sa nazývajú* ***podformuly*** *formuly* φ, $\varphi_i \subset \varphi$ *pre* $i = 1, 2, ..., n$.

Formuly môžeme chápať ako slová, ktoré sú zostrojené nad abecedou *P* výrokových premenných, výrokových konštánt a logických spojok (a taktiež pomocných zátvoriek). Tvorba týchto slov je určená pomocou dvoch pravidiel z definície 1.2, pričom spôsob konštrukcie slova je špecifikovaný postupnosťou $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ z definície 1.3. Ak predpokladáme, že táto postupnosť má minimálnu dĺžku, potom formula ψ má len podformuly z tejto postupnosti, iné podformuly nemá. Všetky možné formuly zostrojené nad množinami *P* a $\{0,1\}$ tvoria konkrétny *jazyk L* výrokovej logiky (vzhľadom k daným množinám).

V definíciách 1.2 a 1.3 sme použili mimologické symboly φ, ψ, ..., ktoré reprezentujú formuly vyjadrené reťazcami symbolov zostrojených nad abecedou, ktorá obsahuje nielen výrokové premenné, ale aj symboly pre logické spojky a zátvorky (a taktiež aj mimologické symboly reprezentujúce podformuly). Potom môžeme povedať, že dve formuly φ α ψ sú **rovnaké**, φ = ψ, keď sú reprezentované rovnakými reťazcami symbolov.



Obrázok 1.1 Syntaktický (alebo derivačný) strom formuly $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Koncové vrcholy stromu reprezentujú výrokové premenné p a q, vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojkám implikácie a konjunkcie. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor.

Príklad 1.1. Nech $P = \{p,q,r,s\}$ je množina výrokových premenných, potom

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$$\left(\left(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\right) \Rightarrow (\overline{r} \Rightarrow \overline{s})\right)$$

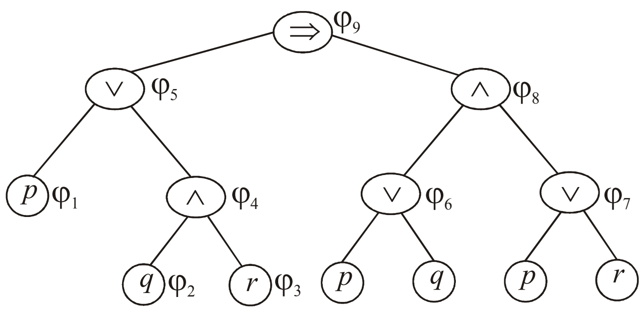
$$\left(\left(\overline{p} \wedge (r \vee s)\right) \wedge (p \Rightarrow s)\right)$$

sú výrokové formuly, zatiaľ čo

$$\left(\Rightarrow (\wedge p)\right)$$

$$\left((\Rightarrow \Rightarrow s) \Rightarrow p\right)$$

nie sú výrokové formuly. Každá výroková formula je reprezentovaná pomocou grafického útvaru nazývaného *syntaktický strom,* pozri obr. 1.1.



Obrázok 1.2. Podformuly formuly $\varphi = \left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right)$ sú určené pomocou vrcholov syntaktickeého stromu formuly.

Príklad 1.2. Študujme formulu $\varphi = \left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right)$, syntaktický strom formuly má tvar znázornený na obr. 1.2.

Jednotlivé podformuly sú určené takto:

$$\varphi_1 = p,$$

$$\varphi_2 = q,$$

$$\varphi_3 = r,$$

$$\varphi_4 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 = q \wedge r,$$

$$\varphi_5 = \varphi_1 \vee \varphi_4 = p \vee (q \wedge r)$$

$$\varphi_6 = p \vee q,$$

$$\varphi_7 = p \vee r,$$

$$\varphi_8 = \varphi_6 \wedge \varphi_6 = (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

$$\varphi_9 = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_8 = \left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right).$$

1.4 Pravdivostné ohodnotenie formúl výrokovej logiky (sémantika)

Ako už bolo povedané v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, syntax formúl výrokovej logiky je jednoznačne určená spôsobom ich konštrukcie, pomerne ľahko vieme rozhodnúť, či daná formula ma korektnú syntax, alebo nemá.

Vyššie špecifikovaný spôsob konštrukcie výrokových formúl nazývame *syntaxou výrokovej logiky*. Podobne ako v prirodzenom jazyku, kde syntax špecifikuje tvar vety, nie všetky vety, ktoré môžeme zostrojiť jednoduchým zreťazením slov, sú syntakticky korektné. Podobne aj vo výrokovej logike, nie každé zreťazenie prípustných symbolov nám definuje formulu, existujú formuly, ktoré nie sú syntakticky správne.

Ďalší pojem dôležitý pre výrokovú logiku je *sémantika*. Pojem pochádza z teórie prirodzených jazykov, kde sémantika špecifikuje význam danej vety (ktorá ma tiež aj svoju syntax). Vo výrokovej logike, ktorá sa zaoberá len pravdivostnými hodnotami premenných a ich formúl, *sémantika* nie je veľmi bohatá. Sémantika výrokovej formuly je vlastne tabuľka pravdivostných hodnôt formuly pre rôzne hodnoty jej výrokov. Tak napríklad: pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$, ktorá má korektnú syntax (napr. reprezentovaný syntaktickým stromom), je jej sémantika plne určená vyššie uvedenou tabuľkou jej pravdivostných hodnôt pre všetky štyri kombinácie výrokov *p* a *q*.

Uvažujme formulu výrokovej logiky *A*, ktorej výrokové premenné $p_1, p_2, ..., p_n$ sú interpretované *τ*, ktorý určuje pravdivostné hodnoty jej premenných. Táto interpretácia *premenných* $\tau = (p/\tau_1, q/\tau_2, ..., r/\tau_n)$, kde $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in \{0,1\}$, spočíva v priradení binárnych pravdivostných hodnôt jednotlivým premenným. Rôznych interpretácií premenných **τ**, ktoré sú priradené *n* výrokovým premenným je 2^n. Pravdivostná hodnota formuly φ pre danú interpretáciu **τ** je označená výrazom $val_\tau(\varphi)$.

Ako bude prebiehať výpočet $val_\tau(\varphi)$. V súhlase s definíciou 1.3 predpokladajme, že konštrukcia formuly φ je tvorená postupnosťou formúl $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, pričom $\varphi = \varphi_n$. Pravdivostné vyhodnotenie jednotlivých členov postupnosti pre $i = 1, 2, ..., n$ sa vykonáva takto:

(1) Ak φ_i je výroková premenná, potom $val_\tau(\varphi_i)$ je určená priamo interpretáciou τ, ktorý špecifikuje pravdivostné hodnoty premenných.

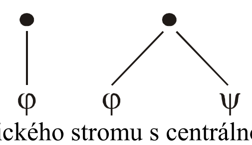
(2) Ak φ_i nie je výroková premenná a vznikla z niektorého z prvkov množiny $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ aplikáciou unárnej logickej spojky negácie, $\varphi_i = (\neg\varphi_j)$, pre $j = 1, 2, ..., i-1$, potom $val_\tau(\varphi_i) = 1 - val_\tau(\varphi_j)$.

(3) Ak φ_i nie je výroková premenná a *vznikla z niektorýho dvoch prvkov množiny* $\varphi_j, \varphi_k \in \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}\}$ *aplikáciou binárnej logickej spojky, potom* $val_\tau(\varphi_i)$ je vyhodnotený na základe tabuľky 1.3 pomocou už známych pravdivostných hodnôt $val_\tau(\varphi_j)$ a $val_\tau(\varphi_k)$.

Tabuľka 1.3. Pravdivostné ohodnotenie zložených výrazov

(1)	$val_\tau(\varphi \wedge \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$ *a* $val_\tau(\psi) = 1$
(1′)	$val_\tau(\varphi \wedge \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$ *alebo* $val_\tau(\psi) = 0$
(2)	$val_\tau(\varphi \vee \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$ *alebo* $val_\tau(\psi) = 1$
(2′)	$val_\tau(\varphi \vee \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$ *a* $val_\tau(\psi) = 0$
(3)	$val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$ *alebo* $val_\tau(\psi) = 1$
(3′)	$val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$ *a* $val_\tau(\psi) = 0$
(4)	$val_\tau(\varphi \equiv \psi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = val_\tau(\psi)$
(4′)	$val_\tau(\varphi \equiv \psi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) \neq val_\tau(\psi)$
(5)	$val_\tau(\neg\varphi) = 1$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 0$
(5′)	$val_\tau(\neg\varphi) = 0$	*vtt*	$val_\tau(\varphi) = 1$

Tento rekurentný postup je názorne realizovaný pomocou tabuľkovej metódy, kde postupne počítame pravdivostné hodnoty jednotlivých podformúl pre všetky možné interpretácie τ. Pri vyhodnocovaní pravdivostných hodnôt formúl pomocou tejto metódy je užitočný pojem „*hlavná podformula*“ (alebo „*hlavné podformuly*“). Nech π je formula, ktorej tvar je $\pi = \neg\varphi$, kde $\neg$ je unárna logická spojka negácie, potom φ sa nazýva ***hlavná podformula***. Vo všeobecnejšom prípade, nech formula π má tvar $\pi = \varphi \spadesuit \psi$, kde $\spadesuit$ je binárna logická spojka (napr. konjunkcia alebo implikácia), potom φ a ψ sa nazývajú ***hlavné podformuly***; v prípade, že $\spadesuit$ je nekomutatívna binárna spojka (napr. implikácia), potom φ a ψ sa nazývajú ***ľavá resp. pravá hlavná podformula*** (pozri obrázok 1.3)



Obrázok 1.3 Znázornenie syntaktického stromu s centrálnou unárnou resp. binárnou spojkou.

Prvá formula s unárnou centrálna spojka obsahuje jednu hlavnú podformulu, druhá formula s binárnou centrálnou spojkou obsahuje dva hlavné podformuly. Vyššie uvedenú tabuľku môžeme použiť pre vyhodnocovania pravdivostnej hodnoty formuly $\varphi(p, q, ..., r) \in L$ pre danú interpretáciu výrokových premenných $\tau = \left(p/\tau_1, q/\tau_2, ..., r/\tau_n \right)$. Množinu všetkých možných interpretácií τ formuly φ s n výrokovými premennými, označíme $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} = \{\tau\}$, potom jej kardinalita je $|\mathcal{T}| = 2^n$. Postup tohto výpočtu pravdivostnej hodnoty je založený na ***princípe funkcionality***, podľa ktorého pravdivostná hodnota formuly φ je rekuretne určená pomocou jej hlavných podformúl, pričom rekuretný postup aktivácie funkcie pravdivostnej hodnoty podformúl je ukončený vtedy, keď aktuálna hlavná podformula je výrokovou premennou s pravdivostnou hodnotou určenou pomocou interpretácie $\boldsymbol{\tau}$.

Príklad 1.3. Tabuľková metóda bude ilustrovaný výpočtom pravdivostných hodnôt formuly $\varphi = \left(\left(p \vee \left(q \wedge r \right) \right) \Rightarrow \left(\left(p \vee q \right) \wedge \left(p \vee r \right) \right) \right)$. Výsledná tabuľka pravdivostných hodnôt je znázornená na Tab. 1.4.

Tabuľka 1.4. Výpočet pravdivostných hodnôt formuly
$\varphi = \left(\left(p \vee \left(q \wedge r \right) \right) \Rightarrow \left(\left(p \vee q \right) \wedge \left(p \vee r \right) \right) \right)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi_1 = p$	$\varphi_2 = q$	$\varphi_3 = r$	$\varphi_4 = q \wedge r$	$\varphi_5 = \varphi_1 \vee \varphi_4$	$\varphi_6 = p \vee q$	$\varphi_7 = p \vee r$	$\varphi_8 = \varphi_6 \wedge \varphi_6$	$\varphi_9 = \varphi_5 \Rightarrow \varphi_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabuľka sa buduje postupne, pomocou syntaktického stromu formuly, najprv vyhodnocujeme podformuly priradené výrokovým premenným (stĺpce 1-3), v ďalších krokoch vyhodnotíme postupne tie podformuly, ktoré obsahujú už vyhodnotené podformuly, proces ukončíme vyhodnotením samotnej formuly, všetky jej podformuly už sú vyhodnotené. Z tabuľky 1.3 vyplýva, že pre každé pravdivostné hodnoty premenných p, q a r formula $\varphi = \left(\left(p \vee \left(q \wedge r \right) \right) \Rightarrow \left(\left(p \vee q \right) \wedge \left(p \vee r \right) \right) \right)$ je pravdivá.

Tabuľka 1.5. Alternatívny výpočet pravdivostných hodnôt formuly
$\varphi = \left(\left(p \vee \left(q \wedge r \right) \right) \Rightarrow \left(\left(p \vee q \right) \wedge \left(p \vee r \right) \right) \right)$

1	2	3	4	5		6	7	8	9
p	q	r	$((p \quad \vee \quad (q$	$\wedge$	$r))$	$\Rightarrow$	$((p \quad \vee \quad q)$	$\wedge$	$(p \quad \vee \quad r))$
0	0	0	0	0		1	0	0	0
0	0	1	0	0		1	0	0	1
0	1	0	0	0		1	1	0	0
0	1	1	1	1		1	1	1	1
1	0	0	1	0		1	1	1	1

1	0	1	1	0		1	1	1	1
1	1	0	1	0		1	1	1	1
1	1	1	1	1		1	1	1	1

Alternatívny výpočet pravdivostných hodnôt formuly $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ je znázornený na Tab. 1.5. V prvom kroku sme spočítali stĺpec 5, v druhom kroku stĺpec 4, tým sme ukončili výpočet ľavej strany implikácie 6. V tretom a štvrtom kroku spočíteme stĺpce 7 resp. 9, v piatok kroku spočítame konjunkciu v stĺpci 8. Na záver v šiestom kroku spočítame pravdivostnú hodnotu formuly pomocou výpočtu stĺpcu 6. Tabuľku 1.4 dostaneme z tabuľky 1.5 tak, že vhodným spôsobom permutujeme stĺpce.

Vo výrokovej logike majú mimoriadne postavenie také formuly, ktorých pravdivostná hodnota je pravda pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt premenných vo všetkých riadkoch. Takéto formuly nazývame *tautológie* a majú postavenie „zákonov" výrokovej logiky. Ich používanie pri odvodzovaní nových formúl zabezpečuje, že sú taktiež tautológie.

Definícia 1.4. *Formula* φ *sa nazýva* ***tautológia*** (*čo vyjadríme* $\models \varphi$), *ak pre každú interpretáciu* τ *platí* $val_\tau(\varphi) = 1$*; v opačnom prípade, ak pre každú interpretáciu* τ *platí* $val_\tau(\varphi) = 0$*, formula sa nazýva* ***kontradikcia***. *Ak existuje aspoň jedna interpretácia* τ *taká, že* $val_\tau(\varphi) = 1$*, potom formula* φ *je* ***splniteľná*** (to znamená, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnosti).

Túto definíciu môžeme parafrázovať tak, že všetky formuly, ktoré nie sú kontradikcie sú splniteľné a tautológie sú také splniteľné formuly, ktoré sú pre všetky možné interpretácie τ pravdivé.

Môžeme teda konštatovať, že výroková logika je „*rozhodnuteľná*" , máme k dispozícii jednoduchú tabuľkovú metódu, pomocou, ktorej môžeme zistiť, či daná formula je tautológia, kontradikcia alebo len splniteľná. Určité komplikácie s použitím tejto jednoduchej výpočtovej metódu môžu nastať, keď formula obsahuje 5 alebo viac výrokových premenných, potom príslušná tabuľka obsahuje 2^5 = 32 riadkov, čo už môže spôsobovať vážne „organizačné" problémy užívateľovi pre použití tabuľkovej metódy. Hovoríme, vo všeobecnosti, že zložitosť tabuľkovej metódy rastie exponenciálne s počtom premenných, t. j. $t_{CPU} \sim 2^n$.

Niektoré tautológie sa často používajú nielen v samotnej výrokovej logike, ale aj v bežnom usudzovaní a sú obvykle označované aj vlastným menom. Väčšinou ide o tautológie tvaru ekvivalencie, ktoré umožňujú nahradzovať jedny formuly inými bez straty vlastnosti ich tautologickosti. Medzi najznámejšie zákony výrokovej logiky patria tieto tautológie:

(1) Zákon totožnosti $\models (p \Rightarrow p)$.

(2) Zákon dvojitej negácie $\models (\neg\neg p \equiv p)$.

(3) Zákon vylúčenia tretieho $\models (p \vee \neg p)$.

(4) Zákon kontradikcie $\models \neg(p \wedge \neg p)$.

(5) De Morganov zákon pre konjunkciu $\vDash \left(\neg\left(p \wedge q\right) \equiv \left(\neg p \vee \neg q\right)\right)$.

(6) De Morganov zákon pre disjunkciu $\vDash \left(\neg\left(p \vee q\right) \equiv \left(\neg p \wedge \neg q\right)\right)$.

(7) Zákon ekvivalencie $\vDash \left(\left(p \equiv q\right) \equiv \left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow p\right)\right)\right)$.

(8) Zákon tranzitívnosti implikácie[3] $\vDash \left(p \Rightarrow r\right) \Rightarrow \left(\left(r \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(p \Rightarrow q\right)\right)$.

(9) Distribúcia konjunkcie $\vDash \left(\left(p \vee \left(q \wedge r\right)\right) \equiv \left(\left(p \vee q\right) \wedge \left(p \vee r\right)\right)\right)$.

(10) Distribúcia disjunkcie $\vDash \left(\left(p \wedge \left(q \vee r\right)\right) \equiv \left(\left(p \wedge q\right) \vee \left(p \wedge r\right)\right)\right)$.

(11) Zákon asociatívnosti konjunkcie $\vDash \left(\left(p \wedge \left(q \wedge r\right)\right) \equiv \left(\left(p \wedge q\right) \wedge r\right)\right)$

(12) Zákon asociatívnosti disjunkcie $\vDash \left(\left(p \vee \left(q \vee r\right)\right) \equiv \left(\left(p \vee q\right) \vee r\right)\right)$

(13) Zákon komutatívnosti konjunkcie $\vDash \left(\left(p \wedge q\right) \equiv \left(q \wedge p\right)\right)$

(14) Zákon komutatívnosti disjunkcie $\vDash \left(\left(p \vee q\right) \equiv \left(q \vee p\right)\right)$

(15) Zákon kontrapozície $\vDash \left(\left(p \Rightarrow q\right) \equiv \left(\neg q \Rightarrow \neg p\right)\right)$.

(16) Zákon „reductio ad absurdum“ $\vDash \left(\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(p \Rightarrow \neg q\right)\right) \Rightarrow \neg p\right)$.

(17) Zákon nahradenia implikácie $\vDash \left(\left(p \Rightarrow q\right) \equiv \left(\neg p \vee q\right)\right)$.

(18) Zákon „modus ponens“ $\vDash \left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge p\right) \Rightarrow q$

(19) Zákom „modus tollens“ $\vDash \left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \neg q\right) \Rightarrow \neg p$

Platnosť všetkých týchto zákonov môžeme prekontrolovať pre všetky pravdivostné hodnoty premenných pomocou tabuľkovej metódy (t. j., sú to tautológie).

1.5 Boolove funkcie

Formula výrokovej logiky $\varphi\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, ktorá obsahuje n výrokových premenných (atomických formúl) $x_1, x_2, ..., x_n$ môže byť na sémantickej úrovni interpretovaná ako zobrazenie vektora binárnych argumentov na binárnu funkčnú hodnotu. Takéto zobrazenie sa nazýva ***Boolova funkcia***“

$$\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\} \quad \text{alebo} \quad y = \varphi\left(x_1, x_2, ... x_n\right) \tag{1.6}$$

ktorá priradí n binárnym premenný (argumentom $x_1, x_2, ... x_n$) binárnu funkčnú hodnotu y.

Pre lepšie pochopenie významu tohto prístupu pre výrokovú logiku uvažujme tento výrok, ktorý obsahuje štyri výrokové premenné

$$\varphi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\left(\left(x_1 \wedge x_2\right) \vee \left(x_3 \Rightarrow x_4\right)\right) \Rightarrow x_1\right) \tag{1.7}$$

Táto Boolova funkcia“ ma 16=2^4 rôznych špecifikácií premenný. Použitím tabuľkovej metódy môžeme vypočítať pravdivostné (funkčné) hodnoty tejto funkcie (pozri tab. 1.6).

[3] Tradičný názov je zákon hypotetického sylogizmu.

Tabuľka 1.6. Boolova funkcia 4 premenných

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$
1	0	0	0	0	0
....					
16	1	1	1	1	1

K tomu, aby sme dostali teóriu Boolových funkcií do priamej súvislosti s výrokovou logikou definujme elementárne Boolove funkcie 1- a 2-premenných - logické spojky, pomocou ktorých za zostrojujú všeobecné Boolove funkcie (pozri tab. 1.7 a 1.8). Tretia unárna funkcia $u_3(x)$ reprezentuje Boolovu spojku negácie, ostatné tri unárne funkcie nemajú vo výrokovej logike analógiu.

Tabuľka 1.7. Unárne logické spojky

#	x	u_1	u_2	u_3	u_4
1	0	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1

Tabuľka 1.8. Binárne logické spojky

#	x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
log. spojky				$\wedge$		x_1		x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg x_2$		$\neg x_1$	$\Rightarrow$	$\uparrow$	

Celkový počet binárnych logických spojok je $16=2^4$, avšak len štyri z nich majú vo výrokovej logike svojich reprezentantov, v tab. 1.8 sú vyznačené tmavými stĺpcami. Tmavším tieňovaným sme odlíšili ešte ďalšie tri binárne funkcie:

(1) Funkcia f_7, nazývaná *exkluzívne alebo* (eXclusive OR, XOR), ktorá aj keď v klasickej výrokovej logike nemá svoju obdobu, často sa využíva v elektronických aplikáciách teórie logických funkcií. Jej alternatívna definícia sa dá uskutočniť pomocou funkcie ekvivalencie

$$p \oplus q =_{def} \neg(p \equiv q) \tag{1.8a}$$

(2) Funkcia f_9 , nazývaná *Peircov symbol* (negácia disjunkcie, preto sa niekedy označuje ako Non OR, NOR, pomocou tejto spojky sa dá vyjadriť každá unárna a aj binárna funkcia. Jej alternatívna definícia je

$$p \downarrow q =_{def} \neg(p \vee q) \tag{1.8b}$$

Tvorí množinu, ktorá je funkčne úplná a ostatné logické spojky sa dajú vyjadriť takto:

(a) Negácia $\neg p \equiv p \downarrow p$,

(b) konjunkcia $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$,

(c) disjunkcia $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

(4) Funkcia f_{15}, nazývaná *Shefferov symbol* (negácia konjunkcie, preto sa niekedy označuje ako Non AND, NAND), jej alternatívna definícia je

$$p \uparrow q =_{def} \neg(p \wedge q) \tag{1.8c}$$

Táto spojka je zaujimavá tým, že má podobnú vlastnosť ako Peircov symbol, pomocou tejto spojky sa dá vyjadriť každá unárna a aj binárna funkcia. Táto netradičná logická spojka tvorí množinu, ktorá je funkčne úplná. Štandardné logické spojky sú pomocou Shefferovho symbolu vyjadrené takto:

(a) Negácia $\neg p \equiv p \uparrow p$,

(b) konjunkcia $p \wedge q \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$,

(c) disjunkcia $p \vee q \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.

Nech φ a ψ sú dve formuly výrokovej logiky s rovnakými výrokovými premennými, $\varphi = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Nech $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \in \{0,1\}^n$ je interpretácia týchto výrokových premenných, t. j. pre každé $\tau \in \{0,1\}^n$ platí: $val_\tau(x_i) = \tau_i$. Tak napríklad, pre n = 3, premenné x_1, x_2, x_3 sú interpretované $\tau = (0,1,1) \in \{0,1\}^3$ takto: $val_\tau(x_1) = 0$, $val_\tau(x_2) = 1$, $val_\tau(x_3) = 1$, t. j. premenná x_1 je nepravdivá a premenné x_2 , x_3 sú pravdivé.

Definícia 1.5.
Hovoríme, že formuly $\varphi = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ a $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ sú (logicky) ***ekvivalentné***, čo zapisujeme $\varphi \sim \psi$, vtedy a len vtedy, ak ich pravdivostné hodnoty sú rovnaké pre každú interpretáciu $\tau \in \{0,1\}^n$,

$$(\varphi \sim \psi) =_{def} val_\tau(\varphi) = val_\tau(\psi) \quad \left(pre\ každé\ \tau \in \{0,1\}^n\right) \tag{1.9}$$

Poznamenajme, že symbol ´~´ je binárna relácia a nie binárna logická spojka, aj keď svojou definíciou je veľmi blízka spojke ´≡´.

Pre naše ďalšie úvahy o význame teórie Boolových funkcií vo výrokovej logike zavedieme dva dôležité pojmy a ukážeme, že pomocou nich môže byť „analyticky“ vyjadrená každá Boolova funkcia, ktorá je špecifikovaná len tabuľkou svojich funkčných hodnôt (pozri tab. 3.1). Každá formula výrokovej logiky (a teda ja každá Boolova funkcia, ktorá používa len klasické binárne funkcie) môže byť prepísaná do ekvivalentného konjunktívneho alebo disjunktívneho tvaru. Práve tieto špeciálne tvary Boolových funkcií (alebo aj výrokových formúl) majú význam pre konštrukciu „analytických“ funkcií určených len tabuľkou. Zavedieme nasledujúcu terminológiu:

Definícia 1.6. ***Literál*** je výroková premenná alebo jej negácia, t. j. $l = p$ alebo $l = \neg p$, dva literály l a l' sa nazývajú ***komplementárne***, ak sú tvorené výrokovou premennou a jej negáciou, t. j. $l = p$ a $l' = \neg p$.

1. ***Konjunktívna klauzula*** je vytvorená pomocou konjunkcie literálov ($l_1 \wedge l_2 \wedge ...$).

Podobne, ***disjunktívna klauzula*** je vytvorené pomocou disjunkcie literálov ($l_1' \vee l_2' \vee ...$).

2. ***Konjunktívna normálna forma (KNF)*** je tvorená pomocou konjunkcie disjunktívnych klauzúl ($(l_1 \vee l_2 \vee ...) \wedge (l_1' \vee l_2' \vee ...) \wedge ...$). Podobne, ***disjunktívna normálna forma (DNF)*** je tvorená pomocou disjunkcie konjunktívnych klauzúl ($(l_1 \wedge l_2 \wedge ...) \vee (l_1' \wedge l_2' \wedge ...) \vee ...$).

Príklad 1.4. Príkladom disjunktívnej normálnej resp. konjunktívnej normálnej formy sú tieto dve formuly

$$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_3 \wedge p_5 \wedge \neg p_6)$$

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_5)$$

Ukážeme, že každá výroková formula (Boolova funkcia s klasickými spojkami) φ môže byť prepísaná do ekvivalentnej disjunktívnej resp. konjunktívnej normálnej formy, $\varphi = \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi = \varphi_{KNF}$ tvaru. Tento postup je založený na použití disjunktívneho tvaru implikácie, De Morganových zákonov a distributívnych zákonov pre konjunkciu a disjunkciu. Uvažujme formulu $\varphi = (p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg q)$, použitím disjunktívneho tvaru implikácie túto formulu prepíšeme do tvaru

$$\neg(p \vee q) \vee (r \wedge \neg q)$$

Aplikáciou De Morganov zákon pre negáciu disjunkcie dostaneme požadovaný disjunktívny tvar

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)$$

kde $\varphi \equiv \varphi_{DNF}$. Podobne, ako v predošlom ilustračnom príklade, ukážeme, že každá výroková formula môže byť prepísaná taktiež aj do konjunktívneho tvaru. Budeme študovať rovnakú formulu ako v predošlom príklade, jej disjunktný tvar $(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)$ je ďalej upravovaný pomocou distributívnych zákonov pre konjunkcie a disjunkciu

$$\begin{aligned}&((\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \vee (r \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (r \wedge \neg q)) \equiv \\ &(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q) \equiv \\ &(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg q\end{aligned}$$

Potom

$$\varphi_{KNF} = (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg q$$

Veta 1.1.
(1) Pre každú formulu φ existuje ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***disjunktívnej normálnej formy***

$$\varphi \equiv \varphi_{DNF} \tag{1.10a}$$

(2) Pre každú formulu φ existuje ekvivalentná formula, ktorá má tvar ***konjunktívnej normálnej formy***

$$\varphi \equiv \varphi_{KNF} \tag{1.10b}$$

Disjunktívna normálna forma pre kontradikciu (konštantná formula vždy nepravdivá) je tvorená disjunkciou konjunktívnych klauzúl, z ktorých každá obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, $\varphi_{DNF} \equiv \left(\underbrace{l \wedge \tilde{l}}_{0} \wedge \ldots\right) \vee \left(\underbrace{l' \wedge \tilde{l}'}_{0} \wedge \ldots\right) \vee \ldots \equiv 0$. Podobne, konjunktívna normálna forma pre tautológiu (konštantná formula vždy pravdivá) je tvorená konjunkciou disjunktívnych klauzúl, y ktorých každá obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, $\varphi_{KNF} \equiv \left(\underbrace{l \vee \tilde{l}}_{1} \vee \ldots\right) \wedge \left(\underbrace{l' \vee \tilde{l}'}_{1} \vee \ldots\right) \wedge \ldots \equiv 1$. Tieto zaujimavé vlastnosti môžeme zhrnúť do nasledujúcej vety.

Veta 1.2.
(1) Formula φ je kontradikcia práve vtedy, ak jej ekvivalentná disjunktívna normálna forma φ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.
(2) Formula φ je tautológiu práve vtedy, ak jej ekvivalentná konjunktívna normálna forma φ_{KNF} obsahuje v každej disjunjktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov.

Prvý alternatívny dôkaz vety 1.1, kde upriamime našu pozornosť najprv na konštrukciu ekvivalentnej formuly v disjunktívnom tvare. Budeme uvažovať len tie interpretácie premenných τ, ktoré vytvárajú jednotkovú pravdivostnú hodnotu formuly φ, t.j. pre dané τ platí $val_\tau(\varphi) = 1$. Podobne pre dané τ nové funkčné premenné (literály)

$$x_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i) = 1) \\ \neg x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i) = 0) \end{cases} \tag{1.11}$$

Konjunkcia týchto premenných môže byť chápaná ako pomocná Boolova funkcia

$$\psi_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{1.12}$$

Táto konjunkcia má jednotkovú funkčnú hodnotu (je pravdivá) len pre také hodnoty premenných, ktoré sú totožné s binárnymi hodnotami interpretácie τ, pre všetky ostatné hodnoty premenných je funkčná pravdivostná hodnota nulová. Potom disjunktívna forma funkcie φ_{DNF}, ktorá je ekvivalentná formule φ, $\varphi_{DNF} \equiv \varphi$, má tvar

$$\varphi_{DNF} = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{1.13}$$

kde disjunkcia beží cez všetky τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi) = 1$.

Analogickým spôsobom zostrojíme aj konjunktívnu formu φ_{KNF} formuly φ, kde $\varphi_{KNF} \equiv \varphi$. V tomto prípade budeme uvažovať len také interpretácie τ, ktoré majú nulovú pravdivostnú funkčnú hodnotu, t.j. pre dané τ platí $val_\tau(\varphi) = 0$. Definujme pre dané τ nové funkčné premenné (literály)

$$\tilde{x}_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i) = 0) \\ \neg x_i & (\text{ak } val_\tau(x_i) = 1) \end{cases} \tag{1.14}$$

Disjunkcia týchto premenných tvorí pomocnú Boolovu funkciu

$$\tilde{\psi}_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee \ldots \vee \tilde{x}_n^{(\tau)} \tag{1.15}$$

Konjunktívny tvar formuly φ je

$$\varphi_{KNF} = \bigwedge_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=0)}} \tilde{x}_1^{(\tau)} \vee \tilde{x}_2^{(\tau)} \vee \ldots \vee \tilde{x}_n^{(\tau)} \tag{1.16}$$

kde konjunkcia beží cez všetky špecifikácie τ, pre ktoré $val_\tau(\varphi)=0$.

To, akým spôsobom zostrojíme Boolovu funkciu, či v disjunktívnej alebo konjunktívnej forme, je určené počtom jednotkových resp. nulových funkčných hodnôt. Tak napr. ak v tabuľke sú dominantné nulové (jednotkové) funkčné hodnoty, potom je výhodné použiť konjunktívnu (disjunktívnu) normálnu formu, týmto výberom sa minimalizuje rozsah zostrojovanej formy. V prípade, keď tabuľka obsahuje približne rovnaký počet nulových a jednotkových funkčných hodnôt, konštrukcia Boolovej funkcie je približne rovnako obtiažna v oboch formách.

Tabuľka 1.9. Určenie dvoch formúl α a β pomocou funkčných hodnôt

#	x_1	x_2	x_3	α	β
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	0	1

Príklad 1.5. Vykonajte konštrukcia Boolových funkcií v disjunktívnej a/alebo konjunktívnej forme, ktoré sú určené funkčnými hodnotami uvedenými v tabuľke 1.8, metódou konštruktívneho dôkazu vety 1.1. V prvom kroku vykonáme konštrukciu formuly α, ktorej funkčné hodnoty sú určené v tab. 1.9 V tomto prípade počet výskytov jednotkových funkčných hodnôt je podstatne menší ako nulových hodnôt, preto konštrukciu vykonáme v disjunktívnej forme. Ku konštrukcii použijeme teda len riadky 3 a 6, interpretácie premenných sú $\tau_3=(x_1/0,x_2/1,x_3/0)$ a $\tau_6=(x_1/1,x_2/0,x_3/1)$. Príslušné konjunkcie $\psi_\tau(x_1,x_2,...,x_n)$ (2.6) majú tvar

$$\psi_{\tau_3}(x_1,x_2,x_3)=\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3$$
$$\psi_{\tau_6}(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3$$

Použitím (1.7) dostaneme konečný tvar zostrojovanej formy

$$\alpha=(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3)$$

V druhom kroku vykonáme konštrukciu konjuktívnej formy formuly β, ktorej funkčné hodnoty sú špecifikované tabuľkou 1.9. Príslušné interpretácie τ, ktoré sú priradené nulovým funkčným hodnotám majú tvar: $\tau_3=(x_1/0,x_2/1,x_3/0)$ a $\tau_7=(x_1/1,x_2/1,x_3/0)$. Priradené disjunkcie podľa (2.9) týmto interpretáciám sú

$$\omega_{\tau_3}(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee\neg x_2\vee x_3$$
$$\omega_{\tau_7}(x_1,x_2,x_3)=\neg x_1\vee\neg x_2\vee x_3$$

Použitím (1.7) dostaneme konečný tvar zostrojovanej konjuktívnej formy

$$\beta = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Druhý alternatívny dôkaz vety 1.1, použijeme metódu z príkladu 1.2. Táto metóda spočíva v tom, že formulu φ postupne prepisujeme do tvaru φ_{DNF} pomocou známych ekvivalencií výrokovej logiky, akými sú De Morganove zákony a distributívne zákony medzi disjunkciou a konjunkciou. Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom k syntaktickému stromu formuly φ. V tabuľke 1.10 sú uvedené základné formuly pre prepis do tvaru DNF.

Tabuľka 1.10. Elementárne transformácia prepisu formuly φ na φ_{DNF} .

#	Pôvodná formula		Transformovaná formula
1	$(\alpha \wedge \beta)$	$\to$	$(\alpha) \wedge (\beta)$
2	$(\alpha \vee \beta)$	$\to$	$(\alpha) \vee (\beta)$
3	$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\to$	$\neg(\alpha) \vee (\beta)$
4	$(\alpha \equiv \beta)$	$\to$	$(\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)) \vee ((\alpha) \wedge (\beta))$
5	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\to$	$\neg(\alpha) \vee \neg(\beta)$
6	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\to$	$\neg(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
7	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\to$	$(\alpha) \wedge \neg(\beta)$
8	$\neg(\alpha \equiv \beta)$	$\to$	$(\neg(\alpha) \wedge (\beta)) \vee ((\alpha) \wedge \neg(\beta))$
9	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\to$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
10	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\to$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Prvé štyri riadky tejto tabuľky obsahujú transformácie elementárnych logických spojok do tvaru konjunkcie alebo disjunkcie literálov. Ďalšie štyri transformácie 5-8 obsahujú transformácie negácie elementárnych logických spojok do tvaru konjunkcie alebo disjunkcie literálov. Posledné dve transformácie 9 a 10 reprezentujú použitie distributívnzch zákonov medzi konjunkciou a disjunkciou, ktoré musia byť použité k zjednodušeniu upravovanej formuly.

Príklad 1.6. Vykonajte transformáciu formuly

$$\varphi = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

do tvaru DNF pomocou elementárnych transformácií z tabuľky 1.10. Tento prepis bude vykonaný pre názornosť ako postupnosť elementárnych krokov:

Krok 1: Centrálna implikácia (tvoriaca koreň príslušného syntaktického stromu) v φ je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 3

$$\varphi = \underbrace{(p \wedge q) \vee (q \wedge r)}_{\alpha} \Rightarrow \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{\beta}$$

$$\downarrow$$

$$\neg((p \wedge q) \vee (q \wedge r)) \vee (q \Rightarrow r)$$

Krok 2: Centrálna spojka disjunkcie na ľavej strane je prepísaná pomocou elementárnej transformácie 6 a centrálna spojka na pravej strane je prepísaná pomocou 3

$$\neg\left(\underbrace{(p \wedge q)}_{\alpha} \vee \underbrace{(q \wedge r)}_{\beta}\right) \vee \left(\underbrace{q}_{\gamma} \Rightarrow \underbrace{r}_{\delta}\right)$$

$$\downarrow$$

$$(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg q \vee r)$$

Krok 3. Centrálne spojky konjunkcie sú prepísané pomocou 5

$$\left(\neg\left(\underbrace{p}_{\alpha} \wedge \underbrace{q}_{\beta}\right) \wedge \neg\left(\underbrace{q}_{\gamma} \wedge \underbrace{r}_{\delta}\right)\right) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (\neg q \vee r)$$

Krok 4. Centrálna spojka konjunkcie na ľavej strane je roznásobená dvojnásobným použitím elementárnej transformácie 9

$$\left(\underbrace{(\neg p \vee \neg q)}_{\alpha} \wedge \left(\underbrace{\neg q}_{\beta} \vee \underbrace{\neg r}_{\gamma}\right)\right) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\left(\underbrace{\neg p}_{\alpha} \vee \underbrace{\neg q}_{\beta}\right) \wedge \left(\underbrace{\neg q}_{\gamma}\right)\right) \vee \left(\left(\underbrace{\neg p}_{\alpha'} \vee \underbrace{\neg q}_{\beta'}\right) \wedge \left(\underbrace{\neg r}_{\gamma'}\right)\right) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\downarrow$$

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q) \vee (r)$$

To znamená, že výsledná formula φ_{DNF} je určená poslednou formulou z predchádzajúcej schémy formúl

$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q) \vee (r)$$

V kapitole X bude ukázané, že tento proces transformácie ľubolnej formuly φ môže byť názorne reprezentovaný koreňovým stromom nazývaným sémantické tablo.

Pomocou tohto jednoduchého ilustratívneho príkladu sme ukázali, že v princípe každá formula výrokovej logiky môže byť prepísaná do ekvivalentného DNF tvaru pomocou postupnosti elementárnych transformácií z tabuľky 1.10. Spôsob dôkazu vety 1.2 môže byť charakterizovaný ako úplná indukcia vzhľadom k syntaktickému stromu danej formuly. Idúc zhora nadol, vždy pomocou vhodnej elementárnej transformácie z tabuľky 1.10 vykonáme vhodný prepis formuly tak, aby bol bližšie k tvaru DNF formuly. Poznamenajme, že analogický dôkaz môže byť vykonaný aj pre konštrukciu KNF formuly.

Na záver tejto kapitoly upriamime našu pozornosť na rôzne podmnožiny logických spojok z celkovej množiny $S=\{\neg,\Rightarrow,\wedge,\vee,\equiv,\uparrow,\downarrow\}$ z pohľadu podmienky ich úplnosti, t.j. schopnosti vyjadriť ľubovoľnú výrokovú formulu (Boolovu funkciu) len pomocou niektorých logických spojok tvoriacich podmnožinu $S'\subset S$.

Veta 1.2.
(1) *Podmnožina* $S'=\{\neg,\wedge,\vee\}$ *je úplná,*
(2) *podmnožiny* $S'=\{\neg,\wedge\}$ *a* $S''=\{\neg,\vee\}$ *sú uplné,*
(3) *podmnožina* $S'=\{\neg,\Rightarrow\}$ *je úplná a*
(4) *podmnožiny* $S'=\{\uparrow\}$ *a* $S''=\{\downarrow\}$ *sú uplné.*

Vlastnosť (1) vyplýva z vety (3.1), podľa ktorej, každá výroková formula môže byť vyjadrená pomocou ekvivalentnej NDF alebo NKF. Vlastnosť (2) vyplýva z už dokázanej vlastnosti (1) a De Morganových zákonov výrokovej logiky . Vlastnosť (3) vyplýva z vlastnosti (2) špecifikovanej pre podmnožinu $S''=\{\neg,\vee\}$ a zo zákona nahradenia implikácie výrokovej logiky $(p\Rightarrow q)\equiv(\neg p\vee q)$. Konečne, vlastnosť (4) vyplýva z vlastností Peircovho a Shafferovho symbolu, ktorí boli diskutované v tejto kapitole v texte za tabuľkou 3.2.

Cvičenia

Cvičenie 1.1. Prepíšte z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky:

(a) *Jano pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
(b) *Eva pôjde na výlet alebo Viera nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
(c) *Ak Viera pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a disjunkcie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
(d) Ak Viera alebo Jano pôjdu na výlet, potom Fero pôjde na výlet a Eva nepôjde na výlet; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
(e) *Viera na výlet pôjde a Eva na výlet nepôjde*; (1) vyjadrite túto vetu konjunkcie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.

Cvičenie 1.2. Negujte tieto výroky.

(a) Budem sa prechádzať alebo si budem spievať.
(b) Jano nefandí ani Slovanu ani Interu.
(c) Ak je streda, potom máme schôdzu.
(d) Ak sa budem moc učiť, tak pôjdem študovať na vysokú školu.
(e) Ak sa budem moc učiť a budem mať trochu šťastia, potom urobím skúšku z logiky.
(f) Dám ti facku, ak ma oklameš.

(g) Ak bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto, potom pôjdeme na výlet a budeme sa kúpať.

Cvičenie 1.3. Zostrojte syntaktické stromy formúl, zostrojte podformuly daných formúl:

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,

(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$,

(e) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$,

(f) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow q$.

Cvičenie 1.4. Prečo uvedené výrazy nie sú formuly výrokovej logiky?

(a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\vee (q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \looparrowright q)$.

Cvičenie 1.5. Preverte pomocou tabuľkovej metódy, ktoré formuly z cvičenia 1.3 sú tautológie, kontradikcie a splniteľné.

Cvičenie 1.6. Použitím tabuľkovej metódy určite pre ktoré interpretácie premenných τ sú výrokové formuly splniteľné:

(a) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$,

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$.

Cvičenie 1.7. Preverte pomocou tabuľkovej metódy zákony výrokovej logiky (1-13) zo str. 10-11.

Cvičenie 1.8. Dokážte tieto ekvivalencie:

(a) $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$,

(b) $(p \vee q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$,

(c) $(p \wedge q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$,

(d) $(p \vee q) \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.

Cvičenie 1.9. Pretransformujte do DNF a KNF výrokové formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$,

(b) $\neg(p \wedge q \wedge q) \Rightarrow p$,

(c) $(((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p)$.

Cvičenie 1.10. Zostrojte DNF a KNF Boolovej funkcie určenej tabuľkou

#	x_1	x_2	x_3	α
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Cvičenie 1.11. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčin dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \times\alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_4\ \beta_3\ \beta_2\ \beta_1 \end{array}$$

Cvičenie 1.12. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčet dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \end{array}$$

Cvičenie 1.13. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme konjuktívnej a disjunktívnej normálnej formy
(a) $x=y=0, z=1$,
(b) $x=0, y=1, z=0$,
(c) $y=z=1$.

Cvičenie 1.14. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným *x*, *y* a *z*, ktorá je ekvivalentná s funkciou
(a) $F(x,y,z)=x+y+\overline{z}$,
(b) $F(x,y,z)=x\overline{z}$.

Literatúra

[1] Gahér, F.: *Stoická sémantika a logika. Z pohľadu intenzionálnej logiky*. Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2006.

[2] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[3] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Algebra a diskrétna matematika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008.

[4] Peregrin, J: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[5] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[6] Svoboda, V., Peregrin. J.: *Od jazyka k logice. Filozofický úvod do moderní logiky*. Academia, Praha, 2009.

[7] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[8] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.

2. kapitola

Výroková logika II – Logický a sémantický dôsledok, teória a model, korektnosť a úplnosť

2.1 Odvodzovanie formúl výrokovej logiky, logický dôsledok, syntaktický prístup

Logický dôsledok je presne špecifikovaný spôsob odvodzovania logických zákonov (tautológií), pričom sa vychádza z niekoľko málo vopred východiskových zákonov – axióm (tautológií), z ktorých pomocou presne špecifikovaného spôsobu dôkazu zostrojíme nové zákony (tautológie).

V prvom kroku uvedieme tri základné pravidlá pre konštrukciu logického dôsledku:

(1) ***Pravidlo modus ponens*** (pravidlo odlúčenia) . Ak formuly φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ sú pravdivé, potom je pravdivá aj formula ψ. Toto pravidlo sa niekedy zapisuje aj ako schéma

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \tag{2.1}$$

(2) ***Pravidlo substitúcie***. Nech φ je tautológia, ktorá obsahuje výrokové premenné $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Nech $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ je množina ľubovoľných formúl (ktorých počet je rovnaký ako počet premenných v φ). Nech formula ψ vznikne z φ tak, že každá premenná p_i je substituovaná formulou ψ_i, pre $i = 1, 2, ..., n$

$$\psi = \varphi(p_1/\psi_1, p_2/\psi_2, ..., p_n/\psi_n) \tag{2.2a}$$

Potom takto vytvorená formula ψ je opäť tautológiou.

(3) ***Pravidlo nahradenia ekvivalentých podformúl***. Nech φ je tautológia a nech ψ vznikne z φ substitúciou jej ľubovoľnej podformuly $\varphi' \subset \varphi$ formulou ψ', ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi' \equiv \psi'$

$$\psi = \varphi(\varphi'/\psi') \tag{2.2b}$$

potom aj ψ je tautológia.

Ak by sme boli striktne dôslední, posledné dve pravidlá (2.1-2) môžeme považovať za nadbytočné, pretože formálny systém je definovaný nad „metasymbolmi", kde napr. $\varphi \Rightarrow \psi$ reprezentuje nekonečne veľkú (ale spočítateľnú) množinu formúl – schém, kde komponenty implikácie φ a ψ môžu byť neatomické formule výrokovej logiky (napr. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$).

Príklad 2.1. Pravidlo substitúcie budeme ilustrovať tautológiou $\varphi(p,q) = \neg p \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$, vykonáme túto substitúciu premenných p/p a $q/(q \vee r)$, potom tautológia φ má tvar $\psi = \neg p \Rightarrow ((p \vee q \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$.

K ilustrácii pravidla nahradenia ekvivalentných podformúl uvažujme tautológiu $((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$. Každú jej disjunkciu nahradíme príslušnou implikáciou (využijeme tautológiu $(p \vee q) \equiv (\neg p \Rightarrow q)$), dostaneme

$$((\neg p \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)))$$

na záver vykonáme substitúciu $p/\neg p$ vyberieme si podformulu $p \vee q$, nahradíme ju za ekvivalentnú formulu $\overline{p} \Rightarrow q$, týmto spôsobom zostrojíme konečnú tautológiu

$$((p \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)))$$

ktorú môžeme interpretovať tak, že implikácia zľava je distributívna vzhľadom ku konjunkcii.

Definícia 2.1.

(1) *Formula* φ *sa nazýva* ***bezprostredným logickým dôsledkom*** *množiny formúl* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *vtedy a len vtedy, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formuly z* Φ.

(2) *Formula* φ *sa nazýva* ***logický dôsledok*** *množiny formúl* Φ *(čo označíme* $\Phi \vdash \varphi$ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi \in \Phi$ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(3) *Konečná postupnosť formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ *sa nazýva* ***dôkaz*** *formuly* φ *z množiny* Φ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi = \varphi_p$ *a každá formula* φ_i *z tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z* Φ *alebo formúl* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}$.

Negáciou relácie $\Phi \vdash \varphi$ dostaneme novú reláciu $\Phi \nvdash \varphi =_{def} \neg(\Phi \vdash \varphi)$, ktorú čítame ako „nie je pravda, že formula φ logicky vyplýva z množiny Φ“ , čo môžeme zjednodušiť ako „formula φ logicky ***ne***vyplýva z množiny Φ“. K lepšiemu pochopeniu tejto definície uvedieme tento jednoduchý ilustračný príklad.

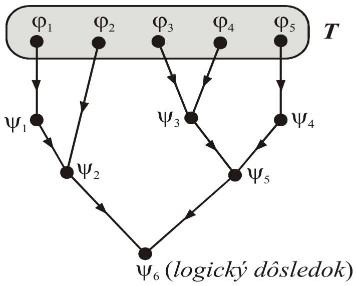
Príklad 2.2. Nech $\Phi = \{p \vee \neg p, p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\}$. Na 2. formulu z Φ aplikujeme 2. pravidlo (substitúcie) tak, že premennú q nahradíme 1. formulou z Φ, t. j. vo formule $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ vykonáme substitúciu $p/(p \vee \neg p)$, dostaneme

$$(p \vee \neg p) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \vee \neg p))$$

Teraz použijeme 1. pravidlo (modus ponens) vzhľadom k 1. formule z Φ

$$\frac{\begin{array}{l}(p \vee \neg p) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \vee \neg p)) \\ p \vee \neg p\end{array}}{q \Rightarrow (p \vee \neg p)}$$

Môžeme teda povedať, že formula $\varphi = (q \Rightarrow (p \vee \neg p))$ je logickým dôsledkom množiny formúl Φ, t. j. $\Phi \vdash q \Rightarrow (p \vee \neg p)$.



Obrázok 2.1. Znázornenie postupnej tvorby logického dôsledku $\Phi \vdash \psi_6$, kde $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_5\}$

Termín „logický dôsledok" je ilustrovaný obr. 2.1, kde logický dôsledok ψ_6 môže byť rekuretne špecifikovaný takto

$$\psi_6 = O\big(\big(O(\varphi_1), \varphi_2\big), O\big(O(\varphi_3, \varphi_4), O(\varphi_5)\big)\big) \tag{2.3a}$$

kde O je unárny/binárny operátor reprezentujúci pravidlá (2.1-3). Postupnosť formúl reprezentuje logický dôkaz formuly ψ_6 z množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_5\}$

$$\psi_1 \to \psi_2 \to \psi_3 \to \psi_4 \to \psi_5 \to \boxed{\psi_6} \tag{2.3b}$$

kde výsledok ψ_6 je uvedený v rámčeku.

Definícia 2.2.

(1) Množina predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sa nazýva ***konzistentná*** vtedy a len vtedy, ak *existuje* taká formula ψ, že platí buď $\Phi \vdash \psi$ alebo (s vylúčením – exklúziou, $\oplus$) $\Phi \vdash \neg\psi$, čo formálne vyjadríme formulou

$$\big((\Phi \vdash \psi) \oplus (\Phi \vdash \neg\psi)\big) \equiv \left(\Phi \vdash \underbrace{\psi \oplus \neg\psi}_{1}\right)$$

(2) Negáciou vyššie uvedenej definície konzistentnosti dostaneme, že množina predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sa nazýva ***nekonzistentná*** vtedy a len vtedy, ak pre *každú* dvojicu formuly a jej negácie, ψ a $\neg\psi$, platí, že ich relácie logického vyplývania z predpokladov Φ sú logicky ekvivalentné, čo formálne vyjadríme formulou

$$(\Phi \vdash \psi) \equiv (\Phi \vdash \neg\psi) \equiv \left(\Phi \vdash \underbrace{\psi \equiv \neg\psi}_{0}\right).$$

Na základe značenia používaného v tejto definícii konzistentnú množinu (teóriu) označíme ako $\Phi \vdash 1$, a podobne, nekonzistentú množinu označíme $\Phi \vdash 0$. Pri konštrukcii druhej časti definície sme použili formulu $\neg(p \oplus q) \equiv (p \equiv q)$.

Pri odvodzovaní s výhodou môžeme využívať nielen pravidlá odvodzovania, ale aj formuly o ktorých vieme, že sú logické zákony (tautológie). Takýchto formúl je nekonečne mnoho, preto z nich vyberieme niekoľko málo, pričom našou snahou bude ukázať, že z takto vybraných je možné odvodiť všetky ostatné logické zákony (tautológie). Tieto základné formuly nazveme axiómy V našich nasledujúcich úvahách budeme využívať týchto desať axióm (Hilbertov systém axióm):

Ax_1 $\quad p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (2.4a)

Ax_2 $\quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ (2.4b)

Ax_3 $\quad (p \wedge q) \Rightarrow p$ (2.4c)

Ax_4 $\quad (p \wedge q) \Rightarrow q$ (2.4d)

Ax_5 $\quad p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$ (2.4e)

Ax_6 $\quad p \Rightarrow (p \vee q)$ (2.4f)

Ax_7 $\quad q \Rightarrow (p \vee q)$ (2.4f)

Ax_8 $\quad (p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$ (2.4g)

Ax_9 $\quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$ (2.4h)

Ax_{10} $\quad \neg\neg p \Rightarrow p$ (2.4i)

Odvodzovanie z predpokladu Φ sa chápe ak odvodzovanie z rozšírenej množiny Φ o tieto axiómy, $\Phi \cup \{Ax_1, Ax_2, ..., Ax_{10}\}$. Potom budeme očakávať, že logické zákony sú všetky formuly, ktoré sú dokázateľné z prázdnej množiny predpokladov Φ.

Príklad 2.3. Dokážte $\vdash p \Rightarrow p$.

1. krok dôkazu. V Ax_1 vykonáme substitúciu $q/(p \Rightarrow p)$, dostaneme $p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.
2. krok dôkazu. V Ax_2 vykonáme substitúciu $q/(p \Rightarrow p)$ a r/p, dostaneme $(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$
3. krok dôkazu. Aplikujeme modus ponens na formuly z 2. a 1. kroku, dostaneme $(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
4. krok dôkazu. V Ax_1 vykonáme substitúciu q/p, dostaneme $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
5. krok dôkazu. Aplikujeme modus ponens na formuly z 3. a 4. kroku, dostaneme $p \Rightarrow p$, čo bolo treba dokázať.

Príklad 2.4. Dokáže $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$.

1. $p \Rightarrow q$ (predpoklad)
2. $q \Rightarrow r$ (predpoklad)
3. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ (Ax_1 , substitúcia $p/(q \Rightarrow r)$ a q/p)
4. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (aplikácia *mp* na 2. a 3.)
5. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ (Ax_2).
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (aplikácia *mp* na 4 a 5)
7. $p \Rightarrow r$ (aplikácia *mp* NA 1. A 6.)

Postupnosť formúl tvoriacich dôkaz $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$ obsahuje sedem formúl (dôkaz má sedem krokov) $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_7$, ktoré sú určené takto:

$\varphi_1 = p \Rightarrow q$, $\varphi_2 = q \Rightarrow r$, $\varphi_3 = (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$,

$\varphi_4 = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $\varphi_5 = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,

$\varphi_6 = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, $\varphi_7 = p \Rightarrow r$.

Posledný člen tejto postupnosti φ_7 je dokazovaná formula, prvých šesť členov buď patrí do predpokladov T odvodenia alebo sú to axiómy upravené vhodnou substitúciou alebo vznikli aplikáciou modus ponens na predchádzajúce formuly postupnosti.

Poznamenajme, že už tak jednoduchý dôkaz, akou je formula $\vdash p \Rightarrow p$, vyžaduje 5 krokov. Prácnosť dôkazov zložitejších formúl rýchle rastie čo sa týka počtu jednoduchých elementárnych krokov. Preto je veľmi dôležité vo výrokovej logike nájsť metódu, ktorá podstatne zjednodušuje štruktúru dôkazu. Toto zjednodušenie poskytuje veta o dedukcii, ktorá špecifikuje vzťah medzi dokázateľnosťou formuly ψ z predpokladov obsahujúcich pomocný predpoklad φ.

Veta 2.1. (o dedukcii).
(1) *Nech* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *je množina predpokladov (teória) a* φ, ψ *sú nejaké dve formuly, potom* $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *platí práve vtedy a len vtedy (vtt) ak* $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$

$$(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \equiv (\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi) \tag{2.5a}$$

(2) *Vlastnosť* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \vdash \psi$ *platí vtedy a len vtedy, ak* $\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$

$$(\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \vdash \psi) \equiv (\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi) \tag{2.5b}$$

Formula (2.5a) znamená, že ak z rozšírených predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \cup \{\varphi\}$ vyplýva logický dôsledok ψ, potom táto vlastnosť je ekvivalentná tomu, že z pôvodných predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ vyplýva logický dôsledok $\varphi \Rightarrow \psi$. Dôkaz tejto vlastnosti vykonáme v dvoch nezávislých krokoch:

(1) Predpokladajme, že platí $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, potom existuje (na základe definície 2.2) postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, kde $\alpha_p = \varphi \Rightarrow \psi$, ktorá reprezentuje dôkaz formuly $\varphi \Rightarrow \psi$

z predpokladov teórie Φ. Ak rozšírime teóriu Φ o dodatočný predpoklad φ, potom použitím modus ponens na formulu $\alpha_p = \varphi \Rightarrow \psi$ a dodatočný predpoklad φ dostaneme formulu ψ. Týmto sme dokázali, že predpoklad $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$ implikuje dôsledok $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, čo bolo potrebné dokázať.

(1′) Predpokladajme, že platí $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, potom existuje (na základe definície 2.2) postupnosť formúl $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$, kde $\beta_q = \psi$, ktorá reprezentuje dôkaz formuly ψ z predpokladov rozšírenej teórie $\Phi \cup \{\varphi\}$. Pre zjednodušenie nášho dôkazu predpokladajme, že posledná formula $\beta_q = \psi$ vznikla aplikáciou modus ponens na dodatočný predpoklad φ a predchádzajúcu (vzhľadom k β_q) formulu $\beta_i = \varphi \Rightarrow \psi$, kde $i < q$. Týmto sme dokázali, že predpoklad $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implikuje dôsledok $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, čo bolo potrebné dokázať. Spojením týchto dvoch častí dôkazu dostaneme, že relácia $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ je ekvivalentná relácii $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, čím sme zavŕšili dôkaz prvej časti vety o dedukcii.

(2) Druhú časť vety (2.5b) dokážeme *n*-násobným použitím 1. časti vety o dedukcii, dostaneme $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow ...(\varphi_n \Rightarrow \varphi))$, čo môžeme prepísať pomocou ekvivalentných úprav do tvaru $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) \vee \varphi$, ktorý je ekvivalentný s dokazovanou formulou $\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$. Pretože úpravy používali len ekvivalentné úpravy, dokázaná implikácia platí v oboch smeroch. Pre jednoduchosť študujme formulu $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$, postupným použitím troch známych ekvivalencií výrokovej logiky $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$, $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$ a $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, dostaneme postupnosť ekvivalentných formúl: $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$, $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\neg\varphi_2 \vee \varphi)$, $\vdash \neg\varphi_1 \vee (\neg\varphi_2 \vee \varphi)$, $\vdash (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \vee \varphi$, $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi$, $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi$, čo bolo potrebné dokázať.

Veta 2.2. Rôzne modifikácie vety o dedukcii sú tieto:

(a) $(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \wedge (\vdash \varphi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. v množine predpokladov Φ nie je potrebné uvádzať formuly, ktoré logicky vyplývajú z axióm (logické zákony).

(b) $(\Phi \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi)$, t. j. pridanie ďalších predpokladov nemôže zmeniť dokázateľnosť formuly.

(c) $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. dôsledok predpokladov nie je potrebné uvádzať medzi predpokladmi.

(d) $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\{\varphi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. dôsledok dôsledku množiny predpokladov je taktiež dôsledkom množiny predpokladov.

(e) $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\Phi \vdash \psi) \wedge (\{\varphi, \psi\} \vdash \alpha) \Rightarrow (\Phi \vdash \alpha)$, dôsledok dôsledkov množiny predpokladov je taktiež dôsledkom množiny predpokladov.

(f) Ak $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\Phi \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \varphi \wedge \psi)$, t. j. konjunkcia dôsledkov množiny predpokladov je taktiež dôsledkom množiny predpokladov.

(h) $(\Phi \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \alpha)) \equiv (\Phi \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \alpha))$, t. j. na poradí predpokladov nezáleží.

(i) $\Phi \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \alpha$ práve vtedy, ak súčasne $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ a $\Phi \cup \{\psi\} \vdash \alpha$. Veta o dôkaze pomocou analýzy jednotlivých prípadov.

(j) $(\Phi \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \alpha) \equiv (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha) \vee (\Phi \cup \{\psi\} \vdash \alpha)$, t. j. ak súčasne $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ alebo $\Phi \cup \{\psi\} \vdash \alpha$.

(k) $(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \wedge (\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. formula φ je neutrálna vzhľadom k formule ψ.

Doporučujeme čitatelovi, aby vykonal dôkaz týchto vlastností.

Veta o dedukcii 2.1 umožňuje podstatné skrátenie dôkazov formúl výrokovej logiky. Môžeme ju chápať ako nové (štvrté) pravidlo odvodzovania (pozri výrazy (2.1-3)). V čom spočíva výhodnosť tejto vety pri dôkaze formúl? Ak postupujeme len podľa pravidiel (2.1-3) musíme striktne dokázať každú formulu postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ v príslušných predchádzajúcich krokoch dôkazu. Ak použijeme vetu o dedukcii ako nové pravidlo dôkazu, môžeme postulovať ad-hoc dve formuly φ a ψ, ak sa nám podarí dokázať $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, potom automaticky platí aj $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, t.j. implikácia $\varphi \Rightarrow \psi$ je logickým dôsledkom teórie (množiny predpokladov) Φ. Hovoríme, že formula φ je ***dodatočný predpoklad***, jej zavedenie do predpokladov nazývame ***aktivácia*** dodatočného predpokladu. Jej prenos do implikácie sa nazýva ***deaktivácia*** dodatočného predpokladu; po deaktivácii už formulu φ nemôžeme využívať v rámci daného dôkazu.

Príklad 2.5. Pomocou vety o indukcii dokážte formulu hypotetického sylogizmu $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

1. p	aktivácia 1. pomocného predpokladu
2. $p \Rightarrow q$	aktivácia 2. pomocného predpokladu
3. $q \Rightarrow r$	aktivácia 3. pomocného predpokladu
4. q	použitie pravidla "modus ponens" na 1 a 2
5. r	použitie pravidla "modus ponens" na 3 a 4
6. $p \Rightarrow r$	deaktivácia pomocného predpokladu 1
7. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	deaktivácia pomocného predpokladu 3
8. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	deaktivácia pomocného predpokladu 2, QED

Tento dôkaz môžeme taktiež prezentovať v zjednodušenom tvare $\{p \to q, q \to r\} \vdash (p \to r)$, k jej dôkazu predpoklady rozšírime o pomocný predpoklad $\{p\}$, $\{p \to q, q \to r\} \cup \{p\} \vdash (r)$, Túto formulu logického vyplývania ľahko dokážeme použitom 2-krát pravidla modus ponens. Na záver dôkazu vykonáme deaktiváciu pomocného predpokladu $\{p\}$, čím dostaneme dokazovanú formulu logického vyplývania.

Príklad 2.7. Pomocou vety o indukcii dokážte formulu $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

1. $p \Rightarrow q$	aktivácia 1. pomocného predpokladu	
2. $\neg q$	aktivácia 2. pomocného predpokladu	
3. $\neg p$	použitie pravidla "modus tollens" na 1 a 2	
4. $\neg q \Rightarrow \neg p$	deaktivácia pomocného predpokladu 2	
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$		deaktivácia pomocného predpokladu 1, QED

2.2 Sémantický dôsledok, sémantický prístup k odvodzovaniu formúl,

Aký je vzťah medzi axiomatickou metódou výstavby výrokovej logiky a sémantickým prístupom verifikácia formúl pomocou ich pravdivostných hodnôt? Dokážeme, že tieto dva prístupy sú ekvivalentné, každá formula, ktorá je odvoditeľná z daného súboru axióm použitým pravidiel odvodenia (hlavne *modus ponens*) je aj tautológia (pravdivá pre každú interpretáciu jej premenných) a naopak, každá tautológia je je aj odvoditeľná z axióm pomocou pravidiel odvodenia. Toto je unikátna vlastnosť formálneho systému, kde sa takto prekrýva syntax so sémantikou, kde nemôžeme striktne od seba oddeliť tieto dva prístupy. Táto vlastnosť má významný dopad na výrokovú logiku, to či nejaké formula je logickým zákonom (teoréma) môžeme jednoducho testovať napr. pomocou tabuľkovej metódy, nemusíme našu pozornosť neustále obracať na pomerne ťažkopádne techniky logického dôkazu.

Definícia 2.3. *Množina formúl,* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *sa nazýva* ***teória*** *práve vtedy, ak pre množinu* Φ *existuje taká interpretácia* τ*, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé z množiny* Φ*, pre* $i = 1,2,...,n$*, potom táto interpretácia* τ *sa nazýva* ***model teórie****. Množina* $[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_b\} \subseteq \{0,1\}^n$ *obsahuje všetky modely teórie* Φ *.Teória* Φ *sa nazýva* ***konzistentná****, ak má model (*$[\![\Phi]\!] \neq \emptyset$*). Ak teória nemá model (*$[\![\Phi]\!] = \emptyset$*), potom sa nazýva* ***nekonzistentná****.*

Príklad 2.8. Nech teória Φ obsahuje tri formuly

$$\Phi = \{\varphi_1 = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), \varphi_2 = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \varphi_3 = (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} \quad (*)$$

chceme zistiť, či táto teória má model. Pomocou tabuľkovej metódy určíme pravdivostné hodnoty týchto formúl pre všetky možné interpretácie, pozri Tabuľku 2.1.

Tabuľka 2.1. Pravdivostné hodnoty formúl z teórie (*).

p	q	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Z tabuľky 2.1 vyplýva, že existuje dve interpretácie premenných, $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_2 = (p/1, q/1)$, pre ktoré sú všetky formuly z Φ pravdivé, t.j. interpretácie τ_1 a τ_2 sú modely teórie Φ, $[\![\Phi]\!] = \{\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2\}$. Môžeme teda povedať, že teória Φ je konzistentná, čo vyplýva priamo zo skutočnosti, že má model.

Definícia 2.4. *Formula* φ *sa nazýva* ***sémantický dôsledok teórie*** Φ *(čo označíme* $\Phi \vDash \varphi$*) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie* Φ *je aj modelom formuly* φ *(t.j. formula* φ *je v* $[\![\Phi]\!]$ *pravdivá)*

$$(\Phi \vDash \varphi) =_{def} \left(\textit{pre každé } \boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]\right)\left(val_\tau(\varphi) = 1\right) \tag{2.6}$$

Majme teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, potom pre každú interpretácia τ, ktorá je modelom teórie Φ platí, že pravdivostné hodnoty všetkých formúl sú 1, $val_\tau(\varphi_i) = 1$. Nech φ je sémantickým dôsledkom teórie Φ, potom pre každý model – interpretáciu τ platí: $val_\tau(\varphi) = val_\tau(\varphi_i) = 1$, pre $i = 1, 2, ..., n$.

Príklad 2.9. Nech teória Φ je definovaná rovnako ako v príklade 2.1, má dva modely určené interpretáciami premenných $\tau_1 = (p/0, q/0)$ a $\tau_2 = (p/1, q/1)$. Uvažujem formulu φ v tvare $p \wedge q$, potom táto formula nie je sémantickým dôsledkom teórie Φ, pretože len pre model τ_2 je formula pravdivá, $val_{\tau_2}(\varphi) = 1$, pre model τ_1 už nie je pravdivá, $val_{\tau_1}(\varphi) = 0$. Uvažujme iný tvar formuly $\varphi = p \equiv q$, pre túto formulu platí $val_{\tau_1}(\varphi) = val_{\tau_2}(\varphi) = 1$, to znamená, že táto formula $\varphi = p \equiv q$ je sémantickým dôsledkom danej teórie $(*)$

$$\{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} \vDash (p \equiv q)$$

Nech $\Phi = \varnothing$ je prázdna teória (neobsahuje žiadnu formulu), formálne môžeme teda povedať, že ľubovoľná interpretácia τ je modelom tejto teórie. Ak formula φ je tautológia (pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi) = 1$), potom $\varnothing \vDash \varphi$, alebo jednoduchšie $\vDash \varphi$. Toto označenie tautológie sme už bolo použité v definícii 1.4.

Veta 2.2. *Nech* Φ *je teória a* φ, ψ *sú formuly. Ak súčasne platí* $\Phi \vDash \varphi \Rightarrow \psi$ *a* $\Phi \vDash \varphi$*, potom* $\Phi \vDash \psi$.

Z predpokladov vety vyplýva, že existuje taký model τ teórie Φ, že formuly $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ sú pravdivé, $val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = val_\tau(\varphi) = 1$, potom z vlastností implikácie vyplýva (pozri tabuľku 1.1), že platí aj $val_\tau(\psi) = 1$. To znamená, že formula ψ je sémantickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \vDash \psi$, čo bolo potrebné dokázať.

Veta 2.3. *Nech formula* φ *je sémantickým dôsledkom teórie* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vDash \varphi$, *potom formula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ je tautológia.*

Ak existuje taká interpretácia τ, že $val_\tau\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi\right) = 0$, potom musí súčasne platiť $val_\tau\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\right) = 1$ a $val_\tau\left(\varphi\right) = 0$, čo je však v protiklade s predpokladom vety, QED.

Predpokladajme, že teória Φ je nekonzistentná, t.j. nemá model, potom pre každú interpretáciu premenných τ platí $val_\tau\left(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\right) = 0$. To znamená, že pre ľubovoľnú interpretáciu **τ** je výrok $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ pravdivý, čiže táto formula je tautológia, tým sme dokázali, že *pre nekonzistentnú teóriu Φ každá formula φ je jej logickým dôsledkom.*

.

Príklad 2.10. Nech $\Phi = \left\{p \wedge \neg p\right\}$ je teória obsahujúca jednu formulu - kontradikcia, ktorá je pre každú pravdivostnú hodnotu premennej *p* je nepravdivá, $val_{p=0,1}\left(p \wedge \neg p\right) = 0$, potom však formula $\left(p \wedge \neg p\right) \Rightarrow \varphi$ je tautológiou, čiže platí $\left\{p \wedge \neg p\right\} \models \varphi$.

2.3 Konštrukcia sémantického dôsledku pomocou modelu teórie

Nech $[\![\Phi]\!]$ je model teórie $\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right\}$, ktorý obsahuje *a* interpretácií premenných

$$[\![\Phi]\!] = \left\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a\right\}$$

Tento model môžeme zostrojiť pomocou tabuľkovej metódy, ktorá je aplikovaná separátne pre každú formulu z teórie Φ. Predpokladajme, že poznáme množinu $[\![\Phi]\!]$, potom môžeme upriamiť našu pozornosť na konštrukciu formuly φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$, t. j. je sémantickým dôsledkom teórie Φ. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} = \left(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a\right) \in [\![\Phi]\!]$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & \left(ak\ \tau_i = 1\right) \\ \neg p_i & \left(ak\ \tau_i = 0\right) \\ 1 & \left(ak\ \tau_i = \#\right) \end{cases} \tag{2.7}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (1.11-13))

$$\psi_\tau\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge p_n^{(\tau)} \tag{2.8}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \bigvee_{\tau \in [\![\Phi]\!]} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge p_n^{(\tau)} \tag{2.9}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$

$$\left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]\right)\left(val_\tau\left(\varphi\right) = 1\right) \tag{2.10}$$

Týmto sme dokázali, že formula (2.9) je sémamtickým dôsledkom logický dôsledok teórie Φ, t. j. $\Phi \models \varphi$.

Veta 2.4.
Ak teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je konzistentná, t. j. $[\![\Phi]\!] \neq \emptyset$, potom môžeme zostrojiť pomocou (12) takú formulu φ, ktorá je sémantickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \models \varphi$.

Pomocou tejto vety môžeme zostrojiť „minimálny tvar“ formuly φ, ktorá sémantický vyplýva z teórie Φ. Táto formula môže byť rozšírená do tvaru formuly φ_{ext}, ktorá taktiež sémantický vyplýva z teórie Φ

$$\varphi_{ext} = \varphi \vee \chi \tag{2.11}$$

kde χ je ľubovoľná formula. Ľahko sa presvedčíme o tom, že aj rozšírená formula φ_{ext} pre ľubovoľné χ. Pre každé $\tau \in [\![\Phi]\!]$ a pre každú formulu $\varphi_i \in \Phi$ platí $val_\tau(\varphi_i) = val_\tau(\varphi) = val_\tau(\varphi_{ext})$.

Príklad 2.11. Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, pomocou tabuľkovej metódy jednoducho zistíme, že daná teória Φ ma štyri interpretácie, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé

$$\tau_1 = (0,\#,\#),\ \tau_2 = (0,\#,1),\ \tau_3 = (0,1,\#),\ \tau_4 = (\#,1,1)$$

kde symbol ′#′ znamená ľubovoľný znak 0/1. Ľahko sa presvedčíme, že pre takto špecifikované interpretácie, formuly z teórie Φ sú pravdivé. Pomocou formuly (2.9) a interpretácií τ_i, pre i = 1, 2, 3, 4, ktoré boli zostrojené v príklade 9 zostrojíme formulu

$$\begin{aligned}\varphi(p,q,r) &= (\neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r)\\ &= (\neg p) \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r)\\ &= (\neg p) \vee (q \wedge r) = (p \Rightarrow q \wedge r)\end{aligned}$$

Táto formula $p \Rightarrow q \wedge r$ sémanticky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \models (p \Rightarrow q \wedge r)$$

Príklad 2.12. Majme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá sémanticky vyplýva z tejto teórie, $\Phi \models \varphi$. Použitím tabuľkovej metódy zistíme, že táto teórie má model, ktorý obsahuje tri interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (00\#), \tau_2 = (0\#1), \tau_3 = (\#11)\}$$

Jednotlivým interptáciam priradíme na základe iť tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg q$$

$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge r$$

$$\varphi_{\tau_1} = q \wedge r\,.$$

Použitím (14) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv \left(\neg p \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{\varphi_2} \right) \vee \left(\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\varphi_1} \wedge r \right) = (\neg p \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge r)$$

Pretože požadujeme pri definícii sémantického vyplývania, aby formuly φ_1, φ_2 boli pravdivé pre každé $\tau \in [\![\Phi]\!]$, potom formulu φ môžeme zjednodušiť

$$\varphi = (\neg p \wedge 1) \vee (1 \wedge r) \equiv p \Rightarrow r$$

Týmto sme dokázali, že z teórie Φ tautologický vyplýva $p \Rightarrow r$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models (p \Rightarrow r)$$

Príklad 2.13. Majme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá sémanticky vyplýva z tejto teórie, $\Phi \models \varphi$. Použitím tabuľkovej metódy zistíme, že táto teórie má model, ktorý obsahuje štyri interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (0\#0), \tau_2 = (01\#), \tau_3 = (\#10), \tau_4 = (\#1\#)\}$$

Jednotlivým interptáciam priradíme na základe iť tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg r$$
$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge q$$
$$\varphi_{\tau_3} = q \wedge \neg r$$
$$\varphi_{\tau_4} = q$$

Použitím (14) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (q) \equiv q \wedge \left(\underbrace{1 \vee \neg r \vee \neg p}_{1} \right) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$
$$\equiv q \vee \neg(p \vee r) \equiv (p \vee r) \Rightarrow q$$

Týmto sme dokázali, že z teórie Φ tautologický vyplýva $p \vee r \Rightarrow q$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \models p \vee r \Rightarrow q$$

Príklad 2.14. Majme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá sémanticky vyplýva z tejto teórie, $\Phi \models \varphi$. Použitím tabuľkovej metódy zistíme, že táto teórie má model, ktorý obsahuje dve interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (00), \tau_2 = (01)\}$$

Jednotlivým interpretáciam priradíme tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg q$$
$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge q$$

Použitím (14) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \equiv \neg p \wedge \left(\underbrace{\neg r \vee r}_{1} \right) \equiv \neg p$$

Týmto sme dokázali, že z teórie Φ tautologický vyplýva $\neg p$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \vDash \neg p$$

2.4 Všeobecné vlastnosti výrokovej logiky

V kapitole 1.3 bolo jasne ukázané, že výroková logika je **rozhodnuteľná,** existuje algoritmus (napr. tabuľková metóda), pomocou ktorého jednoznačne rozhodneme, či daná výroková formula je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná.

Formálny systém výrokovej logiky je **korektný**, ak každá dokázaná formula z axióm je tautológia $((\vdash \varphi) \Rightarrow (\vDash \varphi))$. Rozhodnutie o tom, či výroková logika je korektná, sa redukuje na rozhodnutie o tom, či pravidlá odvodzovania (t. j. modus ponens) sú korektné a či axiomatický systém (2.5) je tvorený formulami, ktoré sú tautológie. Jednoduchou diskusiou pravidiel odvodzovania (2.1-3) je možné dokázať ich korektnosť, taktiež použitím tabuľkovej metódy môžeme dokázať, že axiómy (2.5) sú tautológie, z týchto dvoch skutočností vyplýva, že výroková logika je korektná.

Výroková logika je **úplná** ak každá tautológia je logickým dôsledkom axióm $((\vDash \varphi) \Rightarrow (\vdash \varphi))$. Dôkaz tejto vlastnosti je založený na Churchovej vete. Pre väčšiu prehľadnosť našich úvah zavedieme túto terminológiu: nech φ je formula, ktorá má premenné $x_1, x_2, ..., x_n$ a nech $\boldsymbol{\tau}$ je interpretácia týchto premenných, potom (pozri (1.11))

$$x^{(\tau)} = \begin{cases} x & (ak\ val_\tau(x) = 1) \\ \neg x & (ak\ val_\tau(x) = 0) \end{cases} \tag{2.12a}$$

$$\varphi^{(\tau)} = \begin{cases} \varphi & (ak\ val_\tau(\varphi) = 1) \\ \neg \varphi & (ak\ val_\tau(\varphi) = 0) \end{cases} \tag{2.12b}$$

Pomocou vzťahu (2.7) každá formula výrokovej logiky môže byť špecifikovaná pomocou DNF formuly,

$$\left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n\right)\left(x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge x_n^{(\tau)} \Rightarrow \varphi^{(\tau)}\right) \tag{2.13a}$$

Tento vzťah môžeme ľahko prepísať do relácie logického vyplývania. Zostrojíme postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, kde jednotlivé komponenty sú rekurentne definované takto:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1^{(\tau)} \\ \alpha_2 &= \alpha_1 \wedge x_2^{(\tau)} \\ &.................... \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} \wedge x_n^{(\tau)} \end{aligned} \tag{2.13b}$$

Táto postupnosť formúl je založená na pravidle $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$, ktoré priamo vyplýva z axiómy $\boldsymbol{Ax}_5$ (pozri (2.4e)). To znamená, že existuje postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, kde α_i využíva predchádzajúce formuly $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}$, pričom posledná formula $\alpha_n = \alpha_{n-1} \wedge x_n^{(\tau)} = \varphi^{(\tau)}$, čo je podmienkou logického vyplývania. Tento výsledok je známy ako Churchova veta:

Veta 2.5. (Churchova veta). Nech φ je formula, ktorá obsahuje *n* výrokových premenných

$x_1, x_2, \ldots x_n$ a nech τ je interpretácia týchto premenných, potom

$$\left(\mathit{pre\ ka\check{z}d\acute{e}}\ \tau \in \{0,1\}^n\right)\left(\left\{x_1^{(\tau)}, x_2^{(\tau)}, \ldots, x_n^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi^{(\tau)}\right) \tag{2.14}$$

Predpokladajme, že formula φ je ***tautológia***, t.j. pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi) = 1$ a teda aj $\varphi^{(\tau)} = \varphi$, potom na základe Churchovej vety platí implikácia

$$(\models \varphi) \Rightarrow \left(\mathit{pre\ ka\check{z}d\acute{e}}\ \tau \in \{0,1\}^n\right)\left(\left\{x_1^{(\tau)}, x_2^{(\tau)}, \ldots, x_n^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi\right) \tag{2.15}$$

Uvažujme také dve interpretácie τ a τ′, ktoré sa líšia len posledným členom, potom dokazovaná veta má tieto dve alternatívne formy

$$\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}, x_n\right\} \vdash \varphi \tag{2.16a}$$

$$\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}, \neg x_n\right\} \vdash \varphi \tag{2.16b}$$

Použitím vety 2.1 o dedukcii dostaneme

$$\left(\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \cup \{x_n\} \vdash \varphi\right) \Rightarrow \left(\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \vdash x_n \Rightarrow \varphi\right) \tag{2.16a}$$

$$\left(\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \cup \{\neg x_n\} \vdash \varphi\right) \Rightarrow \left(\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \vdash \neg x_n \Rightarrow \varphi\right) \tag{2.16b}$$

Použitím vety o neutrálnosti vety o dedukcii (pozri vetu 2.1, položku *k*), tieto dve relácie logického vyplývania sú zjednodušené do jednej relácie

$$\left\{x_1^{(\tau)}, \ldots, x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi \tag{2.17}$$

Tento postup neustále opakujeme, až do získania výsledku $(\models \varphi) \Rightarrow (\vdash \varphi)$, QED. Postova veta 2.6 ***o úplnosti*** patrí medzi základné teoretické výsledky výrokovej logiky.

Veta 2.6. (Postova veta). Pre formulu φ vzťah $(\vdash \varphi) \equiv (\models \varphi)$, t.j. formuly, ktoré sú logickým dôsledkom axióm výrokovej logiky sú aj tautológie a naopak.

(1) Korektnosť výrokovej logiky bola diskutovaná už v úvodnej časti tejto podkapitoly, ako dôsledok skutočností, že axiómy výrokovej logiky sú tautológie (o čom sa môžeme jednoducho presvedčiť pomocou tabuľkovej metódy) a toho, že pravidlá odvodzovania zachovávajú tautologičnosť (napr. použitím pravidla modus ponens z dvoch tautológií dostaneme dôsledok, ktorý je taktiež tautológia).

(2) Obrátime teraz našu pozornosť na dôkaz úplnosti výrokovej logiky. Na jej základe sme oprávnení dokázateľnosť nejakej formuly preverovať tým, že dokážeme jej tautologičnosť, ktorá je definovaná prostredníctvom sémantického pojmu pravdivostného ohodnotenia, napr. pomocou tabuľkovej metódy. Syntaktický pojem dokázateľnosti splýva so sémantickým pojmom tautologičnosti, čo je jedinečná vlastnosť výrokovej logiky a ojedinelá vlastnosť formálnych systémov, kde obvykle existuje zreteľná demarkačná čiara medzi syntaxom a sémantikou daného systému. Na záver môžeme teda konštatovať, že výroková logika je

- **korektná** (ak každá dokázaná formula z axióm je tautológia),
- **nerozporná** (ak zo systému axióm súčasne logicky nevyplývajú formuly φ a

$\neg\varphi$),
- **úplná** (ak každá tautológia je dokázateľná z axióm.) a
- **rozhodnuteľná** (existuje jednoduchý algoritmus, pomocou ktorého sme schopný rozhodnúť či pre dané pravdivostné hodnoty premenných je formula pravdivá alebo nie).

Na záver tejto kapitoly pristúpime k rekapitulácii pojmu "***konzistentnosť***", ktorý bol pôvodne špecifikovaný dvoma diametrálne odlišnými prístupmi. Pomocou definície 2.1 bol tento pojem špecifikovaný v rámci syntaktického prístupu, zatiaľ čo pomocou definície 2.2 bol tento pojem špecifikovaný pomocou sémantického prístupu. Použitím Postovej vety 2.6 ukážeme, že tieto prístupy sú identické a ľahko navzájom pretransformovateľné medzi sebou, jeden na druhý.

Nech $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je v rámci syntaktického prístupu množina predpokladov, zatiaľ čo, v rámci sémantického prístupu sa nazýva sa nazýva teória. Aby sme zabezpečili ekvivalentnosť týchto dvoch prístupov k formulácii pojmu „konzistentnosť" dokážeme nasledujúcu vetu

Veta 2.7. Množina predpokladov (alebo teória) $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je konzistentná vtedy a len vtedy, ak platí

$$\left(\left(\textit{existuje formula } \varphi\right)\left(\left(\Phi\vdash\varphi\right)\oplus\left(\Phi\nvdash\neg\varphi\right)\right)\right)\equiv\left(\llbracket\Phi\rrbracket\neq\varnothing\right)$$

Dôkaz ($\Rightarrow$). Predpokladajme, že existuje taká formula φ, že platí $(\Phi\vdash\varphi)$ a neplatí $(\Phi\vdash\neg\varphi)$. Pomocou Postovej vety 2.6 prepíšeme tieto podmienky do tvaru $(\Phi\vDash\varphi)$ a $(\Phi\nvDash\varphi)$, t. j. φ je sémantický dôsledok Φ a teda jej model musí byť neprázdny, $\llbracket\Phi\rrbracket\neq\varnothing$, QED.

Dôkaz ($\Leftarrow$). Predpokladajme, že $\llbracket\Phi\rrbracket\neq\varnothing$, formula φ je potom zostrojená na sémantickej úrovni podľa formuly (2.9), t. j. platí $\Phi\vDash\varphi$. Pomocou Postovej vety 2. 6 táto podmienka môže byť prepísaná do tvaru $\Phi\vdash\varphi$, QED.

Cvičenia

Cvičenie 2.1. Nájdite model pre tieto formuly

(g) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$

(h) $((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

(i) $\psi=(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$

(j) $\psi=(p\wedge q)\Rightarrow(p\wedge\neg q)$

(k) $p\Rightarrow(q\Rightarrow\neg p)$

(l) $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\Rightarrow(q\vee r)$.

Cvičenie 2.2. Dokážte, že pre teóriu Φ a pre formulu φ platí $\Phi\vdash\varphi$

(a) $\Phi=\{p,p\Rightarrow q,q\Rightarrow r\}$, $\varphi=r$,

(b) $\Phi = \{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q\}$, $\varphi = p \Rightarrow r$,

(c) $\Phi = \{p, \neg p\}$, $\varphi = q$,

Cvičenie 2.3. Zostrojte pre danú teóriu Φ formulu φ, ktorá je jej sémantickým dôsledkom

(a) $\Phi = \{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow q\}$,

(b) $\Phi = \{p \Rightarrow q \vee r, q\}$,

(c) $\Phi = \{p \Rightarrow q \wedge r, q\}$

(d) $\Phi = \{p \wedge q \Rightarrow r, p\}$,

(e) $\Phi = \{p \vee q \Rightarrow r, p\}$.

Cvičenie 2.4. Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

(1) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (2) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (3) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (4) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

(5) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (6) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (7) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (8) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

(9) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (10) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (11) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (12) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

(13) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (14) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (15) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (16) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

Cvičenie 2.5. Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

(1) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$, (2) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$, (3) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow q \\ \hline ? \end{array}$, (4) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ q \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$, (5) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$

Cvičenie 2.6. Overte správnosť/nesprávnosť dôsledkov, v prípade nesprávneho dôsledku upravte predpoklady tak, aby dôsledok bol správny:

(a)

ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd
ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár
prúd ide

---

ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár

(b)

Je doma alebo je v kaviarni
ak je doma, potom vás očakáva

Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni

(c)
nie je pravda, že študent vie po nemecký a anglický
študent nevie po anglicky

študent nevie po nemecky

(d)
ak študujem, získam dobré postavenie
ak neštudujem, potom si užívam

buď si užívam alebo dosiahnem dobré postavenie

Cvičenie 2.7. Aké sú dôsledky týchto predpokladov:

(a)
Karol pocestuje vlakom alebo autobusom
Ak pocestuje Karol autobusom alebo autom, potom pricestuje neskoro
Karol nepricestoval neskoro

?

(b)
Karol pocestuje vlakom alebo lietadlom
ak pocestuje lietadlom, potom navštívi priateľov

nenavštívilo priateľov

?

(c)
ak pocestujem do zahraničia, potom si zoberiem dovolenku

ak si zoberiem dovolenku, potom som necestoval do zahraničia

?

(d)
nie som občanom štátu XY

ak by som sa narodil v AB, potom by som bol občanom XY

?

(e)
som absolventom univerzity v PQ
ak by som bol sociológom, potom nemôžem byť absolventom univerzity v PQ

?

(f)
som učiteľom a taktiež som aj informatikom

---

ak je niekto informatikom, potom má vysoké IQ

?

(g)
Jano je informatikom

---

ak je Jano informatikom alebo matematikom, potom studoval v CD

?

Literatúra

[9] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[10] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Algebra a diskrétna matematika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008.

[11] Peregrin, J: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[12] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[13] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[14] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.

3. kapitola

Výroková logika III – sémantické tablá a rezolučný princíp

3.1 Úvodné poznámky

To, či nejaká formula φ výrokovej logiky je teorém, $\vdash \varphi$, (logický vyplýva z axióm výrokovej logiky), alebo či je tautológiou výrokovej logiky, $\models \varphi$, (pravdivá pre každú interpretáciu jej premenných) sú v dôsledku úplnosti a korektnosti výrokovej logiky ekvivalentné problémy (pozri vetu 2.5). To znamená, že problém, či nejaká formula je teorém, môžeme riešiť pomocou tabuľkovej metódy, ktorá nám po konečnom počte krokov poskytne jednoznačnú odpoveď na otázku, či formula, je tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná (žiaľ zložitosť tabuľkovej metódy rastie exponenciálne s počtom výrokových premenných formuly) .

Trochu zložitejší problém výrokovej logiky je otázka, či formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vdash \varphi$. Táto relácia je na základe vety o dedukcii 2.3 platnou vtedy, ak platí $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$. To znamená, že odvoditeľnosť φ z predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je prevoditeľná na úlohu v ktorej sa skúma, či formula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ logicky vyplýva z axióm výrokovej logiky. V tejto kapitole tento štandardný „axiomatický“ prístup bude nahradený nasledujúcimi dvoma podstatne efektívnejšími technikami:

(1) Metóda ***sémantických tabiel*** [1-8] (angl. semantic tableaux), ktorá je založená na systematickom postupe transformácie výrokovej formuly do tvaru DNF, ktorý má jednoduché podmienky pre kontradikčnosť alebo splniteľnosť.

(2) Metóda ***rezolúčneho princípu*** [4,9,10], kde daná výroková formula je prepísaná do KNF, potom nad takto reprezentovanou formulou je aplikovaný systematický postup „***rezolventy***“, pomocou ktorého sa daná formula neustále zjednodušuje. Ak sa nám podarí ukázať, že dochádza k úplnému vymiznutiu formuly (vzniká tzv. prázdny symbol □), potom formula je tautológia. Tento postup je pomerne dobre formalizovateľný a tvorí jeden z teoretických základov jazyka Prolog pre logické programovanie.

K zjednodušeniu diskusie v tejto kapitole zavedieme rozšírenú terminológiu, ktorá z časti už bola použitá v 1. kapitole: ***Literál*** je buď výroková premenná alebo jej negácia. Literály sú ***pozitívne*** (výroková premenná) alebo ***negatívne*** (negácia výrokovej premennej). Dva literály sú ***komplementárne*** ak majú tvar p a $\neg p$. ***Konjunktívna*** (***disjunktívna***) ***klauzula*** je konjunkcia (disjunkcia) literálov. ***Disjunktívna (konjunktívna) normálna forma*** (***DNF***[4]) (***KNF***) je disjunkcia (konjunkcia) konjuktívnych klauzulí (disjunktívnych klauzulí).

[4] Disjunktívna (konjunktívna) normálna forma bola už definovaná v 2. kapitole, definícia X.X.

Nech $\mathcal{A}=\{x,y,u,z\}$ je množina výrokových premenných, formule x,y,u,z sú pozitívne literály, zatiaľ čo formule $\neg x,\neg y,\neg u,\neg z$ sú negatívne literály. Literály z a $\neg z$ sú komplementárne. Formula $x\wedge y\wedge\neg y$ je konjunktívna klauzula, formula $x\vee u\vee\neg y\vee z$ je disjunktívna klauzula.

Konjunktívna klauzula je kontradikcia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplementárne literály. Podobne, disjunktívna klauzula je tautológia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplmentárne literály

$$\underbrace{x\wedge\neg x}_{0}\wedge y\wedge\neg z\wedge\ldots\equiv 0$$

$$\underbrace{x\vee\neg x}_{1}\vee y\vee\neg z\vee\ldots\equiv 1$$

V 1. kapitole bol prezentovaný konštruktívny dôkaz toho, že ku každej Boolovej funkcii existuje úplná DNF alebo úplná KNF Bolova funkcia. V mnohých prípadoch, tento úplný tvar formuly je zbytočne založitý, použitím jednoduchý vlastnosti konjunkcie a disjunkcie (napr. $p\wedge p\equiv p$ a $p\wedge 1\equiv p$) môžeme formulu podstatne zjednodušiť do tvaru DNF alebo KNF. Môžeme teda konštatovať, že ku každej výrokovej formule φ existuje[5] jej DNF a KNF formula, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi\equiv\varphi_{DNF}$ resp. $\varphi\equiv\varphi_{KNF}$.

Veta 3.1.
(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná DNF formula φ_{DNF} má všetky konjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.
(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná KNF formula φ_{KNF} má všetky disjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.
(3) Formula φ je ***splniteľná*** ak jej normálna forma (konjunktívna φ_{KNF} alebo disjunktívna φ_{DNF}) obsahuje aspoň jednu klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad 3.1. DNF formula $\varphi_1=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3\wedge p_4)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_2\wedge\neg p_4)$ nie je kontradikcia, je len splniteľná, prvý konjunktívny člen neobsahuje komplementárne literály. Pre interpretáciu $\tau=(p_1/0,p_2/0,p_3/1,p_4/1)$ pravdivostná hodnota formule φ_1 je špecifikovaná vzťahom $v_\tau(\varphi_1)=1$. DNF formula $\varphi_2=(\neg p_3\wedge p_3\wedge p_4)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3\wedge p_1)$ je kontradikcia, každý konjuktívny člen obsahuje dvojicu $p_i\wedge\neg p_i$, čiže sú kontradikcie, disjunkcia dvoch kontradikcií je taktiež kontradikcia.

Príklad 3.2. Transformácia formule $\varphi=(p\equiv q)\wedge(r\vee\neg(r\vee\neg p))$ do DNF tvaru spočíva v postupnosti krokov:
(a) Odstránime ekvivalenciu, $\varphi_1=((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))\wedge(r\vee\neg(r\vee\neg p))$.

[5] Poznamenajme, že ku každej výrokovej formule existuje mnoho funkcií φ_{DNF} (φ_{KNF}), ktoré sú s pôvodnou funkciou ekvivaletné.

(b) Odstránime implikácie, $\varphi_2 = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \neg\left(r \vee \neg p\right)\right)$.

(c) Odstránime negáciu disjunkcie, $\varphi_3 = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$.

(d) Použijeme distribučný zákon pre odstránenie konjunkcie v podformule špecifikovanej ľavou zátvorkou, $\varphi_4 = \left(\left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(\neg p \wedge p\right) \vee \left(q \wedge \neg q\right) \vee \left(q \wedge p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$.

(e) Podobne odstránime konjunkciu medzi prvou a druhou zátvorkou, dvojité negácie a prebytočné zátvorky

$$\begin{aligned}\varphi_5 = \varphi_{DNF} = &\left(\neg p \wedge \neg q \wedge r\right) \vee \left(\neg p \wedge p \wedge r\right) \vee \left(q \wedge \neg q \wedge r\right) \vee \left(q \wedge p \wedge r\right) \vee \\ &\left(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p\right) \vee \left(\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p\right) \vee \left(q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p\right) \vee \left(q \wedge p \wedge \neg r \wedge p\right)\end{aligned}$$

Výsledná formula φ_5 je DNF a je ekvivalentná s pôvodnou formulou φ. Z vety 3.1 vyplýva, že formula φ je splniteľná, prvá, štvrtá a ôsma zátvorka neobsahujú dvojicu premenná a jej negácia, čiže celková formula nie je kontradikciou. Existujú také interpretácia premenných $\tau_1 = \left(p/0, q/0, r/1\right)$, $\tau_2 = \left(p/1, q/1, r/1\right)$ a $\tau_3 = \left(p/1, q/1, r/0\right)$, pre ktoré je druhá, štvrtá resp. ôsma zátvorka pravdivá, čiže aj celá disjunktná forma musí byť pravdivá.

Funkciu φ_3 môžeme použiť pre tvorbu φ_{KNF}, Roznásobením poslednej tretej zátvorky dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge p\right)\right) \\ &= \varphi_{KNF} = \left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right) \wedge \left(r \vee \neg r\right) \wedge \left(r \vee p\right)\end{aligned}$$

V prípade, ak by každá disjunktívna klauzula obsahovala dvojicu komplementárnych literálov, potom formula φ_{KNF} (a teda aj φ) je tautológia. Túto podmienku splňuje len tretia zátvorka – disjunktná klauzula, čiže formula φ nie je tautológia. Pomocou prvej, druhej a štvrtej zátvorky môžeme navrhnúť interpretácie, pre ktoré je formula nepravdivá, $\tau_1 = \left(p/1, q/0\right)$, $\tau_2 = \left(p/0, q/1\right)$ a $\tau_3 = \left(p/0, r/0\right)$.

Príklad 3.3. Pretransformujte formule $\varphi = \left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\neg q \Rightarrow \neg p\right)$ a $\psi = \neg\varphi$ do DNF a KNF.

$$\begin{aligned}\varphi &= \left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\neg q \Rightarrow \neg p\right) \equiv \neg\left(\neg p \vee q\right) \vee \left(q \vee \neg p\right) \\ &\equiv \left(p \wedge \neg q\right) \vee \left(q \vee \neg p\right)\end{aligned}$$

Použitím distribučných zákonov pre disjunkciu a konjunkciu získame tieto ekvivalentné formuly

$$\varphi_{DNF} = \left(\neg p\right) \vee \left(q\right) \vee \left(\neg q\right)$$

$$\varphi_{KNF} = \left(\underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee q\right) \wedge \left(\neg p \vee \underbrace{q \vee \neg q}_{1}\right) \equiv 1$$

podobným spôsobom zostrojíme aj ekvivalentné funkcie pre ψ

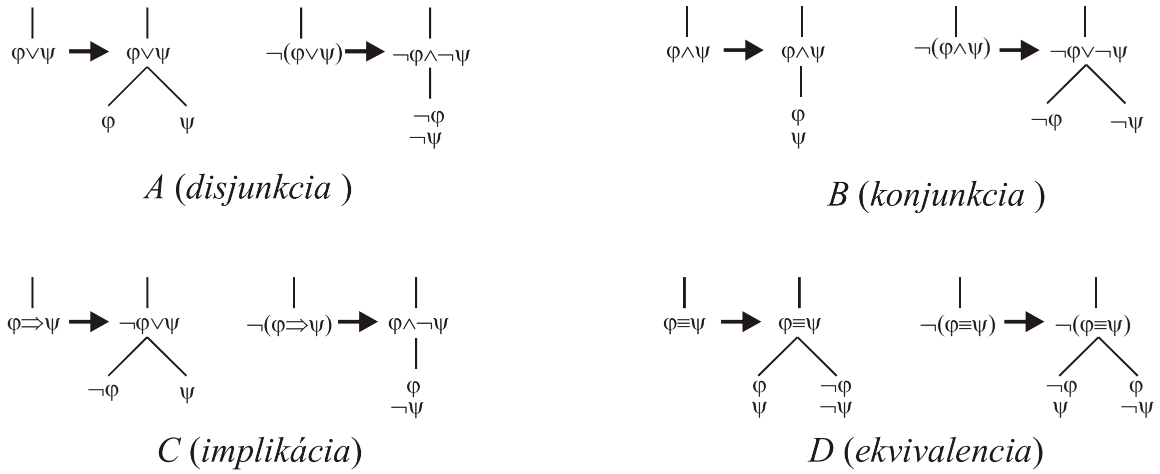
$$\psi_{DNF} = \left(\underbrace{p \wedge \neg p}_{0} \wedge \neg q\right) \vee \left(p \wedge \underbrace{q \wedge \neg q}_{0}\right) \equiv 0$$

$$\psi_{KNF} = \left(p\right) \wedge \left(q\right) \wedge \left(\neg q\right)$$

Pre funkciu φ jej ekvivalentná funkciu φ_{KNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia φ je tautológia. podobne, pre funkciu ψ jej ekvivalentná funkcia ψ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia ψ je kontradikcia.

3.2 Metóda sémantických tabiel

Metóda sémantických tabiel bola naformulovaná v r. 1955 holandským logikom a matematikom Bethom [1,2], ako dôležitý a efektívny prostriedok pre jednoduchú konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl nielen výrokovej logiky, ale hlavne neklasických logík, pre ktoré je táto technika vlastne jediným prístupom k získaniu pravdivostnej interpretácie.



Obrázok 3.1. Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde sématickych tabiel. (A) Rozklad disjunkcie a jej negácie, (B) rozklad konjunkcie a jej negácie, (C) rozklad implikácie a jej negácie a (D) rozklad ekvivalencie a jej negácie.

Proces transformácie formuly z príkladu 3.2 do DNF tvaru môže byť reprezentovaný koreňovým stromom (nazývaný ***sémantické tablo***), ktorý už predpokladá, že z formuly boli odstránené ekvivalencie a implikácie. V ďalších krokoch postupujeme podľa pravidiel z obr. 3.1. Aplikáciou týchto pravidiel zostrojíme sémantické tablo (koreňový strom) pre transformáciu formuly do DNF, pozri obr. 3.2. Tie vetve stromu, ktoré obsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´×´ a nazývajú sa ***uzavreté vetve***. Podobne, tie vetve, ktoré neobsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´O´ a nazývajú sa ***otvorené vetve***. Ak sémantické tablo obsahuje len uzavreté vetve, potom sa nazýva ***uzavreté sémantické tablo***, v opačnom prípade, ak obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu, potom sa nazýva ***otvorené sémantické tablo***. Sémantické tablo priradené formule φ je označené $\mathcal{T}(\varphi)$.

Ilustračný príklad sémantického table je ukázaný na obr. 3.2, ktorý je zostrojený pre formulu $\varphi_3 = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$ z príkladu 3.2 ktorá bola už upravená tak, že neobsahuje ekvivalencie, implikácie a negáciu konjunkcie alebo disjunkcie.

Zostrojené sémantické tablo je otvorené, z čoho priamo vyplýva, že formula φ_3 je splniteľná (a teda aj formula φ z príkladu 3.2 ktorá je s ňou ekvivaletná).

Na základe platnosti vety 3.1 môžeme formulovať vetu platnú pre sémantické tablá

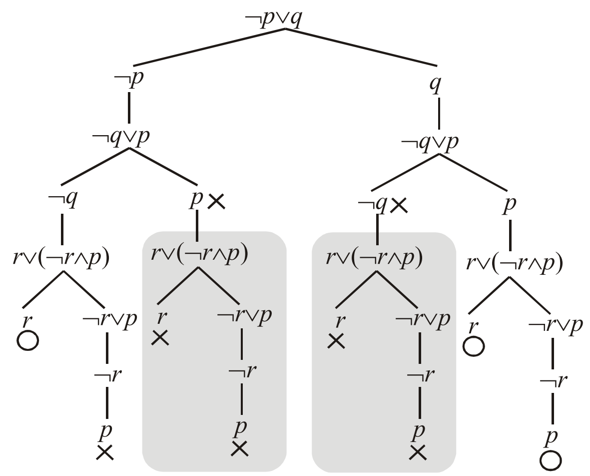
Veta 3.2.

(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ je uzavreté .

(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

(3) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ alebo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.

Druhá vlastnosť tejto vety úzko súvisí s prvou vlastnosťou. Keď chceme zistiť, či formula φ je tautológia, potom zostrojíme sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$, ak je toto tablo uzavreté, potom formula $\neg\varphi$ podľa prvej vlastnosti je kontradikcia, alebo formula φ je tautológia. Môžeme teda konštatovať, že v rámci techniky sémantických tabiel tautologičnosť formuly φ sa zistí tak, že falzifikujeme tautologičnosť jej negácie $\neg\varphi$, ak je táto formula kontradikcia, potom pôvodná formula φ musí byť tautológiou.



Obrázok 3.2. Sémantické tablo pre formulu $\varphi_3 = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$ z príkladu 3.2, ktorá už neobsahuje ekvivalenciu, implikáciu a negáciu konjunkcie alebo disjunkcie. Metóda presne kopíruje transformáciu formuly do DNF (jednotlivé kroky tejto transformácie sú uvedené v príklade 3.2). Koncové vrcholy označené symbolom ´×´ znamená, že príslušná vetva stromu je uzavretá a nepravdivá (obsahuje komplementárne literály). Koncové vrcholy označené symbolom ´○´ znamená, že príslušná vetva je otvorená splniteľná. V tomto prípade existujú špecifikácie premenných $\tau_1 = \left(p/0, q/0, r/1\right)$, $\tau_2 = \left(p/1, q/1, r/1\right)$ a $\tau_3 = \left(p/1, q/1, r/0\right)$ pre ktoré je formula pravdivá.

V čom spočíva výhoda sémantického tabla pred formálnymi manipuláciami s formulou φ, ktoré ju transformujú do DNF tvaru? Aplikácia distribučných zákonov pri úprave formuly DNF tvaru je pomerne náročnou operáciou a preto je výhodné prenechať ju diagramatickej metódy konštrukcie sémantického tabla. Druhý, nemenej dôležitý aspekt konštrukcie je uzavretie tej vetvy, ktorá obsahuje komplementárne literály. Predlžovanie takejto vetve už neprináša žiadnu novú skutočnosť z pohľadu toho, či daná formula je kontradikciou alebo je splniteľná. Prípadne ďalšie výskyty dvojíc komplementárnych literálov už nemení nič na skutočnosti, že daný konjunkt v DNF je nepravdivý. Preto táto možnosť „okamžitého" uzavretia vetvy pri konštrukcii sémantického tabla obvykle patrí medzi významné zjednodušenia jeho konštrukcie, celé veľké podstromy v sémantickom table môžu byť ignorované ako nevýznamné.

V 2. kapitole bola podaná definícia logického dôsledku formuly φ z množiny formúl (predpokladov) $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ ako postupnosť formúl $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, kde $\alpha_m = \varphi$. Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$, t. j. skúmaním, či táto formula logický vyplýva z axiomatického systému uvedeného v 2. kapitole. Pomocou sémantických tabiel je problém $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ formulovateľný veľmi efektívne pomocou vety:

Veta 3.3. Formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vdash \varphi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo, ktorého vrchol je priradený formule $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$, je uzavreté.

Táto veta je priamym dôsledkom skutočnosti, že metóda sémantického tabla je vlastne špecifický spôsob prepisu formuly do DNF pomocou operácií, ktoré sú ekvivalencie (napr. De Morganove relácie, distributívne vzťahy medzi disjunkciou a konjunkciou a pod.). Čiže môžeme konštatovať, že pre danú formulu φ je prepis na φ_{DNF} je čisto syntaktický prístup, ktorý nepoužíva žiadne sémantické interpretácie.

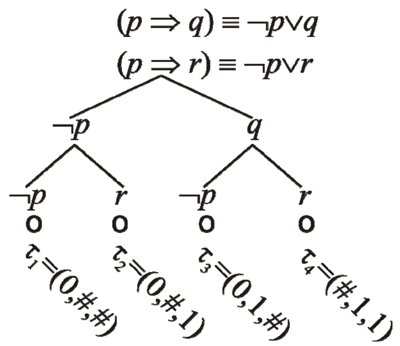
3.2.1 Konštrukcia tautologického vyplývania pomocou sémantických tabiel

Prvú úlohu, ktorú budeme riešiť v tomto aplikačnom odseku kapitoly, bude úloha zostrojiť pomocou sémantických tabiel množinu interpretácií pre teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$$

Danú úlohu rieši nasledujúca veta

Veta 3.4.
Interpretácie z množiny $[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$ sú určené pomocou otvorených vetví sémantického tabla $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. Každej otvorenej vetve môžeme priradiť interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$, pre ktorú sú všetky literály na danej vetve pravdivé



Obrázok 3.3. Sémantické tablo $\mathcal{T}\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right)\right)$ pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, v tomto prípade každá vetva je otvorená, čiže môžeme k nej priradiť interpretáciu τ_i, pre i = 1, 2, 3, 4.

Príklad 3.4. Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu modelov $[\![\Phi]\!]$. Podľa vety 3.4 zostrojíme sémantické tablo pre konjunkciu formúl z teórie Φ, ktoré je znázornené na obr. 3.3.

Teória Φ má štyri interpretácie, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé

$$\tau_1 = (0,\#,\#),\ \tau_2 = (0,\#,1),\ \tau_3 = (0,1,\#),\ \tau_4 = (\#,1,1)$$

kde symbol ´#´ znamená ľubovoľný znak 0/1. Ľahko sa presvedčíme, že pre takto špecifikované interpretácie, obidve formuly z teórie Φ sú pravdivé.

Ak poznáme množinu modelov $[\![\Phi]\!]$, potom môžeme upriamiť našu pozornosť na konštrukciu funkcie φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$, t. j. je tautologickým dôsledkom teórie Φ. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_a) \in [\![\Phi]\!]$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & (ak\ \tau_i = 1) \\ \neg p_i & (ak\ \tau_i = 0) \\ 1 & (ak\ \tau_i = \#) \end{cases} \tag{3.1}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (2.6))

$$\psi_\tau(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge p_n^{(\tau)} \tag{3.2}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \bigvee_{\tau \in [\![\Phi]\!]} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge p_n^{(\tau)} \tag{3.3}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$

$$(\forall \tau \in [\![\Phi]\!])(val_\tau(\varphi) = 1) \tag{3.4}$$

Týmto sme dokázali, že funkcia (3.3) je tautologický dôsledok teórie Φ, t. j. $\Phi \vDash \varphi$.

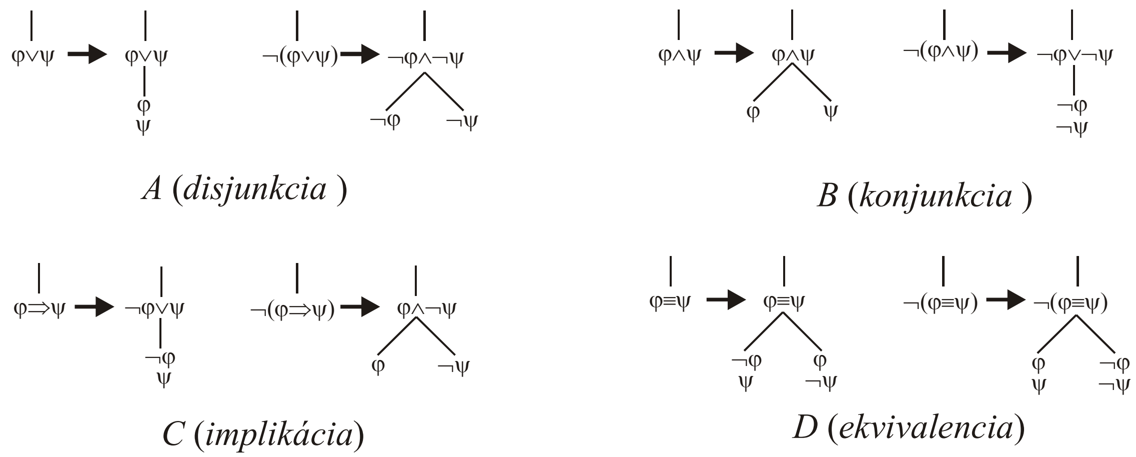
Veta 3.5.
Ak teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ je konzistetná (má model, $[\![\Phi]\!] \neq \emptyset$), potom môžeme zostrojiť pomocou (3.3) takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \vDash \varphi$.

Príklad 3.5. Budeme pokračovať v ďalšom riešení príkladu 3.4. Pomocou formuly (3.3) a interpretácií τ_i, pre $i = 1, 2, 3, 4$, ktoré boli zostrojené v príklade 3.4 zostrojíme formulu

$$\begin{aligned}\varphi(p,q,r) &= (\neg p)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg p\wedge q)\vee(q\wedge r)\\ &= (\neg p)\wedge\underbrace{(1\vee r\vee q)}_{1}\vee(q\wedge r)\\ &= (\neg p)\vee(q\wedge r) = (p\Rightarrow q\wedge r)\end{aligned}$$

Táto formula tautologicky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\Phi = \{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}$

$$\{p\Rightarrow q, p\Rightarrow r\}\vDash(p\Rightarrow q\wedge r)$$

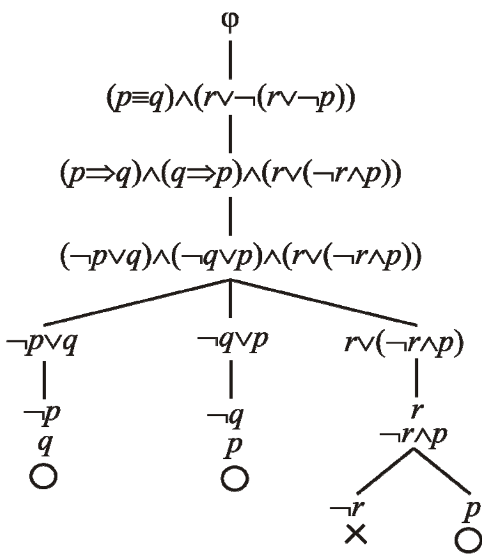


Obrázok 3.4. Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde duálnych sématických tabiel, kde jednotlivé módy tvorby stromu sú získané z obr. 3.1 zámenou módov medzi konjunkciou a disjunkciou. (A) Rozklad disjunkcie a jej negácie, (B) rozklad konjunkcie a jej negácie, (C) rozklad implikácie a jej negácie a (D) rozklad ekvivalencia.

3.2.2 Metóda duálnych sémantických tabiel

Ukážeme, že metóda sémantických tabiel môže byť formulovaná aj alternatívne tak, že vedie ku konštrukcii formuly v KNF; tento prístup budeme nazývať ***duálne sémantické tablá***. Nech φ je formula výrokovej logiky, potom duálne sémantické tablo $\tilde{T}(\varphi)$ je špecifikované pravidlami z obr. 3.5, ktorý vznikol z obr. 3.4 tak, že módy predlžovania z tohto obrázku sú zamenené medzi disjunkciou a konjunkciuu. Každá vetva duálneho sémantického tabla reprezentuje jednu disjunktívnu klauzulu z φ_{KNF} , ak dáme do vzájomnej disjunkcie postupnosť literálov ktorá sa vyskytuje v danej vetve zostrojíme jednu z množných disjunktívnych klauzúl. Podobne ako pre normálne sémantické tablá, ak daná vetva duálneho tabla obsahuje dvojicu komplementárnych klauzúl, potom táto vetva sa nazýva ***uzavretá***, v opačnom prípade sa nazýva ***otvorená***; poznamenajme, že uzavreté a otvorené vetve tabla budú označené symbolmi ´×´ resp. ´○´. Ak všetky vetvy duálneho sémantického tabla $\tilde{T}(\varphi)$ sú uzavreté, potom duálne sémantické tablo sa nazýva ***uzavreté***, v tomto prípade každá disjunktívna klauzula obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, čiže je pravdivá, potom je pravdivá aj celková konjunkcia klauzúl v φ_{KNF}. Opakom uzavretého sémantického duálneho tabla je ***otvorené*** duálne sémantické tablo, ktoré obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu. Na základe platnosti vety 3.1 môžeme formulovať vetu platnú pre duálne sémantické tablá (ktorá je „duálna" k vete 3.2).

Veta 3.6.
(1) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté.
(2) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\neg\varphi)$ je uzavreté.
(2) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ alebo $\tilde{\mathcal{T}}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.



Obrázok 3.4. Znázornenie duálneho sémantického tabla formuly $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$. Každá vetva reprezentuje jednu disjunktívnu klauzulu z $\varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \cancel{(r \vee \neg r)} \wedge (r \vee p)$, pričom sme ponechali len tie disjunktívne klauzuly, ktoré sú reprezentované otvorenými vetvami.

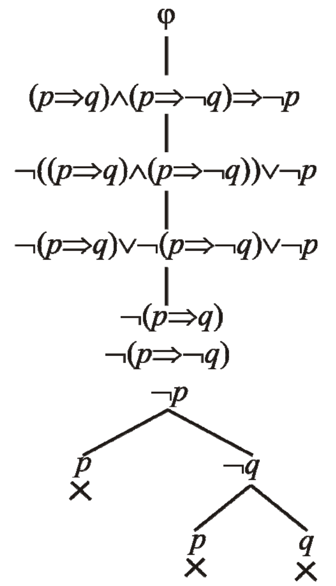
Študujme formulu $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$, jej KNF bola zostrojená v príklade 3.2: $\varphi \equiv \varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (r \vee p)$. Z tohto tvaru formuly φ vyplýva, že je nepravdivá pre interpretácie $\tau_1 = (1,0,\#)$, $\tau_2 = (0,1,\#)$ a $\tau_3 = (0,\#,0)$. Duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ priradené formule φ je znázornené na obr. 3.6.

Vyššie uvedené tri interpretácie môžeme ľahko zostrojiť pomocou otvorených ciest duálneho sémantického tabla zobrazeného na obr. 3.4. Pre danú otvorenú cestu urobíme zoznam literálov, ktoré sa na nej vyskytujú. Potom i-tá komponenta interpretácie τ je určená

$$\tau_i = \begin{cases} 1 & (l_i = \neg x_i) \\ 0 & (l_i = x_i) \\ \# & (l_i \ sa\ nevyskytuje\ v\ ceste) \end{cases}$$

Pomocou takto získaných interpretácií môžeem zostrojiť model, ktorý nám falzifikuje predpoklad tautologičnosti formuly φ.

Príklad 3.6. Pomocou duálneho sémantického tabla dokážte, že formula $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ je tautológia, pozri obr. 3.5.



Obrázok 3.5. Znázornenie duálneho sémantického tabla formuly (nazývanej *reductio ad absurdum*) $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$, jej duálny tvar je $\tilde{\varphi} = (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \Rightarrow \neg p$. Duálne sémantické tablo je uzavreté, potom formula φ je tautológia.

3.3 Rezolučný princíp

V predchádzajúcej časti tejto kapitoly sme študovali metódu sémantických tabiel, ktorá je aplikovateľná k výrokovým formulám tak v DNF, ako a v KNF tvare. Bolo ukázané, že systematickým postupom tejto metódy je možné rozhodnúť či daná formula je kontradikcia, tautológia alebo je len splniteľná. Podobný alternatívny prístup je ***rezolučný princíp***, ktorý pomocou systematického postupu nad KNF formulami rozhodne či daná formula je kontradikcia alebo je splniteľná [4,9,10]. Nech φ je výroková formula s premennými p, q, r,.. Jej KNF je ekvivalentná formula, ktorá obsahuje konjunkciu disjunktívnych klauzúl $\varphi_{KNF} \equiv (\neg p \vee \neg p \vee ...) \wedge (p \vee \neg q \vee ...)...$, kde každá zátvorka reprezentuje disjunktívnu klauzulu. Jednotlivé disjunktívne klauzule označme $B, C, ..., U$, potom

$$\varphi_{KNF} \equiv B \wedge C \wedge ... \wedge U \tag{3.5}$$

Pretože konjunkcia je komutatívna a asociatívna logická spojka, nezáleží na poradí a zátvorkovaní jednotlivých disjunktívnych klauzúl v formule φ_{KNF}, preto táto formula je jednoznačne zadaná množinou svojich disjuntívnych klauzúl

$$\boldsymbol{T}_{\varphi} = \{B, C, ..., U\} \tag{3.6}$$

Veta 3.7. Ak je formula φ splniteľná, potom množina $\boldsymbol{T}_{\varphi} = \{B, C, ..., U\}$ obsahujúca jej klauzuly je konzistetná (tiež sa používame termín splniteľná).

Z tejto vety vyplýva, že ak pre formula φ existuje taká interpretácia τ jej premenných, že $val_{\tau}(\varphi) = 1$, potom aj pre množinu (5.2) platí $val_{\tau}(B) = val_{\tau}(C) = ... = 1$, čo skratkovito zapisujeme $val_{\tau}(T_{\varphi}) = 1$.

Definícia 3.1. Formula $C = C_1' \vee C_2'$ sa nazýva ***rezolventa*** disjunktívnych klauzúl $C_1 = C_1' \vee l$ a $C_2 = C_2' \vee \neg l$ vzhľadom k literálu *l*, $C = res_l(C_1, C_2)$.

Je evidentné, že (a) rezolventy vzhľadom k literálom l a $\neg l$ sú rovnaké, $res_l(C_1, C_2) = res_{\bar{l}}(C_1, C_2)$ a (b) ak C_1 a C_2 sú klauzule, potom aj ich rezolventa je taktiež klauzula.

Veta 3.8. (*Metóda rezolventy*). Nech *B* a *C* sú dve disjunktívne klauzuly tvaru $B = B' \vee l$ a $C = C' \vee \neg l$, kde *l* je literál, potom platí

$$(B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l) \Rightarrow (B' \vee C') \tag{3.7}$$

Dôkaz formuly možno vykonať pomocou tautológie (nazývanej hypotetický sylogizmus alebo
tranzitivita implikácie) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, vhodným prepisom (pomocou substitúcií) tejto formuly dostaneme priamo formulu (3.7).

Veta 3.9 (Dôsledok vety 3.8). Nech $\varphi = A \wedge (B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l)$ je výroková KNF formula, kde *A*, *B*′, *C*′ sú jej podformuly a *l* je literál, potom konjunktívne rozšírenie φ o rezolventu $(B' \vee C')$ je ekvivalentné s pôvodnou formulou φ

$$\varphi' \equiv (\varphi \wedge (B' \vee C')) \tag{3.8}$$

Aplikáciou jednoduchého zákona (tautológie) výrokovej logiky $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \equiv p \wedge q)$ na (3.7) dostaneme

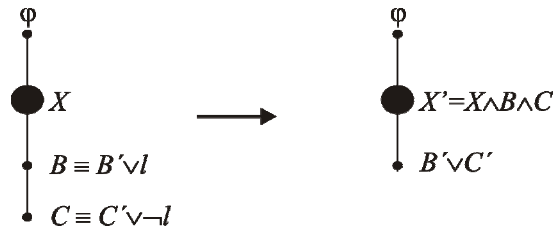
$$(B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l) \equiv (B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l) \wedge (B' \vee C') \tag{3.9}$$

Táto formula je už totožná s (3.8). Veta 3.13 má jednoduchú množinovo-teoretickú interpretáciu. Ako už bolo povedané, každú formulu φ v KNF tvare môžeme chápať ako množinu jej disjunktných klauzulí (pozri (3.5) a (3.6)) . Ak je formula φ splniteľná, potom aj príslušná množina $\boldsymbol{T}_{\varphi}$ je splniteľná. Podľa vety 3.13 dokonca platí, že formule z množín $\boldsymbol{T}_{\varphi}$ a $\boldsymbol{T}_{\varphi} \cup \{B' \vee C'\}$ sú pravdivostne ekvivalentné, formálne, $val_{\tau}(\boldsymbol{T}_{\varphi}) = val_{\tau}(\boldsymbol{T}_{\varphi} \cup \{B' \vee C'\})$.

Veta 1.13 má jednoduchú diagramatickú interpretáciu, formulu (3.8) môžeme ekvivalentne prepísať do tvaru

$$\varphi = X \wedge (B' \vee l) \wedge (C' \vee \neg l) \equiv X \wedge (B' \vee C')$$

jej diagramatická interpretácia je znázornená na obr. 3.6.



Obrázok 3.6. Diagramatická reprezentácia vety 3.8, formuly (3.8). Ľavý diagram reprezentuje pôvodnú formulu $\varphi = X \wedge B \wedge C$, kde X je konjunkcia disjunktívnych klauzúl, B a C sú vybrané disjunktné klauzuly, ktoré obsahujú dvojicu vzájomne komplementárnych literálov. Aplikovaním formuly (3.8) dostaneme pravý diagram, ktorý je predĺžený o jeden vrchol reprezentujúci rezolventu klauzúl B a C, t. j. formulu $B' \vee C'$.

Nech $\boldsymbol{T}$ je množina disjunktných klauzúl $\boldsymbol{T} = \{A, B, C, U, ...\}$, symbolom $R(\boldsymbol{T})$ označíme množinu $\boldsymbol{T}$ rozšírenú o všetky možné klauzule, ktoré vzniknú rezolventou vhodných dvojíc disjunktných klauzúl z $\boldsymbol{T}$, zavedieme označenie:

$$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T} \cup res(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) \tag{3.10a}$$

$$R^{0}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T} \tag{3.10b}$$

$$R^{i}(\boldsymbol{T}) = R(R^{i-1}(\boldsymbol{T})) \quad (i=1,2,3,...) \tag{3.10c}$$

kde $res(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T})$ je množina všetkých možných rezolvent, ktoré sa dajú vytvoriť z klauzúl patriacich do množiny $\boldsymbol{T}$. Napríklad, nech $\boldsymbol{T} = \{a \vee b, \neg a \vee b, \neg b \vee \neg c, c\}$, potom $res(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = \{b, a \vee \neg c, \neg a \vee \neg c, \neg b\}$.

Je prirodzené očakávať, že existuje taký index n, že platí

$$R^{*}(\boldsymbol{T}) = R^{n}(\boldsymbol{T}) = R^{n+1}(\boldsymbol{T}) = R^{n+2}(\boldsymbol{T}) = ... \tag{3.10d}$$

Existencia „stabilnej“ množiny $R^{*}(\boldsymbol{T})$ vyplýva zo skutočnosti, že operácia rezoloventy v podstate zjednodušuje formule v množine $\boldsymbol{T}$, toto zjednodušovanie nemôže prebiehať bez ohraničenia, po určitom momente zväčšovanie množiny sa musí zastaviť, ďalšie aplikácie aplikácie „operátora“ R už nevedú k tvorbe nových klauzúl.

Veta 3.10 (Robinsonov rezolučný princíp). Formula $\varphi_{KNF} \equiv B \wedge C \wedge ... \wedge U$ je kontradikciou vtedy a len vtedy, ak $R^{*}(\boldsymbol{T})$ obsahuje prázdnu formulu $\Box$.

Nech formula $\varphi_{KNF} = C \wedge C_1 \wedge C_2$ obsahuje klauzule $C_1 = l$ a $C_2 = \neg l$, potom ich konjunkcia $C_1 \wedge C_2 = l \wedge \neg l$ je kontradikcia, čiže aj pôvodná formula $\varphi_{KNF} = C \wedge C_1 \wedge C_2$ je kontradikcia (táto vlastnosť nezávisí od tvaru podformule C). Rezolventa klauzúl $C_1 = l$ a

$C_2 = \neg l$ môže byť formálne vyjadrená pomocou prázdnej formuly □. Podľa vety 3.12 potom platí $\varphi_{KNF} \equiv C \wedge res_l(C_1 \wedge C_2) \equiv C \wedge \square$. To znamená, že ak sa nám priebehu konštrukcie $R^*(\boldsymbol{T})$ objaví prázdna formula □, môže proces konštrukcie predčasne ukončiť so záverom, že formula $\varphi_{KNF} = C \wedge C_1 \wedge C_2$ je kontradikcia.

Jenoduchým dôsledkom vety 3.14 (Robinsonovho rezolučného princípu) je podmienka, kedy je funkcia φ tautológia.

Dôsledok vety 3.11. Formula φ je tautológia vtedy a len vtedy, ak $R^*(\boldsymbol{T}_{\neg\varphi})$, kde $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi} = \{B, C, ..., U\}$ je množina disjunktívnych klauzúl formuly $(\neg\varphi)_{KNF} = B \wedge C \wedge ... \wedge U$, obsahuje prázdny symbol **□.**

Robinsonov rezolučný princíp je teoretickým základom rezolventových metód dôkazu tautologičnosti formúl alebo nekonzistentnosti množiny disjunktívnych klauzúl. Jeho použitie bude ilustrované prostredníctvom ilustračného príkladu sumarizovaného v tab. 3.1..

Tabuľka 3.1. Postupnosť rezolvent klauzúl z množiny $\boldsymbol{T}$ v príklade 3.7

#	klauzula	rezolventa	#	klauzula	rezolventa
1	$a \vee \neg b$		15	a	(5,8)
2	$b \vee \neg c$		16	a	(6,7)
3	$\neg a$		17	a	(1,11)
4	$a \vee c$		18	a	(1,13)
5	$a \vee \neg c$	(1,2)	19	□	(3,9)
6	$\neg b$	(1,3)	20	□	(3,14)
7	$a \vee b$	(2,4)	21	□	(3,15)
8	c	(3,4)	22	□	(3,16)
9	a	(1,7)	23	a	(4,10)
10	$\neg c$	(2,6)	24	a	(4,12)
11	b	(2,8)	25	□	(6,11)
12	$\neg c$	(3,5)	26	□	(6,13)
13	b	(3,7)	27	□	(8,10)
14	a	(4,5)	28	□	(8,12)

Príklad 3.7. Pomocou rezolučnej metódy zistite, či množina $\boldsymbol{T} = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$ je konzistentná. Množina formúl $\boldsymbol{T}$ je konzistentná vtedy, ak jej formule spojené pomocou konjunkcií, $\varphi_{NKF} = (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a) \wedge (a \vee c)$, tvoria splniteľnú formulu. Jednotlivé rezolventy klauzúl sú uvedené v tab. 3.1. Aplikovaním vety 3.12 dostaneme túto postupnosť množín:

$$R^0(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T} = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\},$$

$$R^1(\boldsymbol{T}) = R^0(\boldsymbol{T}) \cup \{a \vee \neg c, \neg b, b \vee a, c\},$$
$$R^2(\boldsymbol{T}) = R^1(\boldsymbol{T}) \cup \{a, b, \neg c\},$$
$$R^*(\boldsymbol{T}) = R^3(\boldsymbol{T}) = R^2(\boldsymbol{T}) \cup \{\square\}$$

Pretože množina $R^*(\boldsymbol{T})$ obsahuje prázdnu formulu □, množina formúl $\boldsymbol{T}$ je nekonzistentná.

Z tohto ilustračného príkladu vyplýva, že použitie Robinsonovho rezolučného princípu (veta 3.13) je pomerne prácne. Preto sa hľadali ďalšie možnosti, ako tento prístup ďalej zjednodušiť, aby sa stal efektívnou metódou na kontrolu či daná výroková formula v KNF je kontradikciou alebo je len splniteľnou. V nasledujúcej časti tejto kapitoly ukážeme metódu, ktorá podstatne urýchľuje použitie Robinsonovho rezolučného princípu. Získame odpoveď nielen na otázku, či daná KNF formula (alebo množina $\boldsymbol{T}$ obsahujúca klauzule) je splniteľná (konzistetná), ale pre splniteľné formule nám umožní taktiež nájsť špecifikácie premenných, pre ktoré sú príslušné klauzule pravdivé.

Nech $\boldsymbol{T}$ je konečná množina klauzúl. Zvolíme si jednu výrokovú premennú (označíme ju p), ktorá je obsiahnutá v niektorých klauzulách. Potom množinu $\boldsymbol{T}$ vzhľadom k premennej p rozdelíme na tri disjunktné podmnožiny:

(1) Podmnožina $\boldsymbol{T}_0(p)$ je zložená z klauzúl, ktoré neobsahujú premennú p,

(2) podmnožina $\boldsymbol{T}_1(p)$ je zložená z klauzúl obsahujúcich pozitívnu premennú p,

(3) podmnožina $\boldsymbol{T}_2(p)$ je zložená z klauzúl obsahujúcich negatívnu premennú $\neg p$.

Ostatné možné prípady sú ignorované ako nepodstatné. Tak napríklad, ak klauzula obsahuje dva alebo viac výskytov premennej p, potom v dôsledku idempotentnosti disjunkcie tieto ďalšie výskyty môžu byť ignorované. Podobne, ak klauzula súčasne obsahuje tak pozitívnu ako aj negatívnu premennú p, tak v dôsledku tautologičnosti disjunkcie $p \vee \neg p$ celá daná klauzula môže byť eliminovaná z množiny $\boldsymbol{T}$. Nech množina $\boldsymbol{T}_{12}(p) = res_p(\boldsymbol{T}_1(p), \boldsymbol{T}_2(p))$ obsahuje všetky rezolúcie vzhľadom k premennej p, ktoré je možné vytvoriť z množín $\boldsymbol{T}_1(p)$ a $\boldsymbol{T}_2(p)$. Množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p) = \boldsymbol{T}_0(p) \cup \boldsymbol{T}_{12}(p)$ je zložená z pôvodných klauzúl $\boldsymbol{T}$ neobsahujúcich premennú p a zo všetkých možných rezolvent vzhľadom k premennej p. Podotknime, že klauzuly z množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(p)$ už neobsahujú premennú p.

Veta 3.12. Množiny klauzúl T je konzistentná vtedy a len vtedy, ak je konzistentná aj množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p)$, pričom majú spoločný model.

(1) ⇒ Nech množina $\boldsymbol{T}$ je konzistentná, potom existuje taká interpretácia premenných τ , že pre každú klauzulu $C \in \boldsymbol{T}$ platí $val_\tau(C) = 1$. Pre klauzule $C \in \tilde{\boldsymbol{T}}(p)$ táto vlastnosť automaticky platí ak $C \in \boldsymbol{T}_0(p)$. Predpokladajme, že klauzula $C \in \boldsymbol{T}_{12}(p)$, t.j. bola vytvorená rezolventou dvoch klauzúl $A \in \boldsymbol{T}_1(p)$ a $B \in \boldsymbol{T}_2(p)$, pre ktoré platí $val_\tau(A) = val_\tau(B) = 1$. Nech platí $A = A' \vee p$ a $B = B' \vee \neg p$, potom rezolventa $C = A' \vee B'$. Predpokladajme. že $val_\tau(p) = 1$, potom $val_\tau(\overline{p}) = 0$, čiže $val_\tau(B') = 1$. Naopak,

predpokladajme, že $val_\tau(p)=0$, potom $val_\tau(A')=1$. Týmto sme dokázali, že aspoň jedna z disjunktných zložiek rezolventy je pravdivá, z čoho vyplýva $val_\tau(A'\vee B')=1$. Týmto sme dokázali, že pre každú rezolventu $C\in \boldsymbol{T}_{12}(p)$ platí $val_\tau(C)=1$.

(2) $\Leftarrow$ Nech množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p)$ je konzistentná pre interpretáciu premenných τ, t.j. pre každú klauzulu $C\in\tilde{\boldsymbol{T}}(p)$ platí $val_\tau(C)=1$. V prípade, že klauzula $C\in \boldsymbol{T}_0(p)$, potom automatický platí aj $C\in\boldsymbol{T}$. Predpokladajme, že klauzula $C\in\boldsymbol{T}_{12}(p)$, t.j. vznikla rezolventou dvoch klauzúl $A\in\boldsymbol{T}_1(p)$ a $B\in\boldsymbol{T}_2(p)$, ktoré majú tvar $A=A'\vee p$ a $B=B'\vee\neg p$. Podobnou diskusiou ako v prvej časti dôkazu zistíme, že klauzuly *A* a *B* sú pravdivé pre špecifikáciu τ $val_\tau(A)=val_\tau(B)=1$. Týmto sme dokázali, že ak klauzule z množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(p)$ sú pravdivé pre špecifikáciu τ, potom pre rovnakú špecifikáciu sú pravdivé aj klauzule z ***T***, čo bolo potrebné dokázať.

Vetu 3.15 použijem pre návrh efektívnej stratégiu pre zistenie, či množina klauzúl ***T*** je konzistentná. Nech jej klauzuly obsahujú premenné $\{p_1,p_2,...,p_n\}$, potom z množiny ***T*** postupne zostrojíme postupnosť *n* množín $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_1)$, $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_2)$...., $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_n)$. Konzistentnosť (alebo nekonzistentnosť) koncovej množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_n)$ implikuje podobnú vlastnosť pôvodnej množiny ***T***. Výhoda použitého postupu spočíva v tom, že určenie konzistentnosti (nekonzistentnosti) koncovej množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_n)$ je už triviálny problém. Ak je množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_n)$ (obsahuje symbol □), potom pôvodná množina ***T*** je nekonzistentná. V opačnom prípade, množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(p_n)$ je neprázdna, jej klauzule už nie sú schopné rezolučného procesu, pomocou ich tvaru je možné určiť špecifikáciu τ pre ktoré je množina ***T*** konzistentná.

Príklad 3.8. Dokážme konzistentnosť množiny $\boldsymbol{T}=\{p\vee q, r\vee q,\neg r,\neg p\}$.

1. krok, premenná *p*: $\boldsymbol{T}_0(p)=\{r\vee q,\neg r\}$, $\boldsymbol{T}_1(p)=\{p\vee q\}$, $\boldsymbol{T}_2(p)=\{\neg p\}$, $T_{12}(p)=\{q\}$,

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(p)=\boldsymbol{T}_0(p)\cup\boldsymbol{T}_{12}(p)=\{r\vee q,\neg r,q\}$$

2. krok, premenná *r*: $\boldsymbol{T}_0(r)=\{q\}$, $\boldsymbol{T}_1(r)=\{r\vee q\}$, $\boldsymbol{T}_2(r)=\{\neg r\}$, $T_{12}(r)=\{q\}$

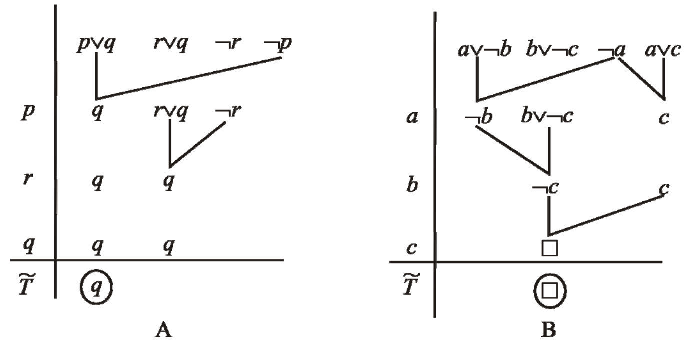
$$\tilde{\boldsymbol{T}}(r)=\boldsymbol{T}_0(r)\cup\boldsymbol{T}_{12}(r)=\{q\}$$

Potom množina $\tilde{\boldsymbol{T}}(r)$ je konzistentná pre špecifikáciu $\tau=(p/?,q/1,r/?)$, kde premenné *p* a *r* môžu mať ľubovolné pravdivostné hodnoty. Postupný proces konštrukcie množín $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ a $\boldsymbol{T}_{12}$ pre rôzne výbery premenných *p* a *r* je znázornený v tab. 3.2. Prvý riadok tabuľky obsahuje formule z množiny ***T***. V druhom riadku (označený premennou *p*) prebieha konštrukcia množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(p)=\boldsymbol{T}_0(p)\cup\boldsymbol{T}_{12}(p)=\{r\vee q,\neg r,q\}$, jednotlivé formule tejto množiny sú v tomto riadku neoznačené binárnou číslicou. V treťom riadku (označenom premennou *r*) prebieha konštrukcia množiny $\tilde{\boldsymbol{T}}(r)=\boldsymbol{T}_0(r)\cup\boldsymbol{T}_{12}(r)=\{q\}$, ktorou končí proces štúdia konzistentnosti množiny ***T***.

Tabuľka 3.2. Tabuľka pre riešenie príkladu 3.8

	$p \vee q$	$r \vee q$	$\neg r$	$\neg p$	
p	1			0	q
r		1	0		
q					1

Interpretáciu τ premenných p, q a r, pre ktorú je množina T konzistetná, nájdeme pomocou tabuľky 3.2 tak, že postupne, idúc sprava - doľava, jednotlivé premenné ohodnocujeme pravdivostnými hodnotami tak, aby formuly, v ktorých sa vyskytuje daná premenná boli pravdivé. V prvom kroku ohodnotíme $val(q) = 1$, potom $p = r = 0$. Ľahko sa presvedčíme, že pre túto interpretáciu premenných $\tau = (p/0, q/1, r/0)$ všetky klauzule z tabuľky 3.2 sú pravdivé.



Obrázok 3.7. Grafické znázornenie tabuliek 3.2 (diagram A) a 3.3 (diagram B). V každom diagrame výsledok procesu je označený krúžkom. V prípade diagramu A, krúžok obsahuje premennú q, potom množina $\tilde{T}$ je konzistentná pre interpretáciu $\tau = (p/1, q/1, r/1)$ (len premenná q je zafixovaná, ostatné premenné sú voľné). Podľa diagramu B, množina $\tilde{T}$ je nekonzistentná (kontradiktorná), obsahuje prázdny symbol □.

Príklad 3.9. Dokážte nekonzistentnosť množiny $\boldsymbol{T} = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$ (pozri príklad 5.1).

Tabuľka 3.3. Tabuľka pre riešenie príkladu 3.7

	$a \vee \neg b$	$b \vee \neg c$	$\neg a$	$a \vee c$				
a	1		0	1	$\bar{b}$	c		
b		1			0		$\neg c$	
c						1	0	□

1. krok, premenná a: $\boldsymbol{T}_0(a) = \{b \vee \neg c\}$, $\boldsymbol{T}_1(a) = \{a \vee \neg b, a \vee c\}$, $\boldsymbol{T}_2(a) = \{\neg a\}$, $T_{12}(a) = \{\neg b, c\}$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(a) = \boldsymbol{T}_0(a) \cup \boldsymbol{T}_{12}(a) = \{b \vee \neg c, \neg b, c\}$$

2. krok, premenná b: $\boldsymbol{T}_0(b) = \{c\}$, $\boldsymbol{T}_1(b) = \{b \vee \neg c\}$, $\boldsymbol{T}_2(b) = \{\neg b\}$, $T_{12}(b) = \{\neg c\}$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(b) = \boldsymbol{T}_0(b) \cup \boldsymbol{T}_{12}(b) = \{c, \neg c\}$$

3. krok, premenná c: $\boldsymbol{T}_0(c) = \emptyset$, $\boldsymbol{T}_1(c) = \{c\}$, $\boldsymbol{T}_2(c) = \{\neg c\}$, $T_{12}(c) = \{\square\}$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(c) = \boldsymbol{T}_0(c) \cup \boldsymbol{T}_{12}(c) = \{\square\}$$

Týmto sme dokázali, že množina $\boldsymbol{T}$ je nekonzistentná. Podobne ako v predchádzajúcom príklade, proces je vizualizovaný tabuľkou 3.3. Proces znázornený v tabuľkách 3.2-3 je graficky znázornený na obr. 3.7.

3.3.1 Metóda duálnej rezolventy

V prvej časti tejto kapitoly bola prezentovaná metóda sémantických tabiel v dvoch verziách. Prvá štandardná verzia je založená na formulách v tvare DNF, ak sémantické tablo je uzavreté (každé vetva obsahuje dvojicu komplementárnych literálov), potom formula je kontradikcia. Druhá duálnej verzia využíva formuly v tvare KNF, ak duálne sémantické tablo je uzavreté, potom formula je tautológia. Tieto dve verzie sémantických tabiel sú založené na dualite medzi disjunkciou a konjunkciou.

Štandardná verzia rezolventy prezentovaná v podkapitole 3.3 je založená na KNF formulách. Použitý prístup je založený na postupnom rozširovaní skúmanej KNF formuly na ekvivalentný KNF tvar, ktorý vznikol pridaním novej disjunktívnej klauzuly vzniknutej rezolventou z iných dvoch klauzúl, ktoré majú spoločnú dvojicu komplementárnych literálov (pozri formuly (3.11) a (3.12)). Ak týmto postupom zostrojíme takú „rozšírenú“ formulu obsahujúcu dve elementárne klauzuly obsahujúce po jednom literále, ktoré sú však vzájomne komplementárne, rezolventa týchto dvoch klauzúl produkuje „prázdny“ symbol $\square = (l \wedge \neg l)$.

Z tejto vlastnosti, existencie prázdneho symbolu $\square$ (symbol reprezentuje konštantu výrokovej logiky „nepravda“, ktorá je v konjunkcii s ostatnými klauzulami formuly), bezprostredne vyplýva, že skúmaná KNF formula je kontradikcia (alebo jej negácia je tautológia).

Podobnú analógiu aká existuje v metóde sémantických tabiel, môžeme hľadať aj v metóde rezolventy, ukážeme modifikáciu metódy rezolventy založenej na DNF funkciách, pričom prázdny symbol $\square = (l \vee \neg l)$ reprezentuje konštantu výrokovej logiky „pravda“. Ak sa nám podarí ukázať, že pri postupnom aplikácií metódy duálnej rezolventy vzniká tento prázdny symbol, potom skúmaná DNF formula je tautológia.

Definícia 3.2. Formula $C^{conj} = C_1' \wedge C_2'$ sa nazýva ***duálna rezolventa*** konjunktívnych klauzúl $C_1 = C_1' \wedge l$ a $C_2 = C_2' \wedge \neg l$ vzhľadom k literálu l, $C^{conj} = res_l^{conj}(C_1, C_2)$.

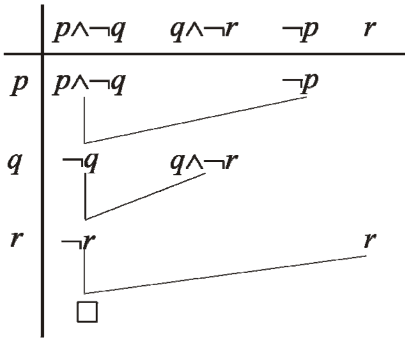
Teoretickým základom metódy duálnej rezolventy je modifikácia vety 5.3

Veta 3.13. (Metóda duálnej rezolventy). Nech B a C sú dve konjunktívne klauzuly tvaru $B = B' \vee l$ a $C = C' \vee \neg l$, kde l je literál, potom platí

$$(B' \wedge l) \vee (C' \wedge \neg l) \equiv (B' \wedge l) \vee (C' \wedge \neg l) \vee (B' \wedge C') \tag{3.11}$$

Podobne ako v predchádzajúcom, táto veta sa ľahko dokáže ako dôsledok "duálnej" formuly $(B' \wedge l) \vee (C' \wedge \neg l) \Rightarrow (B' \wedge C')$ (pozri vetu 3.8) pomocou tabuľkovej metódy. To znamená, že môžeme zostrojiť alternatívnu teóriu rezolventy (duálnej rezolventy), ktorá je založená na výrokových formulách v tvare DNF, t. j. množina T nad ktorou prebieha metóda rezolúcie, obsahuje konjunktívne klauzule; ak sa nám v jeho priebehu objaví prázdny symbol □, potom formula je tautológia.

Veta3.14. Nech metódu duálnej rezolúcie aplikujeme na formulu φ, ak sa v priebehu jej vykonávania objaví symbol □, potom táto formula je tautológia.



Obrázok 3.8. Diagramatické znázornenie metódy duálnej rezolventy, ktorá je aplikovaná na funkciu $\varphi_{NDF} = (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p) \vee r$. V procese aplikácie tejto metódy vznikol prázdne symbol □, čiže formula je tautológia.

Príklad 3.10. Dokážte pomocou metódy duálnej rezolventy, že formula hypotetického sylogizmu

$$\varphi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

je tautológia. Formulu φ prepíšeme najprv do tvaru DNF

$$\varphi_{DNF} = (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p) \vee r$$

Množina T má potom tvar

$$T = \{p \wedge \neg q, q \wedge \neg r, \neg p, r\}$$

Na obr. 3.8 je ukázané, že v priebehu aplikácie duálnej rezolúčnej metódy sme dospeli k symbolu □, t. j. formula φ je tautológia.

3.4 Vzťah medzi rezolučným princípom a sémantickými tablami

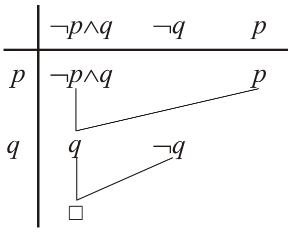
Vzťah medzi rezolučným princípom a sémantickými tablami budeme ilustrovať jednoduchými príkladmi, takto získané závery pokúsime sa generalizovať tak, aby mali všeobecnú platnosť. Uvažujme formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, pomocou aplikácie rezolučnej metódy dokážeme, že táto formula je tautológia. Prepíšeme formulu $\neg\varphi$ do KNF tvaru,

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv \neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)) \\ &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \Rightarrow \neg p) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg(q \vee \neg p) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q) \wedge (p) \end{aligned} \tag{3.12}$$

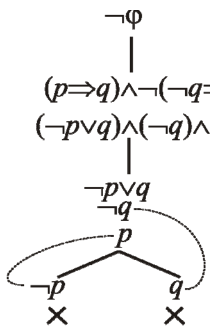
Teória $\boldsymbol{T}$ obsahuje jej disjunktívne klauzuly

$$T_{\neg\varphi} = \{\neg p \vee q, \neg q, p\} \tag{3.13}$$

Pomocou vety 3.15 ľahko ukážeme, že formula $\neg\varphi$ je kontradikcia (formula φ je tautológia) ak proces opakovanej aplikácie rezolučného princípu vedie ku vzniku prázdneho symbolu $\square$, pozri obr. 3.9.



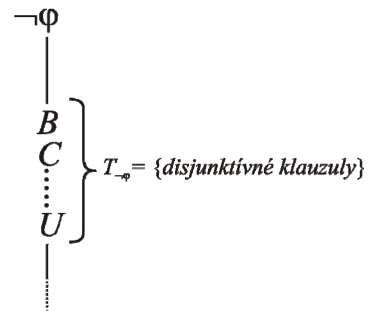
Obrázok 3.9. Aplikácia rezolúčneho princípu k množine (3.13) klauzúl $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi}$, proces aplikácie je ukončený vznikom prázdneho symbolu, t. j. formula φ je tautológia.



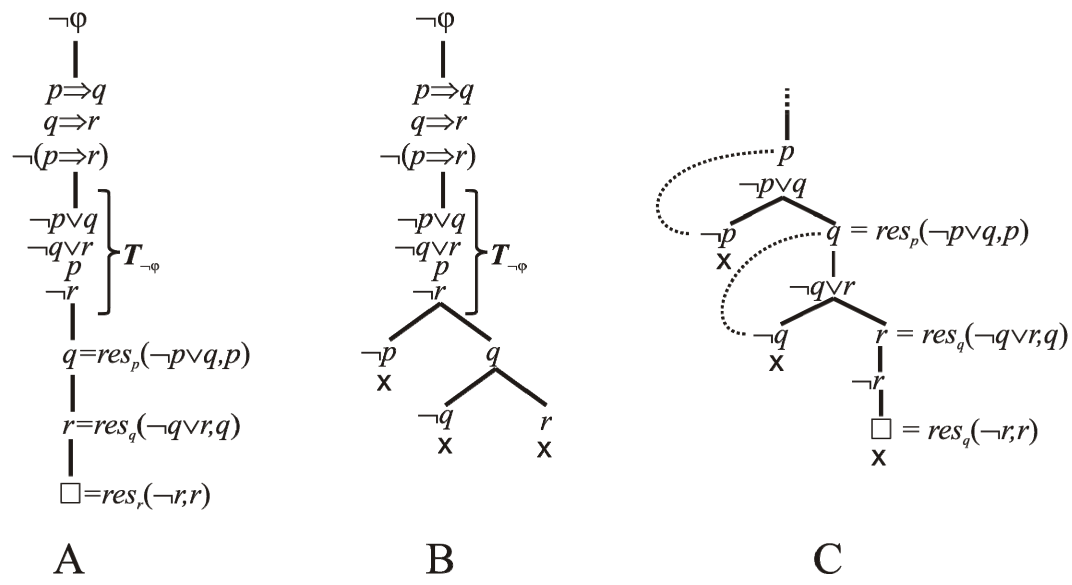
Obrázok 3.10. Sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ pre formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$. Pretože toto tablo je uzavreté, potom formula φ je tautológia.

Pomocou metódy sémantických tabiel dokážeme, že formula $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je tautológia, t. j. ukážeme, že sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, pozri obr. 3.10.

Porovnaním obr. 3.9 a 3.10 zistíme, že medzi metódou sémantických tabiel a metódou rezolučného princípu existuje určitá príbuznosť. V prvej etape tejto konštruktívnej ilustrácie upriamime našu pozornosť na vznik disjunktívnych klauzúl z formuly $\neg\varphi$, t. j. na konštrukciu množiny $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi}$. Tento proces je najlepšie zvládnuteľný pomocou sémantických tabiel, kde vytváranie disjunktívnych klauzúl má jednoduchú diagramatickú interpretáciu predlžovania tabla len pomocou konjunkcie (t. j. nedochádza k vetveniu tabla ako dôsledku predlžovania pomocou disjunkcie) . Ak položíme $(\neg\varphi) = B \wedge C \wedge ... \wedge U$, kde B, C, ..., U sú disjunktívne klauzuly formuly $\neg\varphi$, potom prvá časť (horná) tabla je znázornená na obr. 3.11.



Obrázok 3.11. Diagramatické znázornenie tvorby hornej časti sémantického tabla $\mathcal{T}(\neg\varphi)$, ktorá obsahuje len disjunktívne klauzuly, t. j. nevetví sa, je stále lineárne.



Obrázok 3.12. Použitím metód rezolúčneho princípu (diagram A) a metódy sémantického tabla (diagram B) budeme študovať formulu $\varphi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, či je alebo nie je tautológiou. Prepíšeme negáciu tejto formuly $\neg\varphi$ do KNF tvaru, $(\neg\varphi)_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (p) \wedge (\neg r)$. Túto formulu môžeme použiť pre tvorbu hornej časti sémantického tabla, kde jednotlivé disjunktívne klauzuly (označené symbolom $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi}$) sú umiestnené lineárne pod sebou. Diagram A znázorňuje diagramatickú interpretáciu metódy rezolučného princípu a diagram B znázorňuje diagramatickú reprezentáciu sémantického tabla. Diagram C je ilustráciou ekvivalentnosti medzi metódou rezolučného princípu a sémantického tabla, použitím predlžovania tabla pomocou vetvenia dostávame lineárne sémantické tablo, ktoré je totožne s diagramatickou interpretáciou rezolučného princípu.

Po ukončení prvej etapy konštrukcie sémantického tabla, keď poznáme množinu (teóriu) $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi} = \{B, C, ..., U\}$, môžeme pristúpiť k druhej etape stanovenia kontradikčnosti formuly $\neg\varphi$. K tomuto cieľu môžeme použiť buď metódu sémantického tabla alebo metódu rezolučného princípu. Ak použijeme metódu sémantického tabla, potom použitá technika je založená na predlžovaní tabla pomocou disjunkcií (tablo sa vetví). Tento prístup môžeme pokladať za analogiu Robinsonovho rezolučného princípu, kde sa opakovane vytvára pomocou rezolventy dvojice klauzúl nová disjunktívna klauzule. V oboch prípadoch, tak b metóde sémantického tabla, ako aj metóde rezolučného princípu, po konečnom počte krokov sme schopný rozhodnúť, či formula $\neg\varphi$ je alebo nie je kontradikcia (formula φ je alebo nie je tautológia). Na obr. 3.11 je znázornená aplikácia operácie rezolventy (pozri formulu (3.11)) k tablu z obr. 3.16. Vyberieme si dva vrcholy, vykonáme operáciu rezolventy a takto vzniklú formulu použijeme pre lineárne predĺženie sémantického tabla. V prípade, že sa nám pri tomto predlžovaní objaví prázdny symbol □, potom operácia predlžovania je zastavená a vieme, že formula $\neg\varphi$ je kontradikcia (formula φ je tautológia). Zostáva nám ešte bližšie špecifikovať výber dvojice formúl pre opráciu rezolventy. K tomuto účelu môžeme použiť vetu 3.15, podľa ktorej si najprv zvolíme výrokovú premennú a pre takto dočasne fixovanú premennú vyberáme všetky možné este nepoužité formuly, ktoré obsahujú túto premennú v tvare dvojice komplementých literálov (pozri obr. 3.12).

Sumarizujúc naše jednoduché ilustratívne príklady, ukázali sme, že metódy sémantické tabla a rezolučného princípu:

(1) môžu byť diagramaticky interpretované (menovite metóda rezolúčneho princípu),

(2) majú spoločnú prvú etapu, keď formula $\neg\varphi$ je postupne transformovaná na konjunkciu disjunktívnych klauzúl (t. j. tvoríme množinu $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi}$),

(3) v druhej etape takto vytvorenú množinu klauzúl $\boldsymbol{T}_{\neg\varphi}$ môžeme použiť buď v rámci metódy sémantického tabla k jeho vetvenému predlžovaniu alebo v rámci metódy rezolučného princípu k lineárnemu predlžovaniu tabla pomocou rekurentného použitia operácie rezolventy,

(4) v oboch prípadoch sme schopný rozhodnúť, či formula $\neg\varphi$ je kontradikcia, v prípade sémantického tabla na základe je uzavrenosti a v prípade rezolučného princípu na základe výskytu prázdneho symbolu.

Týmto sme ukázali, že metódy sémantického tabla a rezolučného princípu, ktoré sú zdanlivo úplne rozdielne, začínajú sa odlišovať až v druhej etape. Použitie rezolučného princípu v druhej etape poskytuje medzivýsledky, ktoré sú v priamej relácii s vlastnosťami sémantického tabla, kde sa používa princíp predlžovania pomocou disjunktívnych klauzúl a vetvenie je okamžite uzavretév dôsledku existencie vhodného literálu (rezultujúce sémantické tablo je „lineárne“), pozri obr. 3.17.

Veta 3.15. Metódy sémantického tabla a rezolučného princípu aplikované k stanoveniu kontradikčnosti formuly $(\neg\varphi)_{KNF}$, sú v rámci vhodnej diagramatickej interpretácie ekvivalentnými metódami.

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Pomocou metódy sémantických tabiel a konjugovaných sémantických tabiel dokážte, že formuly sú tautológie
(a) $\left(p\vee\left(q\wedge r\right)\right)\Rightarrow\left(\left(p\vee q\right)\wedge\left(p\vee r\right)\right)$,

(b) $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))$,

(c) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$.

Cvičenie 3.2. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte, že množina formúl $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, p \wedge q, p \Rightarrow p \vee q\}$ je neprotirečivá (t.j. existuje aspoň jedna špecifikácia premenných $\tau_1 = (p/?, q/?)$, pre ktorú sú všetky formuly z $\boldsymbol{T}$ pravdivé).

Cvičenie 3.3. Pomocou sémantických tabiel a konjugovaných sémantických tabiel zistite, či formuly sú tautológie, splniteľné alebo kontradikcie

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$,

(b) $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$,

(c) $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow \neg p$.

Cvičenie 3.4. Pomocou sémantických tabiel dokážte konzistentnosť alebo nekonzistentnosť teórií

(a) $\boldsymbol{T} = \{s_1, s_2, s_1 \Rightarrow d_1, s_2 \Rightarrow d_1 \wedge d_2\}$,

(b) $\boldsymbol{T} = \{s_1, s_2, s_1 \Rightarrow d_1, s_2 \Rightarrow \neg d_1 \wedge d_2\}$,

(c) $\boldsymbol{T} = \{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$,

(d) $\boldsymbol{T} = \{p \wedge r, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r)\}$

Cvičenie 3.5. Pomocou metódy sémantických tabiel riešte reláciu $\Phi \models ?$, kde $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ je množina (teória) formúl výrokovej logiky, cieľom úlohy je určiť takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ.

(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models ?$

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \models ?$

(c) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \models ?$

(d) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \models ?$

Cvičenie 3.6. Zostrojte rezolventy pre tieto disjunktívne klauzuly:

(a) $x \vee \neg y \vee z$ a $\neg x \vee, z \vee \neg t$

(b) $a \vee b$ a $\neg b \vee c$

(c) $p \vee q \vee r \vee \neg s$ a $p \vee q \vee s \vee \neg t$

Cvičenie 3.7. Vytvorte množinu $R(T)$ pre $T = \{\neg a \vee b, \neg b \vee c, a \vee d, a \vee \neg c, a \vee \neg d\}$

Cvičenie 3.8. Použitím rezolučnej metódy a duálnej rezolučnej metódy rozhodnite či množina $\boldsymbol{T}$ má model:

(a) $T = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s \vee t, \neg s \vee y, \neg t, \neg p \vee x, \neg q \vee w, \neg q \vee \neg w\}$

(b) $T = \{a, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg d \vee f, \neg d \vee b, \neg c \vee g, \neg f \vee g, \neg g\}$

(c) $T = \{x \vee y, \neg z \vee t, \neg x \vee t, \neg y \vee z, \neg t\}$

(d) $T = \{p \Rightarrow (r \vee s), \neg p \Rightarrow q, r \Rightarrow (t \wedge v), (t \wedge v) \Rightarrow s\}$

(e) $T = \{a \Rightarrow (b \wedge f), (a \wedge b) \Rightarrow c, c \Rightarrow (f \Rightarrow (\neg d \vee f)), a\}$

Cvičenie 3.10. Použitím rezolučnej metódy a sémantických tabiel rozhodnite či množina formúl T má model a či formula α je tautologickým dôsledkom T, $T \vDash \alpha$.

(a) $T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}$, $\alpha = z$

(b) $T = \{p, (p \wedge r) \Rightarrow s, (p \wedge q) \Rightarrow t, q \Rightarrow r, (s \vee t) \Rightarrow w\}$, $\alpha = w$

Cvičenie 3.11. Formalizujte tieto výroky. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či výrok pod čiarou je tautologický dôsledok výrokov nad čiarou.

(a)
Ak prší, potom nepôjdeme na prechádzku
Ak nepôjdeme na prechádzku, potom pôjdeme do kina
ak pôjdeme do kina a bude pršať, potom použijeme autobus
prší

---

pôjdeme do kina

(b)
Peter alebo Pavol pôjde do Grécka
Ak Pavol pôjde do Grécka, potom taktiež pôjde aj Renáta a Simona nepôjde
Ak Tomáš pôjde do Grécka, potom pôjde taktiež aj Renáta
Ak Simona pôjde do Grécka, potom taktiež pôjde aj Tomáš

Peter pôjde do Grécka

Literatúra

[1] Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam 1959.

[2] Beth, E. W: Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. **18** (1955) 309-342.

[3] D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hahnle, R., Posegga, J. (eds.): *Handbook of Tableau Methods*. Springer, Berlin 1999.

[4] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2006.

[5] Kvasnička V., Pospíchal, J.: Technika sémantických tabiel v logike. In *Umelá inteligencia a kognitívna veda*, II. Dieľ. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2010.

[6] Peregrin, J.: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[7] Priest, G.: *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[8] Smullyan, R. M.: *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin 1968 (slovenský preklad *Logika prvého rádu*. ALFA, Bratislava 1979).

[15] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[16] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

4. kapitola

Výroková logika IV – prirodzená dedukcia

4.1 Prirodzená dedukcia

V kapitole 2.2 sme špecifikovali odvodzovanie formúl výrokovej logiky a logický dôkaz pomocou troch základných pravidiel (2.1-3) a desiatich axióm (2.5a-i). Musíme však zdôrazniť, že z troch pravidiel odvodzovania, len prvé pravidlo (2.1) *modus ponens* je dôležité. Ostatné dve substitučné pravidlá (2.2-3) sú dôsledkom skutočnosti, že z jednoduchých tautológií môžeme generovať zložitejšie tautológie tak, že premenné nahradíme ľubovoľnými formulami, alebo taktiež tak, že podformule substituujeme ekvivalentnými formulami. Takto definovaný axiomatický systém obsahuje niekoľko málo pravidiel, ale desať axióm, ktoré môžeme pokladať za prvotné zákony - teorémy, z ktorých všetky ostatné sú už odvoditeľné pomocou pravidiel. Tento prístup k výstavbe výrokovej logiky je formálne jednoduchý, avšak pomerne vzdialený od prirodzeného každodenného uvažovania. Systém prirodzenej dedukcie bol navrhnutý nemeckým logikom Gentzenom v 30. rokoch minulého storočia [3] (pozri taktiež [1,2,4]), ktorý obsahuje relatívne mnoho (deväť) dedukčných Pravidlá majú túto všeobecnú štruktúru

$$\begin{array}{|l} \left.\begin{array}{l} premisa_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ premisa_m \end{array}\right\}\Phi \\ \hline dôsledok_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ dôsledok_n \end{array} \tag{4.1}$$

kde v hornej časti schémy sú umiestnené premisy (predpoklady) a v dolnej časti schémy sú umiestnené konzekventy (dôsledky). V súhlase s definíciou 2.3, odvodenie je postupnosť formúl. Deduktívne pravidlo je použité v odvodení ak sme schopní použiť všetky jeho premisy. Potom môžeme rozšíriť odvodenie o dôsledky daného pravidla.

V prirodzenej dedukcii premisy tvoria množinu $\Phi = \{prem_1, prem_2, ..., prem_m\}$, cieľom je odvodiť formulu φ, čo vyjadríme ako $\Phi \vdash \varphi$. V prirodzenej dedukcii sa využíva efektívne veta o dedukcii (pozri vetu 2.3), ktorá podstatne urýchľuje dôkazy uskutočnené pomocou prirodzenej dedukcie. Využitie tejto vety spočíva v tom, že množinu predpokladov ***T*** rozšírime o pomocný predpoklad α (hovoríme, že sme tento pomocný predpoklad ***aktivovali***), pomocou takto rozšírenej množiny $\Phi \cup \{\alpha\}$ dokážeme formulu φ, $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$, na záver deaktivujeme pomocný predpoklad α ta, že ho pomocou vety o dedukcii prenesieme na pravú stranu relácie logického vyplývania, $\Phi \vdash \alpha \Rightarrow \varphi$. Po ***deaktivácii*** predpokladu α, už v ***ďalších krokoch prirodzeného dôkazu pomocný predpoklad*** α ***sa už nesmie používať ako***

premisa dôkazu. Budeme predpokladať, že prirodzená dedukcia obsahuje pravidlá (ktoré sú uvádzané ako priame dôsledky axióm Hilbertovho systému prezentovaného v kapitole 2.2 (pozri tabuľku 4.1).

1a. *Introdukčné pravidlo pre konjunkciu* (I$\wedge$)

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \psi \\ \hline \varphi \wedge \psi \end{array} \tag{4.2}$$

Ak sme schopný odvodiť súčasne formule φ a ψ, potom sme taktiež schopný odvodiť aj formulu $\varphi \wedge \psi$. Toto pravidlo je dôsledkom Hilbertovej axiómy $\mathbf{Ax}_5$, z ktorej dvojnásobným použitím modus ponens z predpokladov φ a ψ odvodíme dôsledok $\varphi \wedge \psi$.

1.b. *Eliminačné pravidlo pre konjunkciu* (E$\wedge$)

$$\begin{array}{|l} \varphi \wedge \psi \\ \hline \varphi \\ \psi \end{array} \tag{4.3}$$

Podľa tohto eliminačného pravidla, ak sme schopný odvodiť konjunkciu $\varphi \wedge \psi$, potom sme schopný odvodiť aj jej komponenty φ a ψ. Toto pravidlo je dôsledkom axióm $\mathbf{Ax}_{3\text{-}4}$, podľa ktorých z platnosti $\varphi \wedge \psi$ vyplývajá platnosť jej zložiek φ a ψ.

2a. *Introdukčné pravidlo pre disjunkciu* (I$\vee$)

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \varphi \vee \psi \end{array} \tag{4.4}$$

Ak sme schopný odvodiť formulu φ, potom sme schopný odvodiť aj jej disjunkciu s ***ľubovolnou*** formulou ψ. Toto pravidlo je dôsledkom axióm $\mathbf{Ax}_{6\text{-}7}$, podľa ktorých z platnosti φ vyplýva taktiež platnosť $\varphi \vee \psi$, pričom ψ je ľubovolná formula. Toto introdukčné pravidlo pre disjunkciu je alternatívne interpretované tak, že formula ψ je aktivovaný dodatočný predpoklad celkového dôkazu, jej použitie pomocou pravidla (2.6) znamená deaktiváciu tohto dodatočného predpokladu (v ďalších častiach dôkazu sa už nevyužíva).

2b. *Eliminačné pravidlo pre disjunkciu* (E$\vee$)

$$\begin{array}{|l} \varphi \vee \psi \\ \neg\varphi \\ \hline \psi \end{array} \tag{4.5}$$

Podľa tohoto pravidla, ak sme schopný súčasne odvodiť disjunkciu $\varphi \vee \psi$ a $\neg\varphi$, potom jej druhá komponenta ψ je taktiež odvodené pravidlo. Toto pravidlo má základ v zákone výrokovej logiky $\neg\varphi \Rightarrow \left(\left(\varphi \vee \psi\right) \Rightarrow \psi\right)$, podľa ktorého dvojnásobným použitím pravidla modus ponens a z predpokladov $\neg\varphi$ a $\varphi \vee \psi$ vyplýva ψ (t.j. ak je pravdivá disjunkcia $\varphi \vee \psi$ a jej komponenta φ je nepravdivá, potom druhá komponenta ψ musí byť pravdivá). Toto pravidlo môže byť jednoducho odvodené axiómy $\mathbf{Ax}_8$ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$ Hilbertovho axiomatického systému výrokovej logiky, ktorú po substitúciách p/φ, q/ψ a $r/0$ prepíšeme do tvaru $(\neg\varphi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi))$, kde sme použili ekvivalenciu $(s \Rightarrow 0) \equiv \neg s$. Ak v poslednom výraze prehodíme komponenty implikácie dostaneme požadovaný zákon výrokovej logiky, ktorý tvorí základ eliminančného pravidla pre disjunkciu.

3a. *Introdukčné pravidlo pre implikácie* (I⇒)

$$\begin{array}{|l} \quad\varphi \\ \hline \psi \Rightarrow \varphi \end{array} \tag{4.6}$$

Ak sme schopný odvodiť formulu φ, potom pomocou ***ľubovolnej*** formule ψ sme taktiež schopný odvodiť aj implikáciu $\psi \Rightarrow \varphi$. Toto pravidlo vyplýva axiómy $\mathbf{Ax}_1$. Podobne ako v introdukčnom pravidle (4.4) pre disjunkciu, aj introdukčné pravidlo pre implikáciu môže byť alternatívne interpretované tak, že ľubovoľná formula ψ je dodatočný aktivovaný predpoklad, jej použitie podľa pravidla (2.6) sa chápe ako deaktivácia pomocného predpokladu (vlastne sme použili vetu o dedukcii).

Tabuľka 4.1. Diagramatická interpretácia eliminačných a introdukčných pravidiel (aj s ich označením) pre všetky logické spojky.

spojka	eliminácia	Introdukcia
∧	$\varphi\wedge\psi \rightarrow \varphi,\ \psi$	$\varphi,\ \psi \rightarrow \varphi\wedge\psi$
∨	$\varphi\vee\psi,\ \neg\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi,\ \psi \rightarrow \varphi\vee\psi$
⇒	$\varphi\Rightarrow\psi,\ \varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi,\ \varphi \rightarrow \psi\Rightarrow\varphi$
¬	$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	$\varphi\Rightarrow\psi,\ \varphi\Rightarrow\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$; $\varphi\Rightarrow\psi,\ \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

3b. *Eliminačné pravidlo pre implikáciu* (E⇒, v klasickej logike sa nazýva *pravidlo modus ponens – pravidlo odlúčenia*)

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \psi \end{array} \tag{4.7}$$

Podľa tohto známeho pravidla, ak sme schopný odvodiť φ a $\varphi \Rightarrow \psi$, potom sme schopný odvodiť aj dôsledok implikácie ψ. Toto eliminačné pravidlo modus ponens je manifestáciou zákona výrokovej logiky $\left(p \wedge (p \Rightarrow q)\right) \Rightarrow q$.

4a. *Introdukčné pravidlo negácie* (I$\neg$), budeme používať pre zjednodušenie našich úvah dve pravidla

$$\begin{array}{|l} \varphi \Rightarrow \psi \\ \varphi \Rightarrow \neg\psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{|l} \neg\psi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \tag{4.8}$$

Prvé pravidlo (v klasickej logike sa nazýva *reductio ad absurdum*) vyplýva bezprostredne z axiómy $\mathbf{Ax}_9$, druhé pravidlo sa v klasickej logike nazýva *modus tollens*, ktoré vyplýva z pravidla modus ponens a zákona inverzie implikácie $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, ktorý je dokázateľný pomocou $\mathbf{Ax}_9$ (pozri príklad 1.x).

4b. *Eliminačné pravidlo negácia* (E$\neg$)

$$\begin{array}{|l} \neg\neg\varphi \\ \hline \varphi \end{array} \tag{4.9}$$

Toto pravidlo bezprostredne vyplýva z axiómy $\mathbf{Ax}_{10}$.

Tabuľka 4.2. Zoznam pravidiel zámeny.

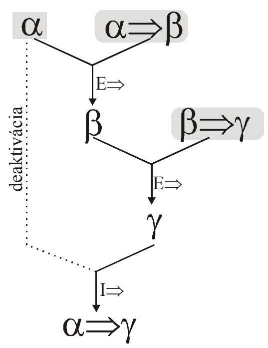
I	$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	komutatívnosť konjunkcie a disjunkcie
II	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$, $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$	asociatívnosť konjunkcie a disjunkcie
III	$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$ $\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$	idempotentnosť konjunkcie a disjunkcie
IV	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributívnosť medzi konjunkciou a disjunkciou
V	$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	de Morganove vzťahy
VI	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	transpozícia implikácie
VII	$(\varphi \equiv \psi) \equiv \left((\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)\right)$	ekvivalencia a implikácie
VIII	$\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi$	exportácia implikácie
IX	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	disjunktívny tvar implikácie

Pre jednoduché použitie prirodzenej dedukcie je dôležité jej rozšírenie o tzv. pravidlá zámeny, pozri tab. 4.2. Použitie týchto pravidiel je odôvodnené tým, že sa jedná o logické zákony, ktoré môžu byť separátne odvodené pomocou schém usudzovania z tab. 4.1, ich použitie preto predstavuje podstatné skrátenie dôkazu, nemusí byť opakované v danom dôkaze.

Príklad 4.1. Nájdite odvodenie $\alpha \Rightarrow \gamma$ z množiny premís $\Phi = \{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\}$ (pozri obr. 4.1).

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(premisa z Φ)
2.	$\beta \Rightarrow \gamma$	(premisa z Φ)
3.	α	(aktivácia pomocného predpokladu)
4.	β	(E$\Rightarrow$ použité na 1 a 3)
5.	γ	(E$\Rightarrow$ použité na 2 a 4)
6.	$\alpha \Rightarrow \gamma$	(I$\Rightarrow$ použité na 3 a 5, deaktivácia predpokladu 3)

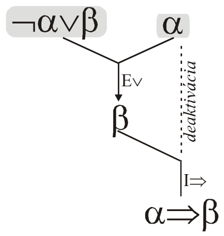
Použitie predpokladu α vyžaduje komentár. Jeho použitie môžeme chápať ako rozšírenie množiny premís Φ o ďalší predpoklad α, potom našou snahou je vlastne realizovať dôkaz $\Phi \cup \{\alpha\} \vDash \gamma$. Tento dôkaz sa dá ľahko uskutočniť dvojnásobným použitím pravidla modus ponens (1.18) (pozri obr. 1.7). Použitím vety (1.3) o dedukcii, pôvodný cieľ $\Phi \cup \{\alpha\} \vDash \gamma$ je možné prepísať do ekvivalentného tvaru $\Phi \vDash (\alpha \Rightarrow \gamma)$, kde premenná α už nevystupuje explicitne medzi premisami dôkazu. Gentzen navrhol také formálne riešenie tohto „problému“, že premenná α sa na začiatok dôkazu formálne umiestni medzi premisy (aktivuje sa), avšak na záver dôkazu sa musí inkorporovať (deaktivovať) pomocou introdukčného pravidla pre implikáciu (4.6) do požadovaného výsledku.



Obrázok 4.1. Diagramatické znázornenie dôkazu formuly v príklade 4.1. Premisy dôkazu sú v oválnych „vyšrafovaných“ oblastiach, zatiaľ čo štvorcová „vyšrafovaná“ oblasť obsahuje predpoklad α.

Príklad 4.2. Nájdite odvodenie $\alpha \Rightarrow \beta$ z množiny premís $\Phi = \{\neg\alpha \vee \beta\}$ (pozri obr. 4.2).

1.	α	(aktivácia pomocného predpokladu)
2.	$\neg\alpha \vee \beta$	(premisa z Φ)
3.	β	(E$\vee$ použité na 1 a 2)
4.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(I$\Rightarrow$ použité na 1 a 3, deaktivácia predpokladu 1)

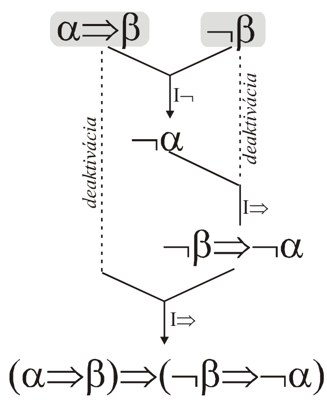


Obrázok 4.2. Diagramatická interpretácia riešenia príkladu 4.2.

Príklad 4.3. Nájdite dôkaz $\vdash(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$ (pozri obr. 4.3).

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(aktivácia pomocného predpokladu)
2.	$\neg\beta$	(aktivácia pomocného predpokladu)
3.	$\neg\alpha$	(I¬ použité pre 1 a 2)
4.	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	(I⇒ použité na 2 a 3, deaktivácia 2)
5.	$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	(I⇒ použité na 1 a 4, deaktivácia 1)

V tomto príklade množina premís Φ je dokonca prázdna, našim cieľom je teda dokázať $\vdash(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$. Zavedenie dvoch pomocných predpokladov pre odvodenie vyjadríme prostredníctvom relácie logického vyplývania $\{\neg\beta, \alpha \Rightarrow \beta\} \vdash \neg\alpha$. V prvok kroku pomocou modus tollens (negatívne pravidlo odlúčenia) z predpokladov odvodíme $\neg\alpha$, z ktorého v ďalšom druhom kroku odvodíme $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$, pričom sa deaktivuje predpoklad $\neg\beta$. V poslednom treťom kroku k implikácii z predchádzajúceho kroku pripojíme prvý predpoklad, čím dostaneme požadovanú formulu a súčasne deaktivujeme prvý predpoklad. Tento postup je znázornený na obr. 4.3.

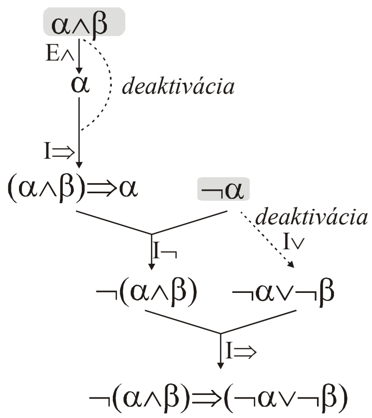


Obrázok 4.3. Diagramatická interpretácia riešenia príkladu 4.3.

Príklad 4.4. Nájdite dôkaz $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (pozri obr. 4.4).

1.	$\neg\alpha$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$\alpha \wedge \beta$	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	α	(E$\wedge$ na 2)
4.	$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$	(I$\Rightarrow$ použité na 2 a 3, deaktivácia 2)
5.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	(E$\neg$ použité na 1 a 4)
6.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	(I$\vee$ použité na 1, deaktivácia 1, $\neg\beta$ je ľubovolná formula)
7.	$\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$	(I$\Rightarrow$ použité na 5 a 6).

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, množina premís Φ je prázdna, dokazujeme teda $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ tak, že aktivujeme dva pomocné predpoklady $\{\neg\alpha, \alpha \wedge \beta\}$. Z druhého pomocného predpokladu vyplýva $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$ (pozri riadky 3 a 4). Použitím modus tollens na túto formulu a prvý pomocný predpoklad, dostaneme $\neg(\alpha \wedge \beta)$ (pozri riadok 5). Množina predpokladov $\{\neg\alpha, \alpha \wedge \beta\}$ je však nekonzistentná, z druhého predpokladu pomocou (1.19) vyplýva platnosť α, čo je v spore s prvým predpokladom, preto musí platiť $\neg(\alpha \wedge \beta)$.



Obrázok 4.4. Diagramatická interpretácia riešenia príkladu 4.4.

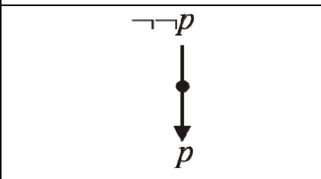
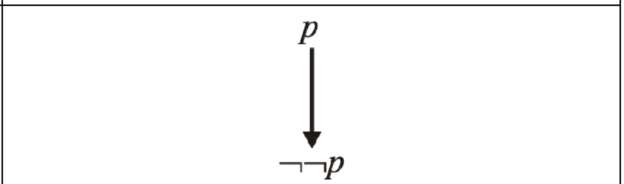
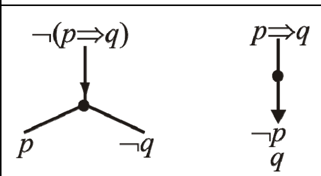
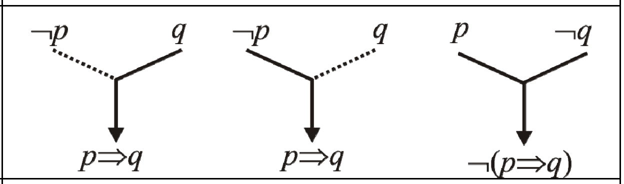
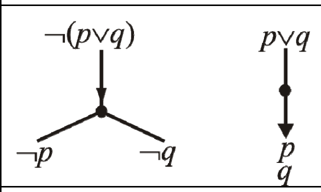
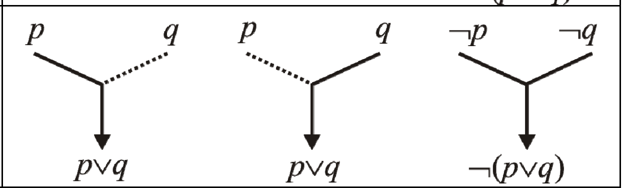
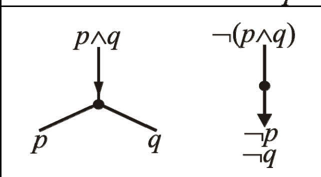
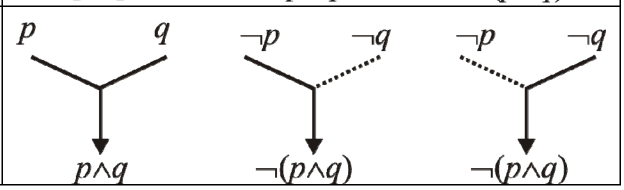
4.1 Vzťah medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami

Cieľom tejto podkapitoly je ukázať, že medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami existuje úzka súvislosť. Podľa vety 3.6 platí, že ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté, potom formula φ je tautológia. Ukážeme, že sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ v inverznom poradí môže slúžiť ako návod pre dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, pričom potrebné vstupné výrokové premenné a ich negácie sú tvorené pomocou triviálnych tautológií typu $\neg p \vee p \equiv p \Rightarrow p$. Prirodzenú dedukciu v tomto prípade budeme realizovať pomocou diagramov (pozri obr. 4.1-4), ktorých konštrukciu budeme interpretovať ako inverziu duálného sémantického tabla. Použité schémy usudzovania pre tvorbu diagramatickej reprezentácia prirodzenej dedukcie sú uvedené v tab. 4.3). V tomto prípade sa používajú len tie najjednoduchšie schémy usudzovania, ktoré pomocou konjunkcie, disjunkcie a implikácie vytvárajú z dvoch aktuálnych podformúl φ a ψ dôkazu novú formulu $\varphi \clubsuit \psi$. Ako ilustračný príklad uvažujme pravidlo z tab. 4.3 pre prirodzenú dedukciu a implikáciu, predpoklady sú φ a $\neg\psi$, dôsledok je $\neg(\varphi \Rightarrow \psi)$, čo môžeme podľa (4.1) vyjadriť takto

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \neg\psi \\ \hline \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \end{array}$$

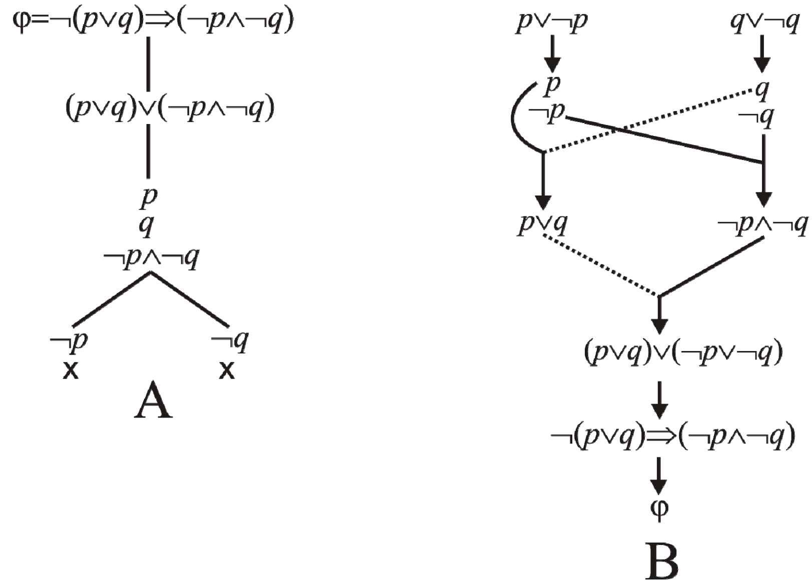
Ľahko sa presvedčime, že formula $\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ je tautológia, čiže schéma usudzovania je korektná. Takýmto jednoduchým spôsobom môžeme preveriť všetky pravidla z tab. 4.3. pre prirodzenú dedukciu.

Tabuľka 4.3. Elementárne schémy usudzovanie pre duálné sémantické tablá a dôkazu pomocou prirodzenej dedukcie založenej na sémantickom table

logická spojka	sémantické tablá	prirodzená dedukcia
negácia		
implikácia		
disjunkcia		
konjunkcia		

Príklad 4.5. Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = \neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ pomocou duálného sémantického tabla a potom vykonajte dôkaz tejto formuly pomocou prirodzenej

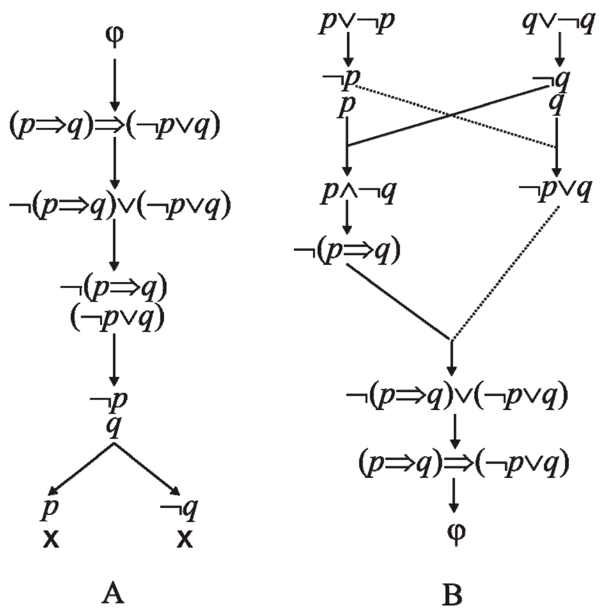
dedukcie založenej na duálnom table. Sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je znázornené na obr. 4.5. Pretože tablo je uzavreté, formula φ je tautológia. Inverziou (čítaním zdola nahor) môžeme zostrojiť dôkaz formuly φ len pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 4.3 (pozri obr. 4.6).



Obrázok 4.5. (A) Sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ pre formulu $\varphi = \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ má všetky vetvy uzavreté, t. j. formula φ je tautológia. (B) Prirodzená dedukcia pre danú formulu na základe duálneho sémantického tabla pre dôkaz, že daná formula je tautológia (pozri diagram A). Prirodzená dedukcia je zahájená tvorbou literálov z elementárnych tautológií $p \vee \neg p$ a $q \vee \neg q$. Prirodzená dedukcia je založená na inverzonom postupe tvorby sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$, pomocou elementárnych schém uvedených v tab. 4.3.

Príklad 4.6. Podobne ako v predchádzajúcom príklade, zostrojte pomocou prirodzenej dedukcie založenej na duálnom sémantickom table tautológiu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$. Duálne sémantické tablo je znázornené na obr. 4.6, diagram A. Pomocou tohto sémantického tabla zostrojíme dôkaz formuly metódou prirodzenej dedukcie, pričom jej jednotlivé elementárne kroky sú určené pomocou sémantického tabla (pozri obr. 4.6, diagram B).

Na základe týchto dvoch ilustračných príkladov môžeme konštatovať, že metóda duálnych sémantických tabiel je silne previazaná s prirodzenou dedukciou. Obrazne môžeme povedať, že tieto dve metódy sú navzájom v „inverznom“ vzťahu. V prvom kroku pre formulu φ pomocou duálneho sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ zistíme, či táto formula je tautológia. Ako áno (sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté), potom inverzným „čítaním“ tabla zdola nahor môžeme postupne zostrojiť graf prirodzenej dedukcie pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 4.3, ktorého výsledkom je formula φ. Skutočnosť, že na základe sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ sme schopný zostrojiť dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá je založená len na použití elementárnych vytvárajúcich módoch, patrí medzi hlavné výsledky metódy sémantických tabiel, kde zdanlivo dve diametrálne odlišné prístupy (sémantické tablá a prirodzená dedukciu) sú prepojené do jedeného univerzálneho postupu schopného verifikovať tautologičnosť formúl a taktiež aj ich konštrukciu pomocou prirodzenej dedukcie. Tento prístup k prirodzenej dedukcii môžeme taktiež chápať ako konštruktívny dôkaz úplnosti, t. j. ak formula φ je tautológia, potom aj logicky vyplýva (existuje jej dôkaz) z daného systému axióm výrokovej logiky.



Obrázok 4.6. (A) Duálné sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ pre formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$, tablo je uzavreté, preto formula je tautológia. (B) Dôkaz formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá bola navrhnutá pomocou sémantického tabla z diagramu A.

Veta 4.1.
Ak formula φ má uzavreté duálne vsémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$, t. j. je tautológia, potom „inverziou“ tohto tabla zostrojíme dôkaz formuly $\vdash \varphi$ pomocou prirodzenej dedukcie.

Cvičenia

Cvičenie 4.1. Pomocou metódy duálnych sémantických tabiel zistite, či formula je tautológia, splniteľná alebo kontradikcia, ak je tautológia vykonajte inverziou tabla dôkaz pomocou prirodzenej dedukcie.

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(b) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

(e) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

(f) $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q)$

(g) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

(h) $\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

(i) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$

(j) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \vee q))$

(k) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$

Cvičenie 4.2. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, či platia relácie logického vyplývania

(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$

(b) $\{\neg p \vee \neg q\} \vdash \neg(p \wedge r)$

(c) $\{p \Rightarrow \neg q, p \wedge \neg q, p \Rightarrow p \vee q\} \vdash p$

Cvičenie 4.3. Pomocou metódy sémantických tabiel riešte reláciu Φ⊨?, kde $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ je množina (teória) formúl výrokovej logiky, cieľom úlohy je určiť takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ.

(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models ?$

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \models ?$

(c) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \models ?$

Literatúra

[1] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[2] Prawitz, D.: *Natural Deduction*. Almquist & Wiksell, Stockholm, 19??.

[3] Szabo, M. E.: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland Publishing, Amsterdam, 1969.

[4] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.

5. kapitola

Predikátová logika I – úvod do predikátovej logiky a sémantické tablá

5.1 Intuitívny prechod od výrokovej logiky k predikátovej logike

Výroková logika nie je schopná postihnúť všetky možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú charakterizované ako „logicky korektné". Táto skutočnosť bude ilustrovaná dvoma príkladmi, pomocou ktorých naznačíme možnosti intuitívneho zovšeobecnenia výrokovej logiky smerom k predikátovej logiky pomocou zavedenia predikátov a kvantifikátorov.

Príklad 5.1. Skúmajme túto schému usudzovania známu zo stredoveku

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sokrates je človek}\\ \text{Každý človek je smrteľný}\end{array}}{\text{Sokrates je smrteľný}} \tag{5.1}$$

kde prvé dve vety sú východiskové predpoklady (premisy) usudzovania a tretia veta je záver usudzovania. Aj keď intuitívne cítime, že tento výrok je logicky korektný, pomocou výrokovej logiky nie sme schopní preveriť jeho správnosť. Prvá a tretia veta má charakter výroku (veta oznamovacia o ktorej sa má zmysel pýtať na jej pravdivosť alebo nepravdivosť). Problém je s druhou vetou, ktorá obsahuje slovo „každý", s ktorým si vo výrokovej logiky nevieme poradiť. Nemôže byť jednoducho ignorované, takto modifikovaná druhá veta má podstatne iný význam ako mala v pôvodnom tvare. Z tohto jednoduchého pozorovania môžeme vyvodiť záver, že výroková logika nepokrýva všetky situácie a možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú podstatne bohatšie, ako možnosti výrokovej logiky. Jedna z možností ako prekonať túto ohraničenosť výrokovej logiky je jej zovšeobecnenie na predikátovú logiku, ktorá je schopná postihnúť aj procesy usudzovania podobné vyššie uvedenému príkladu.

Upriamime našu pozornosť na druhú vetu z príkladu (5.1), ktorá obsahuje slovo „každý", pod ktorým rozumieme každú ľudskú bytosť. Táto veta je implikácia, podľa ktorej, ak každé indivíduum je „človek", potom toto indivíduum je „smrteľné". Označme písmenom C vlastnosť – predikát byť človekom a písmenom S vlastnosť – predikát byť smrteľný. Potom (5.1) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sokrates je } C\\ \text{Každý kto je C je } S\end{array}}{\text{Sokrates je } S} \tag{5.2}$$

Vidíme, že aj táto čiastočná formalizácia usudzovania (5.1) ešte nie je moc nápomocná k riešeniu problému jej korektnosti. Zásadný prepis (5.1) spočíva v tom, že zavedieme konštanty vyskytujúce sa v predikátoch, t.j. označenie $C(s)$ pre prvú vetu „Sokrates je človek" a označenie $S(s)$ pre „Sokrates je smrteľný", kde symbol s je konštantou daného predikátu, ktorá označuje indivíduum Sokrates. Potom pomocou tohto nového označenia už môžeme prepísať druhú vetu „Každý kto je človek je smrteľný“ z (5.1) do tvaru, ktorý už naznačuje určité súvislosti medzi prvou a treťou vetou. Výraz „každý“ z druhej vety nahradíme symbolom reprezentujúcim „každý objekt“, budeme ho označovať $\forall$ a nazývať *univerzálny kvantifikátor*. Každý kvantifikátor musí byť doprevádzaný nejakým argumentom (premennou) x, symbol $\forall x$ čítame ako „pre každé x“ . Pomocou tohto formalizmu druhá veta z (5.1) je prepísaná do tvaru: $(\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big)$, potom schéma (5.1) má tento tvar

$$\begin{array}{l} C(s) \\ \underline{(\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big)} \\ S(s) \end{array} \tag{5.3}$$

Zopakujeme si použitú terminológiu: vlastnosti alebo relácie medzi objektmi sa nazývajú *predikáty*, objekty, ktoré sú jednoznačne určené (napr. osoba Milan) sa nazývajú *konštanty*, objekty, ktoré majú všeobecný charakter sa nazývajú argumenty.

Výraz $\forall x\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať ako konjunkciu implikácií pre rôzne osoby (konštanty), napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned} (\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big) &\equiv \big(C(m)\Rightarrow S(m)\big)\wedge\big(C(j)\Rightarrow S(j)\big)\wedge\big(C(r)\Rightarrow S(r)\big)\wedge\ldots \\ &\equiv \bigwedge_{x\in U}\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big) \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde U je množina objektov – osôb. Ak akceptujeme interpretáciu (5.4) nového symbolu $\forall x$, potom už môžeme pokladať za tautológiu nasledujúcu implikáciu (ako jednoduchý dôsledok zákona výrokovej logiky $p\wedge q\wedge r\wedge\ldots\Rightarrow p$)

$$(\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big)\Rightarrow\big(C(m)\Rightarrow S(m)\big) \tag{5.5}$$

To znamená, že zo všeobecného výroku $(\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big)$ vyplýva aj jeho *konkretizácia* pre konštantu m (pre Milana). Pomocou tohto vzťahu môžeme upraviť schému usudzovania (5.3) takto

$$\begin{array}{l} \underline{C(m)\qquad\qquad} \\ (\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big) \\ \underline{(\forall x)\big(C(x)\Rightarrow S(x)\big)\Rightarrow\big(C(m)\Rightarrow S(m)\big)} \\ S(m) \end{array} \tag{5.6}$$

Túto rozšírenú schému usudzovania môžeme upraviť pomocou pravidla modus ponens (2.1), ktorá je integrálnou súčasťou systému odvodzovania vo výrokovej logike. Aplikovaním (2.1) na druhý a tretí riadok (5.6) dostaneme platnosť implikácie $C(m)\Rightarrow S(m)$, potom (5.6) má túto zjednodušenú podobu

$$\begin{array}{l} C(m) \\ \underline{C(m)\Rightarrow S(m)} \\ S(m) \end{array} \tag{5.7}$$

tvaru klasického modus ponens pravidla (2.1) a z ktorého vyplýva platnosť $S(m)$. Týmto sme vlastne dokázali korektnosť usudzovania pôvodnej verbálne formulovanej schémy usudzovania (5.1). Musíme však zdôrazniť, že k tomu, aby sme dokázali korektnosť tejto schémy používajúcej väzbu „každý“ museli sme opustiť rámec výrokovej logiky a zaviesť predikáty a symbol $\forall x$, čím sme sa dostali z domény výrokovej logiky do domény tzv. predikátovej logiky.

Príklad 5.2. Budeme pokračovať v našom intuitívnom zovšeobecňovaní výrokovej logiky. Študujme ďalšiu schému usudzovania s novým slovom „niektorý“

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Fido je študent}\\ \text{Fido má index}\end{array}}{\text{Niektorý objekt je študent a má index}} \tag{5.8}$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, v rámci výrokovej logiky táto intuitívne korektná schéma usudzovania nemôže byť študovaná. Budeme formalizovať túto schému podobným spôsobom, ako v predchádzajúcom ilustratívnom príklade. Zavedieme nový symbol nazývaný *existenčný kvantifikátor* $\exists x$, ktorý čítame ako „existuje také x“. Potom schéma (5.8) má tvar

$$\frac{\begin{array}{l}S(f)\\ I(f)\end{array}}{(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)} \tag{5.9}$$

Výraz $(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať (podobne ako v (5.4)) ako disjunkciu konjunktívnych výrokov pre rôzne osoby, napr. Fido, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned}(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)&\equiv\big(S(f)\wedge I(f)\big)\vee\big(S(j)\wedge I(j)\big)\vee\big(S(r)\wedge I(r)\big)\vee\ldots\\ &\equiv\bigvee_{x\in U}\big(S(x)\wedge I(x)\big)\end{aligned} \tag{5.10}$$

Z tejto interpretácie existenčného kvantifikátora a zo zákona výrokovej logiky $p\Rightarrow p\vee q\vee r\vee\ldots$ vyplýva implikácia

$$\big(S(m)\wedge I(m)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big) \tag{5.11}$$

Prvé dva riadky (5.9) sú v rámci výrokovej logiky interpretované ako ich spoločná konjunkcia

$$\frac{\begin{array}{l}S(m)\\ I(m)\end{array}}{S(m)\wedge I(m)} \tag{5.12}$$

Spojením (5.11) a (5.12) dostaneme

$$\frac{\begin{array}{l}S(f)\\ I(f)\\ S(f)\wedge I(f)\\ \big(S(f)\wedge I(f)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)\end{array}}{?} \tag{5.13}$$

Aplikovaním štandardného modus ponens na tretí a štvrtý riadok dospejeme k dôležitému medzivýsledku pre verikáciu (5.9)

$$\frac{\begin{array}{l} S(f)\wedge I(f) \\ \big(S(f)\wedge I(f)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big) \end{array}}{(\exists x)\big(S(x)\wedge I(x)\big)} \qquad (5.14)$$

Ak tento výsledok dosadíme do (5.13) dostaneme (5.9), čo bolo našim cieľom verifikovať.

5.2 Formálne základy predikátovej logiky

Výrazové prostriedky klasickej výrokovej logiky sú veľmi obmedzené a nie sú schopné postihnúť všetky možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú charakterizované ako „logicky korektné". Jeden zo spôsobov ako zovšeobecniť výrokovú logiku je rozšírenie výrokovej logiky na predikátovú logiku pomocou je zavedenie dvoch kvantifikátorov (univerzálneho a existenčného). ***Univerzálny kvantifikátor*** je definovaný takto

$$(\forall x)P(x) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{x\in U} P(x) \equiv P(a)\wedge P(b)\wedge\ldots\wedge P(u) & (pre\, U\neq\emptyset) \\ 1 & (pre\, U=\emptyset) \end{cases} \qquad (5.15)$$

kde x je indivíduová premenná z univerza $U=\{a,b,...,u\}$. Formula $(\forall x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý pre každé indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „pre každý objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P". Ilustračný príklad univerzálneho kvantifikátora nech je výrok „každý študent má index", ktorý môžeme vyjadriť takto

$$(\forall x)Mat'\_index(x) =_{def} \bigwedge_{x\in U} Mat'\_index(x)$$
$$\equiv Mat'\_index(Fero)\wedge Mat'\_index(Jano)\wedge\ldots\wedge Mat'\_index(Jana)$$

Množina – univerzum U vztiahnutá k tomuto kvantifikátoru má tvar

$$U=\{Fero,Jano,...,Jana\}$$

obsahuje všetkých študentov. Podobným spôsobom môžeme zaviesť aj ***existenčný kvantifikátor***[6]

$$(\exists x)P(x) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{x\in U} P(x) \equiv P(a)\vee P(b)\vee\ldots\vee P(u) & (U\neq\emptyset) \\ 0 & (U=\emptyset) \end{cases} \qquad (5.16)$$

Formula $(\exists x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý aspoň pre jedno indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „aspoň pre jeden objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P". Jednoduchý ilustračný príklad existenčného kvantifikátora je výrok „niektorí študenti vedia po anglický"

---

[6] Táto definícia univerzálneho a existenčného kvantifikátora je formálne korektná len pre konečné alebo spočítateľné univerzá. Avšak, pre nespočítateľné univerzá (napr. úsečku <0,1>), táto definícia kvantifikátorov je nekorektná. Autor sa domnieva, že výhodnosť týchto dvoch „nekorektných" definícií kvantifikátorov je tak veľká, že ospravedlňuje aj tento „teoretický lapsus".

$$(\exists x)Vedieť\_anglicky(x) =_{def} \bigvee_{x\in U} Vedieť\_anglicky(x)$$
$$\equiv Vedieť\_anglicky(Fero) \vee ... \vee Vedieť\_anglicky(Jana)$$

Medzi univerzálnym a existenčným kvantifikátorom existuje vzťah, ktorý sa dá jednoducho odvodiť z (5.17) alebo (5.18) použitím De Morganových vzťahov

$$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x) \quad (5.17a)$$

$$\neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x) \quad (5.17b)$$

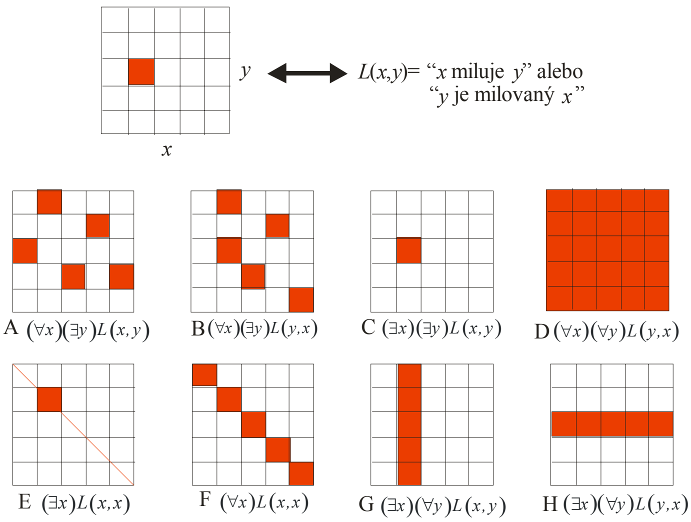
Pomocou týchto dvoch formúl ľahko sa dokáže vlastnosť, že vybraný kvantifikátor sa môže vyjadriť pomocou druhého kvantifikátora

$$(\forall x)P(x) \equiv_{def} \neg(\exists x)\neg P(x) \quad (5.17c)$$

alebo

$$(\exists x)P(x) \equiv_{def} \neg(\forall x)\neg P(x) \quad (5.17d)$$

To znamená, že je postačujúce definovať len jeden kvantifikátor, potom druhý je určený buď (5.17c) alebo (5.17d). Význam kvantifikátorov ∀ a ∃ je znázornený na obr. 5.1.



Obrázok 5.1. Ilustratívne znázornenie významu binárneho predikátu $L(x,y)$, ktorý sa interpretuje ako "*x* miluje *y*" alebo "*y* je milovaný *x*", kde *x* a *y* sú osoby z množiny *U* obsahujúcej päť elementov. Význam jednotlivých diagramov je tento: (A) "*Každý je niekým milovaný*", $(\forall x)(\exists y)L(x,y)$, žiadny stĺpec nie je prázdny; (B) "*každý je niekým milovaný*", $(\forall x)(\exists y)L(y,x)$, žiadny riadok nie je prázdny; (C) "*niekto je niekým milovaný*", $(\exists x)(\exists y)L(y,x)$, $(\exists x)(\exists y)L(x,y)$, jedno políčko je obsadené; (D) "*každý miluje každého*", $(\forall x)(\forall y)L(y,x)$ alebo $(\forall x)(\forall y)L(x,y)$, každý riadok a stĺpec sú plne obsadené; (E) "*niekto je milovaný sebou samým*", $(\exists x)L(x,x)$, aspoň jedno políčko na hlavnej diagonále je obsadené; (F) "*každý miluje sám seba samého*", $(\forall x)L(x,x)$, všetky políčka na diagonále sú obsadené; (G) "*niekto miluje každého*", $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$, existuje úplne zaplnený stĺpec; (H) "*každý miluje niekoho*", $(\exists x)(\forall y)L(y,x)$, existuje úplne zaplnený riadok.

5.2.3 Jazyk predikátovej logiky (syntax)

Ako už bolo naznačené v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, jazyk predikátovej logiky bude bohatší ako jazyk výrokovej logiky, bude obsahovať vyjadrovacie prostriedky, pomocou ktorých sme schopní rozlišovať jednotlivé objekty (indivídua), ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Konštrukcia formúl výrokovej logiky na základe definícií 1.2 a 1.3 bude rozšírená o predikáty a kvantifikátory.

Definícia 5.1. Symboly jazyka predikátovej logiky sú

(1) množina indivíduových premenných $\mathcal{U} = \{x, y, ..., x_1, x_2, ...\}$;

(2) množina indivíduových konštánt $\mathcal{C} = \{a, b, ..., a_1, b_2, ...\}$;

(3) množina predikátových symbolov (predikátov) $\mathcal{P} = \{P, Q, ..., P_1, P_2, ...\}$;

(4) množina logických symbolov $\mathcal{L} = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \forall, \exists\}$;

(5) množina pomocných symbolov $\mathcal{B} = \{(,)\}$.

V predikátovej logike premenné reprezentujú objekty z univerza U – ktoré obsahuje indivíduá. Preto predikátovák logika musí obsahovať formálne prostriedky k špecifikácii týchto vlastností – relácie – predikáty. Syntax formúl predikátovej logiky je určený touto definíciou:

Definícia 5.2. Jazyk predikátovej logiky je definovaný nad množinami z definície 5.1 takto:

Termy:

(1) Indivíduové premenné a indivíduové konštanty sú termy;

(2) žiadne iné symboly nie sú termy.

Atomické formuly:

(1) Ak P je n-miestny predikátový symbol, t_1, t_2, ..., t_n sú termy, potom výraz $P(t_1,t_2, ...,t_n)$ je atomická formula;

(2) žiadne iné symboly nie sú atomické formuly.

Formuly:

(1) Každá atomická formula je formula;

(2) ak φ a ψ sú formule, x je premenná, potom výrazy $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ sú formuly.

(3) Žiadne iné symboly nie sú formuly.

Základnou entitou jazyka predikátovej logiky je *formula* (označovaná malými gréckymi písmenami), ktorej spôsob konštrukcie je určený definíciou 5.2 rekurentného charakteru.

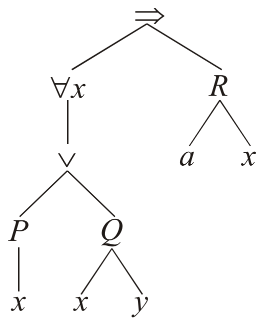
Príklad 5.3. Študujme tieto dva reťazce symbolov

$$\alpha = \Big((\forall)\big(P(x) \vee Q(x,b)\big)\Big) \Rightarrow R(a,b)$$

$$\beta = \Big((\forall x)\big(P(x) \vee Q(x,y)\big)\Big) \Rightarrow R(a,x)$$

kde P je unárny predikát, Q a R sú binárne predikáty, a a b sú konštanty, x a y sú premenné. Reťazec α nie je formula, pretože symbol $\forall$ nie je nasledovaný symbolom premennej.

Reťazec β je korektná formula. Táto skutočnosť môže byť verifikovaná pomocou konštrukcie syntaktického stromu tejto formule, ktorý je znázornený na obr. 5.2.



Obrázok 5.2. Syntaktický strom formuly $((\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))) \Rightarrow R(a,x)$. Ku každému podstromu sú priradené podformuly, čo sú také časti danej formuly, ktoré sú taktiež syntakticky korektné formuly. Tak napríklad, pre túto formulu množina podformúl obsahuje tieto formuly: {x, y, a, $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(a,x)$, $P(x) \vee Q(x,y)$, $(\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))$, $((\forall x)(P(x) \vee Q(x,y))) \Rightarrow R(a,x)$ }.

Príklad 5.4. Zapíšte pomocou jazyka predikátovej logiky tieto výroky prirodzeného jazyka:

(1) Každý riaditeľ má aspoň jedného podriadeného zamestnanca.
Riešenie: $(\forall x)\ (R(x) \Rightarrow (\exists y) P(x,y))$, kde $R(x)$ znamená, že indivíduum x je riaditeľ, $P(x,y)$ znamená, že indivíduum y je podriadením indivídua x.

(2) Neexistuje taký človek, ktorý by sa každému páčil.
Riešenie: $\neg(\exists x)(\forall y)\ P(x,y)$, kde $P(x,y)$ znamená, že indivíduum x sa páči indivíduu y.

(3) Nie je pravda, že každý člen vedenia podniku je aj majiteľom podnikových akcií.
Riešenie: $\neg(\forall x)(V(x) \Rightarrow A(x))$, kde $V(x)$ znamená, že indivíduum x je člen vedenia podniku a $A(x)$ znamená, že indivíduum x je majiteľom podnikových akcií.

(4) Postupnosť $\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ má limitu a: Pre každé $\varepsilon>0$ existuje také n_0, že pre každé $n>n_0$ platí $|a-a_n|<\varepsilon$.
Riešenie: $\forall(\varepsilon>0)\,\exists(n_0)\,\forall(n>n_0)(|a-a_n|<\varepsilon)$.

(5) Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 minimum: existuje také $\varepsilon>0$, že pre každé $x \in U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\}$ platí $f(x) \geq f(x_0)$. (Množina $U_\varepsilon(x_0)$ je ε-okolie bodu x_0).
Riešenie: $\exists(\varepsilon>0)\,\forall(x \in U_\varepsilon(x_0))(f(x) \geq f(x_0))$.

(6) V každom meste je radnica , v niektorých mestách radnica nie je.

Riešenie: $\left(\left(\forall x\right)\left(M\left(x\right)\Rightarrow R\left(x\right)\right)\right)\vee\left(\left(\exists x\right)\left(M\left(x\right)\wedge\neg R\left(x\right)\right)\right)$, kde $M(x)$ znamená, že indivíduum x je mesto, symbol $R(x)$ znamená, že indivíduum x má radnicu.

5.2.4 Pravdivostné hodnotenie formúl predikátovej logiky (sémantika)

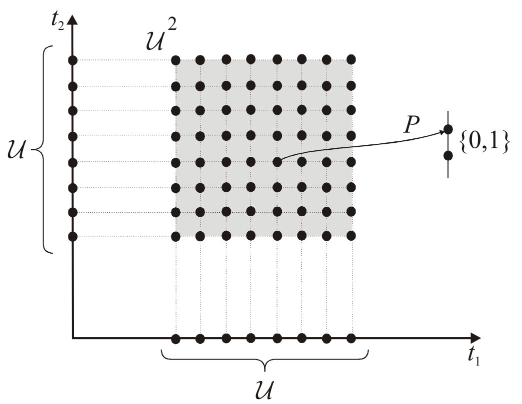
Problém pravdivostného hodnotenia formúl predikátovej modálnej logiky je podstatne zložitejší proces ako vo výrokovej logike. K tomu, aby sme toto hodnotenie korektne realizovali, musíme poznať tzv. interpretáciu konštánt a predikátových symbolov. Pre lepšie pochopenie tohto nového problému budeme študovať ilustračný príklad.

Príklad 5.5. Majme formulu $\left(\forall x\right)\left(P\left(x\right)\Rightarrow\left(\exists y\right)Q\left(x,y\right)\right)$, kde P je unárny predikát a Q je binárny predikát. Uvažujme tieto dve rôzne interpretácie:

(1) Interpretácia $\mathcal{I}_1$. Indivíduá sú ľudia. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je učiteľ“ a predikát $Q(x,y)$ reprezentuje vlastnosť objekt y je žiakom objektu x. Potom študovaná formula má význam „každý učiteľ má aspoň jedného žiaka, pravdivostná hodnota tejto formuly je pravda.

(2) Interpretácia $\mathcal{I}_2$. Indivíduá sú prirodzené čísla. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je prvočíslo“, predikát Q(x,y) reprezentuje vlastnosť „objekt x je deliteľný objektom y, pričom $y \neq x$. Pre každé x pre ktoré platí predikát $P(x)$ neexistuje také iné prvočíslo y, ktoré by bolo deliteľom čísla x. Pri tejto voľbe objektov a predikátov, význam formule je „pre každé prvočíslo x existuje také iné prvočíslo y, ktoré je deliteľom x“, čo je evidentne nepravdivý výraz.

Z toho jednoduchého príkladu vyplýva, že pravdivostná hodnota predikátovej formuly je určená interpretáciou $\mathcal{I}$ premenných, konštánt a predikátov. Na rozdiel od výrokovej logiky, kde je postačujúce špecifikovať len pravdivostné hodnoty výrokových premenných a nemusíme špecifikovať ich význam, v predikátovej logike pri určovaní pravdivostnej hodnoty musíme v rámci danej interpretácie $\mathcal{I}$ špecifikovať význam tak premenných a konštánt, ako aj predikátov.



Obrázok 5.3. Znázornenie interpretácie $\mathcal{I}$, kde predikát P je definovaný nad karteziánskym súčinom $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$. Predikát P priradí dvojici indivíduí $\left(t_1,t_2\right)\in\mathcal{U}^2$ binárne číslo $P\left(t_1,t_2\right)\in\{0,1\}$.

V rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ predikát P chápeme ako zobrazenie, ktoré je definované nad karteziánskymi produktmi množiny indivíduí (univerzom) $\mathcal{U}$. Potom pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ n-miestny predikát P je interpretovaný ako zobrazenie (pozri obr. 5.3)

$$P:\mathcal{U}^n \to \{0,1\} \tag{5.18}$$

ktoré usporiadanej n-tici indivíduí $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathcal{U}^n$ priradí binárnu pravdivostnú hodnotu 0/1. To znamená, že predikát môžeme chápať ako špeciálny typ výroku, ktorý je definovaný nad kartézianským produktom univerza $\mathcal{U}^n$ a ktorý má pravdivostnú hodnotuy 0/1. V prípade, že $n = 0$, potom bezargumentový predikát P interpretujeme ako jednoduchú výrokovú premennú.

Príklad 5.6. Uvažujme univerzum $\mathcal{U}=\{Ján, Jozef, Viera, Eva, Maja\}$, pričom rodičia *Ján* a *Viera* majú deti *Jozefa* a *Evu*, *Maja* je ich známa, nie je v príbuzenskom vzťahu s ostatnými objektmi. Ternárny (n=3) predikát $P(x,y,z)$ je pravdivý, ak indivíduum x má otca y a matku z). V našom prípade, potom pre predikát P platia tieto ilustračné príklady: $P(Jozef, Ján, Viera)=1$, $P(Ján, Jozef, Viera)=0$, $P(Eva, Ján, Viera)=1$, $P(Eva, Eva, Maja)=0$.

Pravdivostná hodnota formuly s univerzálnym kvantifikátorom $(\forall x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ vždy pravdivý. Podobne, formula s existenčným kvantifikátorom $(\exists x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ pravdivý aspoň pre jeden objekt. Potom formula $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y))$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát – podformula $P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y)$ je vždy pravdivá. Táto podmienka je splnená podľa príkladu 5.6 napríklad vtedy, ak jednotlivé výrazy z formule interpretujeme pomocou $\mathcal{I}_1$ (kde univerzum je množina ľudí), predikát $P(x)$ je pravdivý, ak x je učiteľ a predikát $Q(x,y)$ pravdivý vtedy, ak y je žiakom x. Pre alternatívnu interpretáciu $\mathcal{I}_2$ (kde univerzum je množina prvočísel) formula $(\forall x)(P(x)\Rightarrow(\exists y)Q(x,y))$ je nepravdivá.

Ako budeme počítať pravdivostnú hodnotu formule pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$? V predchádzajúcom texte už tento proces ohodnotenia formule pravdivostnou hodnotou už bol naznačený pre jednoduchú predikátovú formulu. Vo všeobecnosti, tento proces ohodnotenia pravdivostnou hodnotou obsahuje tieto kroky:

(1) Nech formula φ má tvar $\varphi=P(t_1,t_2,...,t_n)$, kde P je n–miestný predikát s termami t_1, t_2, ..., t_n. Súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je vyhodnotenie tejto formula pravdivostnou hodnotou.

(2) Ak φ a ψ sú formuly, ich pravdivostné vyhodnotené bolo vykonané v predchádzajúcom kroku pre interpretáciu $\mathcal{I}$ (t. j. poznáme $\mathcal{I} \models \varphi$ a $\mathcal{I} \models \psi$), potom nové formuly majú pravdivostné hodnoty určené takto:

- formula $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \models \varphi$ je nepravdivé (t. j. $(\mathcal{I} \not\models \varphi) =_{def} \neg(\mathcal{I} \models \varphi)$ je pravdivé),
- formula $\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \models \varphi$ a $\mathcal{I} \models \psi$,
- formula $\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \models \varphi$ alebo $\mathcal{I} \models \psi$,
- formula $\mathcal{I} \models \varphi \Rightarrow \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \not\models \varphi$ alebo $\mathcal{I} \models \psi$,
- formula $\mathcal{I} \models \varphi \equiv \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak ekvivalencia $(\mathcal{I} \models \varphi) \equiv (\mathcal{I} \models \psi)$ je pravdivá.

(3) Formula $(\forall x)\varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá pre každé $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

(4) Formula $(\exists x)\varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá aspoň pre jedno $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

Ak na základe predchádzajúcich krokov 1-4 formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je pravdivá, potom to zapíšeme takto $\mathcal{I} \models \varphi$, v opačnom prípade, ak je formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je nepravdivá, potom $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

Definícia 5.3.
(1) Formula φ sa nazýva ***splniteľná*** v interpretácii $\mathcal{I}$ vtedy a len vtedy, ak je v tejto interpretácii pravdivá, $\mathcal{I} \models \varphi$.
(2) Formula φ sa nazýva ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak je splniteľná pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \varphi$, čo zapisujeme $\models \varphi$, alebo $(\models \varphi) =_{def} (\forall \mathcal{I})(\mathcal{I} \models \varphi)$.

Príklad 5.7. Verifikujete, či formula (sentencia) $\alpha = ((\forall x)P(x)) \vee (\neg(\forall x)P(x))$ je tautológia. Musíme ukázať, že táto formula je pravdivá pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$. Pre zvolenú interpretáciu $\mathcal{I}$ je formula $\beta = (\forall x)P(x)$ buď pravdivá alebo nepravdivá, potom však disjunkcia $\beta \vee \neg\beta$ je pravdivá. Dokazovaná formula je vlastne verziou známej tautológie výrokovej logiky $p \vee \neg p$, substitúciou $p/(\forall x)P(x)$ dostaneme verifikovanú sentenciu predikátovej logiky. Týmto jednoduchým spôsobom môžeme zostrojiť mnoho tautológii predikátovej logiky, že do známych tautológií výrokovej logiky zavedieme vhodnú substitúciu sentencie. Tak napríklad použitím tautológie $p \Rightarrow p$ dostaneme napr. túto tautológiu predikátovej logiky $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$.

Základné tautológie predikátovej logiky sú tieto:
1. Eliminácia univerzálenho kvantifikátora (konkretizácia)

$$((\forall x)P(x)) \Rightarrow P(t) \tag{5.19a}$$

kde $t \in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza U.
2. Eliminácia existenčného kvantifikátora (konkretizácia)

$$((\exists x)P(x)) \Rightarrow P(a) \tag{5.19b}$$

kde $a \in U$ je dané konštantné indivíduum z univerza U.
3. Zavedenie existenčného kvantifikátora (generalizácia)

$$P(a) \Rightarrow ((\exists x)P(x)) \tag{5.19c}$$

kde $a \in U$ je dané konštantné indivíduum z univerza U.
4. Zavedenie univerzálneho kvantifikátora (generalizácia)

$$P(t) \Rightarrow ((\forall x)P(x)) \tag{5.19d}$$

kde $t \in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza U.
5. Zmena univerzálneho kvantifikátora na existenčný kvantifikátor

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x) \tag{5.19e}$$

Dôkazy týchto tautológií sú pomerne jednoduché, ktoré sú vždy založené na vhodnej formule výrokovej logiky. Obráťme našu pozornosť na dôkaz formuly (5.19a). Použijeme formulu (5.15) podľa ktorej formula $(\forall x)P(x)$ je konjunkcia predikátov P pre všetky objekty z univerza $\mathcal{U}$

$$(\forall x)P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \equiv \bigwedge_{x \in U} P(x) \tag{5.20}$$

Ak použijeme tautológiu výrokovej logiky $p \wedge q \Rightarrow p$, potom pre pravú stranu (5.20) platí

$$(\forall x)P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \Rightarrow P(t) \tag{5.21}$$

kde $t \in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza U. Ak odstránime prostredný člen v (5.21) dostaneme dokazovanú formulu (5.19a).

Pri dôkazu (5.19b) si musíme uvedomiť , že ak disjunkcia $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_c$ je pravdivá, potom musí existovať aspoň jeden taký pravdivý výrok $a \in \{p_1, p_2, \ldots, p_c\}$, že implikácia $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_c \Rightarrow a$ je pravdivá (nie je tautológia, ale len v danom špeciálnom prípade pravdivá) , t. j. platí

$$\left(\bigvee_{x \in U} p(x) \Rightarrow p(a)\right) = ((\exists x)\, p(x) \Rightarrow p(a)) \tag{5.22}$$

Čo bolo potrebné dokázať.

Pri dôkaze (5.19c) budeme používať tautológiu výrokovej logiky $p \Rightarrow p \vee q$, potom platí

$$P(a) \Rightarrow P(a) \vee P(b) \vee \ldots \equiv (\exists x)P(x) \tag{5.23}$$

čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz (5.19d) je založený na pravdivej formule výrokovej logiky $t \Rightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_c$, kde $t = p_i$, pre i = 1,2,...,c (podobne, ako v dôkaze (5.19b), tato formula nie je tautológia, ale len v danom špeciálnom prípade pravdivá). Potom

$$\left(p(t) \Rightarrow \bigwedge_{x \in U} p(x) \right) = \left(p(t) \Rightarrow (\forall x)\, p(x) \right) \tag{5.24}$$

Čo bolo potrebné dokázať.

Tautológia (5.19e) vyplýva z (5.19a-b) a zákona výrokovej logiky hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

V prvej kapitole bol zavedený pojem duálnej výrokovej formuly $\tilde{\varphi}$ vzhľadom k výrokovej formuly φ, ktorá obsahuje jen logické spojky negácie, konjunkcie a disjunkcie (t. j. logické spojky implikácie boli odstránené ekvivalenciou $(p \Rightarrow q) \equiv_{def} (\neg p \vee q)$). Poznamenjme, že táto duálna formula $\tilde{\varphi}$ bola vytvorená z formuly φ tak, že konjunkcie a disjunkcie boli vzájomne zamenené. Teraz obrátime našu pozornosť na vytvorenie duálnej formuly predikátovej logiky.

Definícia 5.4.
Nech φ je formula predikátovej logiky, ktorá je zostrojená nad množinou logických symbolov $\{\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, 0, 1\}$. Hovoríme, že formula $\tilde{\varphi}$ je ***duálna*** vzhľadom k formule φ práve vtedy, ak vznikla z φ zámenou spojok konjunkcie a disjunkcie, existenčných a univerzálnych kvantifikátorov a a pravdivostných konštánt, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\exists \leftrightarrow \forall$ a $0 \leftrightarrow 1$.

Príklad 5.8. Použitím definície 5.4 zostrojte duálnu formulu k formule predikátovej logiky $\varphi = (\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\exists x)\, p(x) \Rightarrow (\exists x) q(x))$. V prvom kroku odstránime z formuly spojku implikácie, dostaneme $\varphi = \neg(\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)) \vee (\neg(\exists x)\, p(x) \vee (\exists x) q(x))$, potom duálna formula má tvar $\tilde{\varphi} = \neg(\exists x)(\neg p(x) \wedge q(x)) \wedge (\neg(\forall x)\, p(x) \wedge (\forall x) q(x))$, alebo zjednodušovacích úpravách dostaneme konečný tvar duálnej formuly

$$\tilde{\varphi} = (\forall x)(p(x) \vee \neg q(x)) \wedge ((\exists x) \neg p(x) \wedge (\forall x) q(x))$$

Duálne predikátové formuly budú používané v konštrukcii sémantických tabiel v predikátovej logike, ich inverziou zostrojíme diagramy prirodzenej dedukcie.

5.2.3 Vybrané zákony predikátovej logiky

Distributívne zákony kvantifikátorov:

- $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$ (5.25a)
- $(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ (5.25b)
- $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)$ (5.25c)
- $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x)$ (5.25d)

- $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\forall x)\, Q(x)\big)$ (5.25e)
- $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow \big((\exists x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x)\, Q(x)\big)$ (5.25f)

Dôkaz tautologickosti týchto formúl je ponechaná čitateľovi ako cvičenie (pozri príklad 5.9).

5.2.4 *Odvodzovanie formúl predikátovej logiky, logický dôkaz*

Axiomatický systém predikátovej logiky je rozšírením axiomatického systému výrokovej logiky, ktorý bol prezentovaný v kapitole 2.2 a ktorý sa zaoberal odvodzovaním formúl výrokovej logiky.

Pravidlá logického dôkazu (2.1.-3) sú rozšírené o ďalšie štvrté pravidlo:

(4) ***Pravidlo zovšeobecnenia***. Ak je pravdivá formula $\varphi(x)$ pre každé x, pričom táto premenná sa vyskytuje len ako voľná premenná v každej časti celkového dôkazu, potom ju môžeme zovšeobecniť do tvaru s univerzálnym kvantifikátorom

$$\frac{\varphi(t)}{\forall x\, \varphi(x)} \tag{5.26}$$

Axiómy výrokovej logiky (1.7a-j) sú rozšírené o ďalšie, ktoré obsahujú univerzálny kvantifikátor $\forall$:

$$\boldsymbol{Ax_{11}}.\ \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t) \tag{5.27a}$$

$$\boldsymbol{Ax_{12}}.\ \forall x\, \big(\varphi \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow \big(\varphi \Rightarrow \forall x\, \psi(x)\big) \tag{5.27b}$$

Definovaný axiomatický systém predikátovej logiky neobsahuje existenčný kvantifikátor $\exists$. Môže byť dodefinovaný do nášho systému ako „metasymbol“ k označeniu zložených formúl špeciálneho tvaru

$$\exists x\, \varphi(x) =_{def} \neg\forall x \neg\varphi(x) \tag{5.28}$$

Na záver pristúpime k modifikácii definície 2.3, ktorá definuje pojmy dôsledok a dôkaz pre výrokovú logiku.

Definícia 7.3.

(4) *Formula φ je* ***bezprostredným dôsledkom*** *množiny formúl Φ, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formule z Φ.*

(5) *Formula φ je* ***logickým dôsledkom (dokázateľná)*** *množiny formúl Φ (čo označíme $\Phi \vdash \varphi$), ak $\varphi \in \Phi$ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ alebo je bezprostredným dôsledkom Φ rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(6) ***Dôkazom*** *(**logickým**) formuly φ z množiny Φ je každá konečná postupnosť formúl $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, pričom $\varphi = \varphi_n$ a každá formula z tejto postupnosti je buď bezprostredným dôsledkom niektorých formúl z Φ* alebo formúl z $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Veta 7.5 (o dedukcii). *Nech Φ je množina formúl a φ, ψ sú nejaké dve formule, potom $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ platí vtedy a len vtedy (vtt) ak $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$*

$$\left(\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi\right) vtt \left(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi\right) \tag{5.29}$$

Dôkaz tejto vety je úplne analogický dôkazu podobnej vety (2.3) o dedukcii vo výrokovej logike, preto ho už na tomto mieste nebudeme opakovať. Poznamenajme, že veta o dedukcii umožňuje podstatné skrátenie dôkazov formúl predikátovej logiky. Výhodnosť tejto vety spočíva v tom, že ak postupujeme len podľa pravidiel logického dôkazu (2.1-3) a (7.2), musíme striktne dokázať každú formulu postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ v príslušných predchádzajúcich krokoch dôkazu. Ak použijeme vetu 7.5 o dedukcii ako nové pravidlo dôkazu, môžeme použiť ad-hoc dve formuly φ a ψ, ak sa nám ich už podarilo dokázať v predchádzajúcej úvahách.

V kapitole 2.3 bola dokázaná Postova veta (2.5) o úplnosti, ktorá má pre výrokovú logiku fundamentálny význam a hovorí o tom, že dokázateľná formula je tautológia a naopak, čo formálne môžeme zapísať ako $(\models \varphi)\, vtt\, (\vdash \varphi)$. Podobnú vetu pre predikátovú logiku dokázal v r. 1930 Gödel.

Veta 7.6. Pre súbor formúl predikátovej logiky Φ a pre formulu φ platí

$$\left(\Phi \vdash \varphi\right) vtt \left(\Phi \models \varphi\right) \tag{5.30}$$

Dôkaz tejto vety je netriviálny, vyžaduje špeciálne znalosti z univerzálnej algebry a teórie modelov.

Na záver tejto kapitoly môžeme si položiť otázku, či formálny systém predikátovej logiky má podobné vlastnosti ako formálny systém výrokovej logiky, t.j. kladieme si otázku, či je korektný, nerozporný, úplný a rozhodnuteľný. Na základe toho, čo bolo v tejto kapitole prezentované. môžeme uzavrieť, že predikátová logika má podobné vlastnosti ako výroková logika, je

- **korektná**,
- **nerozporná** a
- **úplná**.

Výroková logika bola taktiež charakterizovaná aj štvrtou vlastnosťou, a to, že je rozhodnuteľná. Musíme zdôrazniť, že v predikátovej logike neexistuje všeobecný algoritmus, ktorý by vždy rozhodol s absolútnou istotou, či daná formula predikátovej logiky je tautológia, kontradikcia, alebo len splniteľná. Ako bolo ukázané v podkapitole 5.2.2, proces rozhodnuteľnosti je silne závislý od vhodnej interpretácie $\mathcal{I}$, v rámci ktorej sa vlastne pravdivosť alebo nepravdivosť formuly študuje. Vo všeobecnosti platí, že predikátová logika je nerozhodnuteľná, ak obsahuje aspoň jednu dvojmiestnú reláciu Ako najjednoduchší protipríklad k tomuto tvrdeniu uvedieme predikátovú logiku obsahujúcu len unárne predikáty (t. j. predikáty s jedným argumentum), potom je rozhodnuteľná, napríklad pomocou metódy rezolventy alebo pomocou metódy sémantických tabiel. Preto sa niekedy hovorí, že predikátová logika je **polorozhodnuteľná** (angl. semidecidable). Táto dôležitá vlastnosť predikátovej logiky bola dokázaná americkým logikom A. Churchom v r. 1936, týmto dal definitívnu odpoveď na slávny trinásty Hilbertov problém rozhodnuteľnosti (nem. Entscheidungsproblem) pre predikátovú logiku. Tento Hilbertov problém bol študovaný vo všeobecnej rovine anglickým matematikom a logikom A. Turingom v r. 1931. Dokázal, že neexistuje univerzálny algoritmus, pomocou ktorého by sa dal vyriešiť každý problém rozhodnuteľnosti.

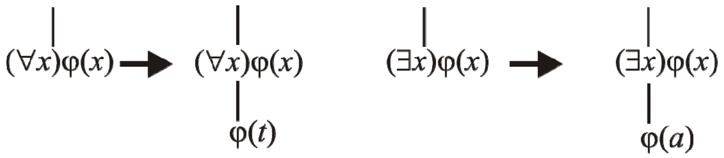
5.3 Sémantické tablá

Technika sémantických tabiel pre predikátovú logiku je jednoduchou modifikáciou sémantických tabiel z výrokovej logiky (pozri kapitolu 3 a obr. 3.1) o rozšírenia, ktoré zahŕňajú univerzálne a existenčné kvantifikátory. Tieto rozšírenia sú založené na nasledujúcich zákonoch predikátovej logiky

$$(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(t) \tag{5.31a}$$

$$(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(a) \tag{5.31b}$$

kde t je ľubovoľný objekt (indivíduum) z univerza U, a je daný konštantný objekt (indivíduum) z univerza U. Upriamime našu pozornosť na formuly (5.31a-h). Prvé dve formuly (5.31a-b) sú priamym dôsledkom zákonov (5.19a-b) (pozri obr. 5.4).



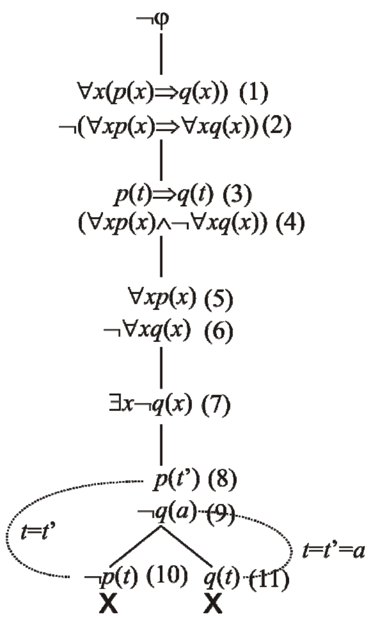
Obrázok 5.4. Doplnenie základných rozšírení metódy sémantického tabla pre výrokovú logiku (pozri obr. 3.1) o rozšírenia obsahujúce kvantifikátory. Premenná t špecifikuje ľubovoľné indivíduum z univerza U, $\forall t \in U$; podobne, konštanta a špecifikuje vybrané indivíduum z univerza U, $\exists a \in U$ (pozri (5.25)).

Príklad 5.9. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = \forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall xp(x) \Rightarrow \forall xq(x)\big)$ je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 5.4.

Jednotlivé formuly sémantickom table obr. 5.4 sú indexované a majú tento význam:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$, pozri obr. 3.1, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Na formulu (1) bola použitá schéma sme predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a všeobecná indivíduová premenná x bola nahradená ľubovoľnou indivíduovov konštantou t, vznikla formula (3).
- Formula (4) vznikla aplikáciou ekvivalencie $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ na formulu (2).
- Formuly (5) a (6) vzikli predĺžením (4) podľa schémy z obr. 3.1, diagram B.
- Formula (7) vznikla z (6) ekvivalentným prepisom $\neg\forall xR(x) \equiv \exists x \neg R(x)$.
- Formula (8) vznikla z (5) použitím predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduovú premennú x sme nahradili ľubovoľnou indivíduovov konštantou t'.

- Formula (9) vznikla z (7) aplikáciou predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduovú premennú x sme nahradili vybranou indivíduovov konštantou a. Podobne, formula (10) vznikla z (8) odstránením univerzálneho kvantifikátora.
- Vzniklé sémantické tablo ma dve vetvy. Ľavá vetva je uzavretá, pretože môžeme vytvoriť kontradikciu tak, že položíme $t = t'$ (poznamenajme, že tieto konštanty sú ľubovolné). Pravá vetva je taktiež uzavretá, kontradikciu vytvoríme tak, že položíme $t = a$. Tieto dve podmienky sú realizovateľnú súčasne, čo môžeme napišať ako $t = t' = a$.



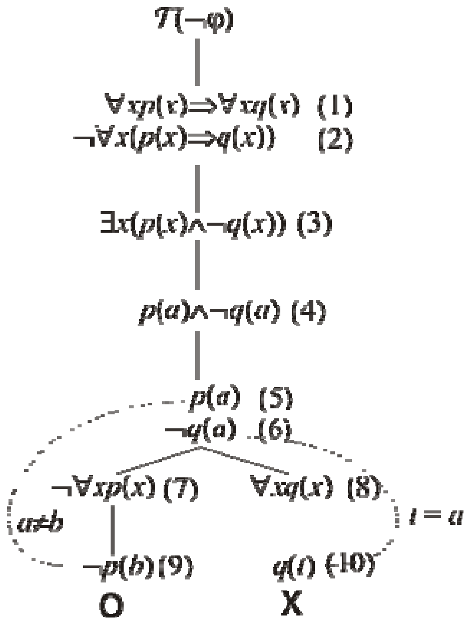
Obrázok 5.4. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\forall x)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)\big)$. Pretože tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, formula φ je tautológia, čo bolo potrebné dokázať.

Príklad 5.10. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi = \big(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)\big) \Rightarrow \forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$ nie je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 5.5.

Podobne, ako v predchádzajúcom príklade, aj teraz prestúpime k podrobnej špecifikácii každého riadku sémantického tabla z obr. 5.5:

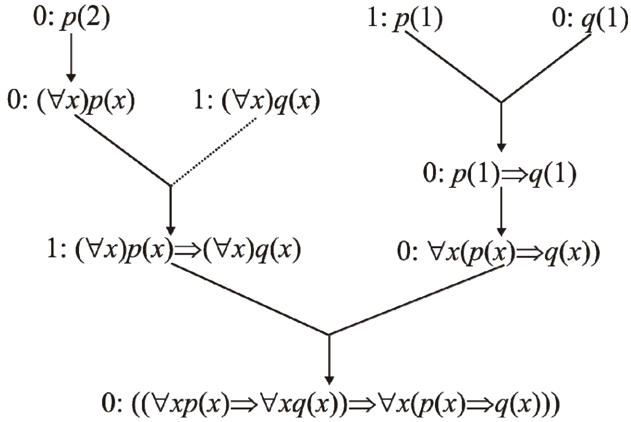
- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$, pozri obr. 3.1, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Formula (3) vznikla z (2) aplikáciou ekvivalencií $\neg(\forall x)R(x) \equiv (\exists x)\neg R(x)$ a $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$.
- Formula (4) vznikla z (3) použitím predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduová premenná x bola nahradená danou indivíduovov konštantov a.
- Formuly (5) a (6) vznikli z (4) použitím predĺženia z obr. 3.1, diagram B.

- Formuly (7) a (8) vznikli z (1) použitím predĺženia z obr. 3.1, diagram C.
- Formula (9) vznikla z (7) použitím predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduová premenná x bola nahradená danou indivíduovov konštantou b.
- Ľavá vetva sémantického tabla neprodukuje vo všeobecnosti kontradikciu (nie je uzavretá), potenciálna možnosť je tvorby pomocou (5) a (9) nemôže existovať, pretože vo všeobecnosti platí $a \neq b$.
- Pravá vetva je uzavretá, v tomto prípade vytvoríme kontradikciu podmienkou $t = a$.
- Sémantické tablo nie je uzavreté, preto formula φ nie je tautológia.



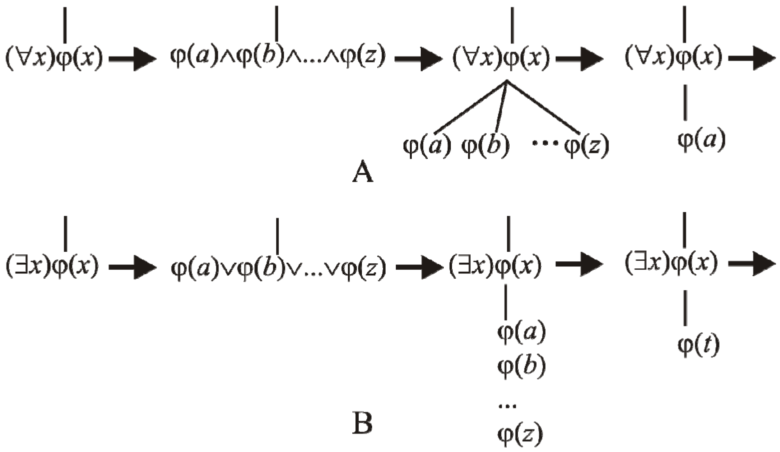
Obrázok 5.5. Sémantuické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ pre formulu $\varphi = (\forall xp(x) \Rightarrow \forall xq(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$. Tablo nie je uzavreté, preto formula φ nie je tautológia, je len splniteľná s interpretáciou zostrojiteľnou pomocou otvorenej vetvy.

Poznamenajme, že otvorená ľavá vetva sémantického tabla môže byť použitá na konštrukciu takej interpretácie, pre ktorú je formula φ je nepravdivá, t. j. požiadavka tautologičnosti formuly φ je falzifikovaná. Z ľavej vetvy pre hodnoty predikátov p a q dostaneme tieto hodnoty: $p(a)=1, \neg q(a)=1, \neg p(b)=1$. Pre jednoduchosť položíme $a = 1$ a $b = 2$, potom $p(1)=1, \neg q(1)=1, \neg p(2)=1$. Z prvých dvoch podmienok odvodíme ich konjunkciu $p(1)\wedge\neg q(1)=1$, čo môžeme zovšeobecniť pomocou existenčného kvantifikátora $\exists x(p(x)\wedge\neg q(x)) = \exists x\neg(p(x)\Rightarrow q(x)) = \neg\forall x(p(x)\Rightarrow q(x)) = 1$, Z tretej podmienky $\neg p(2)=1$ môžeme vyvodiť: $\exists x\neg p(x) = \neg\forall xp(x) = 1$. Tento výsledok môžeme pomocou disjunkcie rozšíriť, $\neg\forall xp(x)\vee\forall xq(x) = \forall xp(x)\Rightarrow\forall xq(x) = 1$. Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu pravdivostnej hodnoty formuly φ, $((\forall x)p(x)\Rightarrow(\forall x)q(x))\Rightarrow(\forall x)(p(x)\Rightarrow q(x)) \equiv (1\Rightarrow 0)\equiv 0$. Tento dôležitý moment využitia sémantického table pre konštrukciu falzifikácie tautologičnosti danej formuly môžeme aj znázornuť diagramatický, pozri obr. 5.6.



Obrázok 5.6. Diagramatická falzifikácie tautologičnosti formuly $((\forall x)p(x)\Rightarrow(\forall x)q(x))\Rightarrow(\forall x)(p(x)\Rightarrow q(x))$ na základe počiatočných predpokladov $p(a)=1, \neg q(a)=1, \neg p(b)=1$, ktoré boli získané z ľavej vetvy sémantického tabla z obr. 5.6. Posledný riadok diagramatickej interpretácie znamená, že pre dané podmienky pravdivostná hodnota formuly je nepravda, t. j. formula nemôže byť tautológiou.

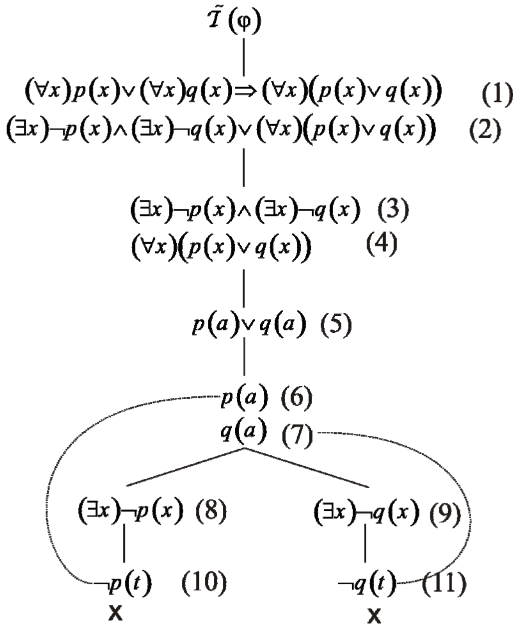
Tieto dva ilustračné príklady ukazujú na potenciálnu vhodnosť sémantických tabiel pre konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl predikátovej logiky, kde majú nezastúpiteľnú úlohu pre konštrukciu pravdivostných hodnôt, pretože v predikátovej logike je tabuľková metóda nepoužiteľná.



Obrázok 5.7. Predlžovanie duálneho sémantického tabla pre formulu, ktorá obsahuje univerzálny kvantifikátor (diagram A, kde a je vybraný konštantný objekt $a\in U$) a existenčný kvantifikátor (diagram B, kde t je ľubovoľný objekt $t\in U$).

V kapitole 3.2.2 boli študované duálne sémantické tablá vo výrokovej logike. Ako bolo ukázané v tejto kapitole, ich hlavná výhoda spočíva v tom, že v prípade, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté, potom formula φ je tautológia a inverziou duálneho tabla zostrojíme dôkaz tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie.

Príklad 5.13. Použitím duálneho sémantického tabla dokážte tautologickosť predikátovej formuly $\varphi = (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \vee q(x))$, pozri obr. 5.7 a 5.8. V prvom kroku odstránime implikáciu, dostaneme $\varphi = (\exists x \neg p(x) \wedge \exists x \neg q(x)) \vee \forall x(p(x) \vee q(x))$. Postupne odstraňujeme kvantifikátory pomocou pravidiel z obr. 5.7, na záver dostaneme že vytvorené duálne sémantické tablo je uzavreté, t. j. formula $\varphi = (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \vee q(x))$ je tautológia.



Obrázok 5.8. Dôkaz pomocou duálneho tabla, že formula $\varphi = (\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \vee q(x))$ je tautológia.

Cvičenie

Cvičenie 5.1. Vety prepíšte pomocou jazyka predikátovej logiky, použite symboly uvedené v úlohách.
(a) Niekto má hudobný sluch (H) a niekto ho nemá.
(b) Niektoré dieťa (D) nemá rádo čokoládu (C)
(c) Nik, kto nezvládol zásady bezpečnosti práce (B), nemôže pracovať v laboratóriu (L).
(d) Nie každý talentovaný maliar (M) vystavuje svoje práce v národnej galérii (G).
(e) Len študenti (S) si môžu kupovať studené večere (V).
(f) Nie každá osoba (O), ktorá absolvovala drahý kurz lietania (K), je dobrý pilot(P).

Cvičenie 5.2. Vety prepíšte pomocou symbolov predikátov a konštánt.

(a) Karol videl Shakespearovu hru Hamlet.
(b) Karol videl nejakú hru od Shakespeara.
(c) Niekto videl Shakespearovu hru Hamlet
(d) Niekto videl hru od Shakespera.
(e) Nie každý videl hru od Shakespera.
(f) *Karol videl nejakú hru.*
(g) Shakespeare nenapísal hru Pygmalion.

Cvičenie 5.3. Pre dané predikátové symboly P**,** Q a konštantné symboly a, b, pričom Q je binárny predikát a P je unárny predikát, rozhodnite, ktoré výrazy sú formuly predikátovej logiky a nakreslite ich syntaktický strom.
(a) $Q(a,b)$.
(b) $\forall x\,(Q(a,b) \Rightarrow P(c))$.
(d) $(\forall x\, P(a) \Rightarrow (\exists y\, Q(b, P(y))))$.
(e) $(P(x) \wedge Q(a,b) \Rightarrow (\exists y\,(P(y) \vee P(c))))$.
(f) $\exists x\,(P(Q(x,y)) \Rightarrow Q(a,b))$.
(g) $\exists x\,(P(x) \Rightarrow (\exists y\, Q(x,y)))$.

Cvičenie 5.4. Napíšte všetky podformuly z cvičenia 5.3.

Cvičenie 5.5. Označte všetky premenné, ktoré sú viazané a všetky premenné, ktoré sú voľné. Ak v danej formule sa vyskytujú také premenné, ktoré sú súčasne viazané a aj voľne, prepíšte formulu do takého tvaru, aby daná premenná buď bola viazaná alebo voľna. Ktoré formule sú otvorené formule a ktoré sú sentencie?
(a) $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$
(b) $Q(f(a,b), y) \Rightarrow (\exists y\, P(s(y)))$.
(c) $Q(a,b) \vee (\forall x\, Q(a,x))$.
(d) $Q(x,y) \vee Q(y,x)$.
(e) $Q(a,b) \wedge (\exists x\, \exists y\, Q(x,y))$.
(f) $(\forall x\, Q(a,x)) \Rightarrow (\forall x\, \exists y\, Q(y,x))$.

Cvičenie 5.6. Napíšte všetky podformule z cvičenia 5.5.

Cvičenie 5.7. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.
(a) Vtáky sa množia vajcami.
(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Študenti nie vždy veľa študujú

(d) Žiadne schody nevedú do neba.
(e) Každá sa pokúša vyštudovať na vysokej škole.
(f) Každé nepárne číslo je prvočíslo.
(g) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(h) Neexistuje dym bez ohňa.

Cvičenie 5.8. Pomocou sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formúl:

(a) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$

(b) $\neg\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\exists x\, \neg\varphi(x)\right)$

(c) $\neg\left(\exists x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \neg\varphi(x)\right)$

Cvičenie 5.9. Pomocou duálnych sémantických tabiel dokážte tautologickosť formúl a potom vykonajte pomocou inverzného table ich odvodenie pomocou prirodzenej dedukcie.

(a) $(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x) \Rightarrow (\forall x)\left(P(x) \vee Q(x)\right)$

(b) $(\exists x)\left(P(x) \wedge Q(x)\right) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x)$

(c) $(\forall x)\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \Rightarrow \left((\exists x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x)\, Q(x)\right)$

Cvičenie 5.10. Dokážte tautologickosť formúl

(a) $(\forall x)\left(P(x) \wedge Q(x)\right) \equiv (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$

(b) $(\exists x)\left(P(x) \vee Q(x)\right) \equiv (\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x)$,

(c) $(\exists x)\left(P(x) \wedge Q(x)\right) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x)$

(d) $(\forall x)\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \Rightarrow \left((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\forall x)\, Q(x)\right)$

Literatúra

[17] D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hahnle, R., Posegga, J. (eds.): *Handbook of Tableau Methods*. Springer, Berlin 1999.

[18] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[19] Kvasnička V., Pospíchal, J.: Technika sémantických tabiel v logike. In *Umelá inteligencia a kognitívna veda*, II. Dieľ. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2010.

[20] Peregrin, J: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[21] Smullyan, R. M.: *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin 1968 (slovenský preklad *Logika prvého rádu*. ALFA, Bratislava, 1979).

[22] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[23] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[24] Zouhar, M.: Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory. Veda, Bratislava, 2008.

6. kapitola

Predikátová logika II – prirodzená dedukcia a sylogizmy

6.1 Metóda prirodzenej dedukcie pre predikátovú logiku

Jednoduché rozšírenie metódy prirodzenej dedukcie pre predikátovú logiku uskutočníme tak, že pôvodná prirodzená dedukcia výrokovej logiky (pozri kapitolu 4) je doplnená o ďalšie 12 introdukčné/eliminačné pravidlá univerzálneho a eliminačného kvantifikátora (a ich súčinov).

(1) *Introdukčné pravidlo pre všeobecný kvantifikátor* (I∀)

$$\begin{array}{|l} \varphi(t) \\ \hline \forall x\, \varphi(x) \end{array} \qquad (6.1a)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\varphi(t)$, ktorá je platná pre ľubovoľné indivíduum t (premenná t je voľna) , potom platí aj jej zovšeobecnenie pomocou všeobecného kvantifikátora, $\forall x\, \varphi(x)$. Toto pravidlo je založené na zákone (5.19d) $P(t) \Rightarrow ((\forall x)\, P(x))$.

(2) *Eliminačné pravidlo pre všeobecný kvantifikátor* (E∀)

$$\begin{array}{|l} \forall x\, \varphi(x) \\ \hline \varphi(t) \end{array} \qquad (6.1b)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\forall x\, \varphi(x)$, potom sme odvodili aj jej konkretizáciu pre ľubovolné indivíduum *t*. Toto pravidlo je založené na zákone predikátovej logiky (5.19a) $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow P(t)$.

(3) *Introdukčné pravidlo pre existenčný kvantifikátor* (I∃)

$$\begin{array}{|l} \varphi(a) \\ \hline \exists x\, \varphi(x) \end{array} \qquad (6.1c)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\varphi(a)$, kde *a* je indivíduová konštanta, potom sme odvodili aj jej formu s existenčným kvantifikátorom, $\exists x\, \varphi(x)$. Pravidlo je založené na zákone predikátovej logiky (5.19c) $P(a) \Rightarrow \exists x\, P(x)$. Poznamenajme, že toto pravidlo je v úzkej súvislosti s pravidlom (8.12) pre introdukciu disjunkcie.

(4) *Eliminačné pravidlo pre existenčný kvantifikátor* (E∃)

$$\begin{array}{|l} \exists x\, \varphi(x) \\ \hline \varphi(a) \end{array} \qquad (6.1d)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\exists x\, \varphi(x)$, potom sme schopný odvodiť aj formulu $\varphi(a)$, kde a je nejaká indivíduová konštanta. Pravidlo je založené na zákone predikátovej logiky (5.19d) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(a)$.

Tabuľka 6.1. Diagramatické pravidlá prirodzenej dedukcie s kvantifikátormi

Spojka	Eliminácia	Introdukcia
$\forall$	$(\forall x)\, p(x) \downarrow p(t)$	$p(t) \downarrow (\forall x)\, p(x)$
$\exists$	$(\exists x)\, p(x) \downarrow p(a)$	$p(a) \downarrow (\exists x)\, p(x)$

Poznámka. V predchádzajúcej kapitole 5.3 v poznamke obsahujúcej formuly (5.37) a (5.38) sme riešili pre sémentické tablá problém eliminácie univerzálneho a existenčného kvantifikátora pre konjunkciu resp. disjunkciu dvoch formúl $p(x)$ a $q(x)$, podobné pravidlá pre prirodzenú dedukciu môžeme formulovať aj pre tieto dva prípady

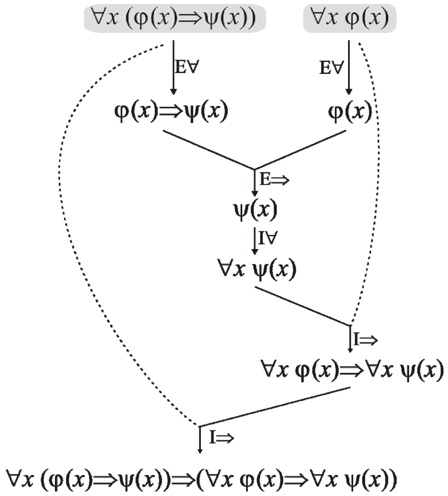
$$\begin{array}{|c} (\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \\ \hline p(t) \wedge q(t') \end{array} \qquad \begin{array}{|c} (\exists x)(p(x) \vee q(x)) \\ \hline p(a) \vee q(a') \end{array}$$

alebo ich inverzného tvaru

$$\begin{array}{|c} p(t) \wedge q(t') \\ \hline (\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{|c} p(a) \vee q(a') \\ \hline (\exists x)(p(x) \vee q(x)) \end{array}$$

Príklad 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte formulu $\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x))$ (pozri obr. 6.2)

1.	$\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$	(pomocný predpoklad)
2.	$\forall x\, \varphi(x)$	(pomocný predpoklad)
3.	$\varphi(t) \Rightarrow \psi(t)$	E$\forall$, 1.
4.	$\varphi(t)$	E$\forall$, 2.
5.	$\psi(t)$	E$\Rightarrow$, 3. a 4.
6.	$\forall x\, \psi(x)$	I$\forall$, 5.
7.	$\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)$	I$\Rightarrow$, 2. a 6, deaktivácia 2.
8.	$\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x))$	I$\Rightarrow$, 1 a 7, deaktivácia 1

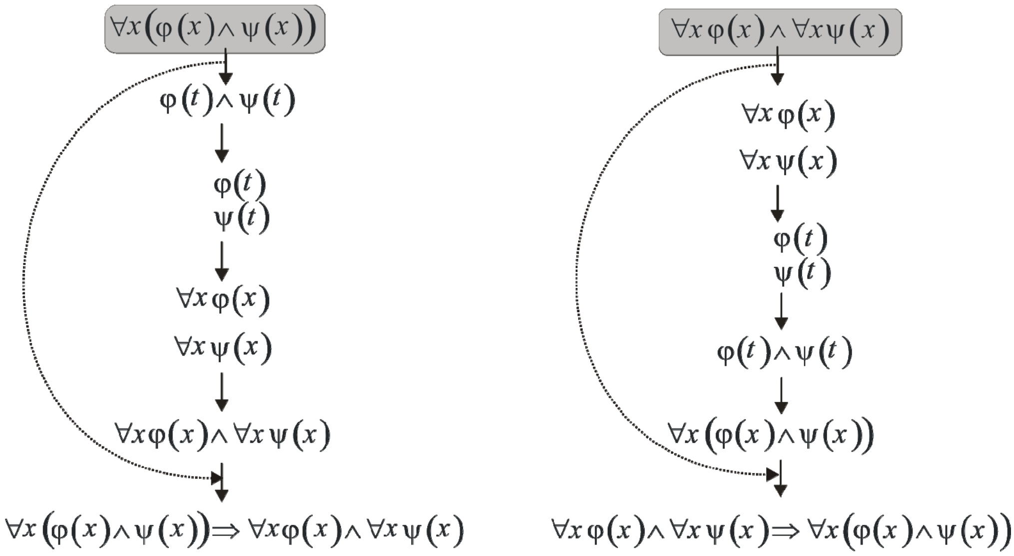


Obrázok 6.1. Diagramatická interpretácia dôkazu formule z príkladu 6.1. Vrchné vyšrafované formule sú pomocné predpoklady odvodenia, prerušované čiary reprezentujú deaktiváciu týchto predpokladov.

Príklad 6.2. Dokážte platnosť formuly $\forall x\big(\varphi(x)\wedge\psi(x)\big)\equiv\big(\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)\big)$ (pozri obr. 6.3).

$\Rightarrow$		
1.	$\forall x\big(\varphi(x)\wedge\psi(x)\big)$	(pomocný predpoklad)
2.	$\varphi(t)\wedge\psi(t)$	(E∀ na 1)
3.	$\varphi(t)$	(E∧ na 2)
4.	$\psi(t)$	(E∧ na 2)
5.	$\forall x\varphi(x)$	(I∀ na 3)
6.	$\forall x\psi(x)$	(I∀ na 4)
7.	$\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$	(I∧ na 5 a 6)
8.	$\forall x\big(\varphi(x)\wedge\psi(x)\big)\Rightarrow\big(\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)\big)$	(deaktivácia 1)

$\Leftarrow$		
1.	$\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$	(pomocný predpoklad)
2.	$\forall x\varphi(x)$	(E∧ na 1)
3.	$\forall x\psi(x)$	(E∧ na 1)
4.	$\varphi(t)$	(E∀ na 2)
5.	$\psi(t)$	(E∀ na 3)
6.	$\varphi(t)\wedge\psi(t)$	(I∧ na 4 a 5)
7.	$\forall x\big(\varphi(x)\wedge\psi(x)\big)$	(I∀ na 6)
8.	$\big(\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)\big)\Rightarrow\forall x\big(\varphi(x)\wedge\psi(x)\big)$	(deaktivácia 1)



Obrázok 6.2. Diagramatická interpretácia dôkazu formule z príkladu 6.2. Vrchné vyšrafované formule sú predpoklady odvodenia, prerušované čiary reprezentujú deaktiváciu pomocných predpokladov.

6.2 Sylogizmy

Sylogizmy boli vytvorené Aristotelom pred viac ako 2300 rokmi a odvtedy sú obvykle uvádzané ako neodmysliteľný základ racionality ľudského uvažovania. Aristoteles taktiež vypracoval kompletnú teóriu dôkazu, ktorá je založená na transformácii platných módov sylogizmov na platný mód prvej figúry (pozri tabuľky nižšie), ktorý pokladá za evidentne platný a pochopiteľný. Aristotelov revolučný intelektuálny počin je v súčasnosti chápaný nielen ako prvý zaznamenaný vznik logiky v histórii ľudskej civilizácie, ale taktiež ako prvý dokumentovaný výskyt premennej, čo sa v histórii vedy pokladá za jeden z najdôležitejších bodov obratu, ktorým sa grécka civilizácia odlíšila napr. od egyptskej civilizácie, ktorá ku pojmu „premennej" nedospela. *Sylogizmy stratili svoje mimoriadne postavenie v logike až koncom 19. storočia, keď bola vytvorená predikátová logika, v rámci ktorej sú zaujímavou no nie veľmi dôležitou aplikáciou*. Musíme však poznamenať, že na filozofických a teologických univerzitných fakultách stále pretrváva v prednáškach logiky mimoriadne postavenie sylogizmov, ako jednej z hlavných súčastí logiky.

Sylogizmus obsahuje dve *premisy* - predpoklady (hlavný a vedľajší), ktoré obsahujú tri *členy* (unárne predikáty) A, B, C, pričom *prostredný člen* B sa vyskytuje v obidvoch premisách. Záver sylogizmu má rovnakú štruktúru ako premisy sylogizmu a obsahuje členy A a C. Rozlišujeme 4 možné figúry sylogizmov (pozri Tab. 6.1) , pričom premisy každej figúry majú štyri rôzne interpretácia v rámci predikátovej logiky (pozri Tab. 6.2)

Tabuľka 6.1. Štyri figúry sylogizmov

Typ premisy	1. figúra	2. figúra	3. figúra	4. figúra
Hlavná premisa Vedľajšia premisa	$B-A$ $C-B$	$A-B$ $C-B$	$B-A$ $B-C$	$A-B$ $B-C$
Záver	$A-C$	$A-C$	$A-C$	$A-C$

Tabuľka 6.2. Interpretácia jednotlivých módov sylogizmov

#	mód	stredoveké označenie	predikátová logika
1	Všetky *A* sú *B*	***AaB***	$(\forall x)\left[A(x) \Rightarrow B(x)\right]$
2	Niektoré *A* sú *B*	***AiB***	$(\exists x)\left[A(x) \wedge B(x)\right]$
3	Žiadne *A* nie sú *B*	***AeB***	$(\forall x)\left[A(x) \Rightarrow \neg B(x)\right]$
4	Niektoré *A* nie sú *B*	***AoB***	$(\exists x)\left[A(x) \wedge \neg B(x)\right]$

V tabuľke 6.2 boli použité štyri rôzne „logické spojky“ *a*, *i*, *e*, *o*. Počet všetkých možných sylogizmov je určený takto: 4 figúry × 4 módy hlavnej premisy × 4 módy vedľajšej premisy = 64, riešenia všetkých týchto sylogizmov sú uvedené v tabuľke 8.3. Riešenia označené hviezdičkou existujú vtedy, ak sa predpokladá existencia aspoň jedného indivídua *a* s vlastnosťou *B*(*a*). Samozrejme, môžeme diskutovať, či tento dodatočný predpoklad musíme uvažovať alebo nie (bol potrebný až v interpretácii sylogizmov pomocou predikátovej logiky, v starovekej a stredovekej logike bol ignorovaný).

Tabuľka 6.3. Riešenie všetkých možných sylogizmov

1. figúra				2. figúra			
1	2	3*	4	17	18	19	20
BaA *CaB* *CaA*	*BaA* *CiB* *CiA*	*BaA* *CeB* *AoC*	*BaA* *CoB* ∅	*AaB* *CaB* ∅	*AaB* *CiB* ∅	*AaB* *CeB* *AeC*	*AaB* *CoB* *CoA*
5	6	7	8	21	22	23	24
BiA *CaB* ∅	*BiA* *CiB* ∅	*BiA* *CeB* *AoC*	*BiA* *CoB* ∅	*AiB* *CaB* ∅	*AiB* *CiB* ∅	*AiB* *CeB* *AoC*	*AiB* *CoB* ∅
9	10	11	12	25	26	27	28
BeA *CaB* *CeA*	*BeA* *CiB* *CoA*	*BeA* *CeB* ∅	*BeA* *CoB* ∅	*AeB* *CaB* *CeA*	*AeB* *CiB* *CoA*	*AeB* *CeB* ∅	*AeB* *CoB* ∅
13	14	15	16	29	30	31	32
BoA *CaB* ∅	*BoA* *CiB* ∅	*BoA* *CeB* ∅	*BoA* *CoB* ∅	*AoB* *CaB* *AoC*	*AoB* *CiB* ∅	*AoB* *CeB* ∅	*AoB* *CoB* ∅

3. figúra				4. figúra			
33*	34	35*	36	49	50	51	52
BaA *BaC* *AiC*	*BaA* *BiC* *AiC*	*BaA* *BeC* *AoC*	*BaA* *BoC* *AoC*	*AaB* *BaC* *AaC*	*AaB* *BiC* ∅	*AaB* *BeC* *AeC*	*AaB* *BoC* ∅
37	38	39	40	53	54	55	56
BiA *BaC* *AiC*	*BiA* *BiC* ∅	*BiA* *BeC* *AoC*	*BiA* *BoC* ∅	*AiB* *BaC* *AiC*	*AiB* *BiC* ∅	*AiB* *BeC* *AoC*	*AiB* *BoC* ∅
41*	42	43	44	57*	58	59	60
BeA *BaC* *CoA*	*BeA* *BiC* *CoA*	*BeA* *BeC* ∅	*BeA* *BoC* ∅	*AeB* *BaC* *CoA*	*AeB* *BiC* *CoA*	*AeB* *BeC* ∅	*AeB* *BoC* ∅
45	46	47	48	61	62	63	64
BoA *BaC* *CoA*	*BoA* *BiC* ∅	*BoA* *BeC* ∅	*BoA* *BoC* ∅	*AoB* *BaC* ∅	*AoB* *BiC* ∅	*AoB* *BeC* ∅	*AoB* *BoC* ∅

Niektoré sylogizmy v porovnaní zo stredovekým prístupom zasa chýbajú, dvojice *CaA* a *CiA*, a tiež *CeA* a *CoA* boli v stredoveku vo vzťahu podriadenosti (subsumpcie). To znamená, že ak platí prvý záver, tak platí aj druhý záver. V tab. 6.3 sú uvedené vždy iba prvé možnosti, *CaA* a *CeA*, pretože v rámci predikátovej logiky sa nemôže automaticky urobiť prevod z implikácie na konjunkciu, formula $\left(\forall x\left[A(x)\Rightarrow B(x)\right]\right)\Rightarrow\left(\exists x\left[A(x)\wedge B(x)\right]\right)$ nie je zákonom predikátovej logiky. Okrem toho napr. pri schémach *CeA* a *CiA* nezáleží na poradí predikátov, takže v tab. 6.3 sa na rozdiel od klasických sylogizmov môžu *A* a *C* nachádzať v závere v opačnom poradí.

Ako ilustratívny príklad sylogizmu študujme tieto tri výroky (dve premisy a záver):

niektorí študenti sú vegetariáni
všetci vegetariáni sú včelári
―――――――――――――――
niektorí študenti sú včelári

V tomto prípade jednotlivé unárne predikáty *A*, *B* a *C* stotožníme s vlastnosťami „študent“, „vegetarián“ resp. „včelár“, potom jednotlivé výroky môžeme prepísať do formy

$$\begin{array}{lcl} AiB & & (\exists x)\left[A(x)\wedge B(x)\right] \\ \underline{BaC} & \text{alebo} & \underline{(\forall x)\left[B(x)\Rightarrow C(x)\right]} \\ AiC & & (\exists x)\left[A(x)\wedge C(x)\right] \end{array}$$

Schému, ktorá obsahuje tak dve premisy, ako aj záver (ktorý má rovnaký formálny tvar ako premisy), budeme označovať ako úplný sylogizmus, ich celkový počet je 64 × 4 módy záveru = 256 úplných sylogizmov.

Hlavným problémom klasickej teórie sylogizmov je navrhnúť metódu na rýchle zistenie, ktoré z týchto úplných sylogizmov sú pravdivé (platné) a ktoré nepravdivé (neplatné). Aristoteles nemal problémy s dôkazom toho, že nejaký sylogizmus je neplatný.

Bol asi prvý, ktorý si uvedomil skutočnosť, že ak je sylogizmus platný, potom táto platnosť nemôže byť závislá na interpretácii jeho jednotlivých členov. Pre neplatné sylogizmi vždy sa mu podarilo nájsť takú interpretáciu členov *A*, *B*, *C,* že neplatnosť sylogizmu pre danú interpretáciu bola očividne zrejmá. Avšak tento prístup pre dôkaz platnosti daného sylogizmu je nepoužiteľný. Aristoteles sa snažil v tomto prípade previesť študovaný sylogizmus na základný typ (*AaB*)(*BaC*)/(*AaC*), ktorého platnosť považoval za očividnú. V tomto bode môžeme z dnešného pohľadu existencie rozvinutej predikátovej logiky, charakterizovať Aristotelov prístup za veľmi ťažkopádny ba až neúplný. Aristoteles skúmal len prvú, druhú a tretiu figúru, zrejme už vedel, že štvrtá figúra poskytuje sylogizmy, ktoré sú ekvivalentné sylogizmom prvej figúry. Táto štvrtá figúra sylogmizmu bola kompletne preskúmaná rímskym lekárom a logikom Galénom v 1. storočí (Galénus si asi neuvedomil ekvivalentnosť sylogizmov medzi 1. a 4. figúrou, kde stačí prehodiť 1. premisu s 2. premisou a člen *A* s *C*).

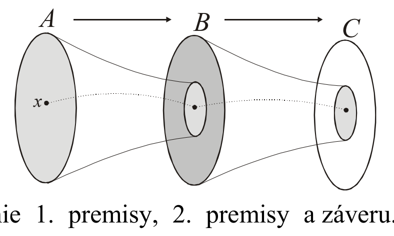
Príklad 6.5. Študujme sylogizmus s platným záverom (platnosť tohto sylogizmu pokladal Aristotels za evidentnú) (pozri obr. 8.1)

$$\frac{\begin{array}{c} AaB \\ BaC \end{array}}{AaC} \tag{6.11}$$

Jeho predikátová forma má tvar

$$\frac{\begin{array}{c} \forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right) \\ \forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right) \end{array}}{\forall x\left(A(x)\Rightarrow C(x)\right)} \tag{6.12}$$

Dôkaz platnosti tohto sylogizmu v rámci predikátovej logiky je pomerne jednoduchý, je založený na zákone tranzitívnosti implikácie (alebo podľa stredovekej teminológii, zákona hypotetického sylogizmu), $(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left((r\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\right)$. Z premís sylogizmu vyplýva, že pre ľubovolnú indivíduovú konštantu *t* súčasne platí $A(t)\Rightarrow B(t)$ a $B(t)\Rightarrow C(t)$. Pomocou pravidla *tranzitívnosti implikácie* (hypotetického sylogizmu) dostaneme implikáciu $A(t)\Rightarrow C(t)$, ktorá je pravdivá pre každú konštantu *t*, čiže platí aj je kvantifikovaná forma $\forall x\left(A(x)\Rightarrow C(x)\right)$, čo bolo potrebné dokázať.



Obrázok 6.3. Grafické znázornenie 1. premisy, 2. premisy a záveru. Prvá premisa $\forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right)$ grafický znázorníme ako zobrazenie množiny *A* (obsahujúca indivídua majúce vlastnosť *A*(*x*)) do podmnožiny množiny *B* (obsahujúca indivídua majúce vlastnosť *B*(*x*)), podobne môžeme zobraziť aj druhú premisu. Z obrázku vyplýva, že každé indivíduum majúce vlastnosť *A*(*x*) má taktiež aj vlastnosť *C*(*x*), čiže platí záver $\forall x\left(A(x)\Rightarrow C(x)\right)$. Z obrázku taktiež vyplýva aj platnosť záveru, že existuje také indivíduum *x*, ktoré ak má vlastnosť *C*(*x*), potom má vlastnosť *A*(*x*), $\exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right)$.

V texte k obr. 6.3 je uvedené, že existuje aj druhý alternatívny záver z predpokladov tohto sylogizmu, že existuje také indivíduum x, ktoré ak má vlastnosť $C(x)$, potom má vlastnosť $A(x)$, $\exists x\left(C(x)\wedge A(x)\right)$. Budeme teraz pomocou predikátovej logiky skúmať za akých podmienok je tento záver platný.

$$\begin{array}{l}\forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right)\\ \underline{\forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)}\\ \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right)\end{array}\tag{6.13}$$

Predpokladajme, že existuje také indivíduum b, pre ktoré platí $A(b)$. Z prvých dvoch premís sylogizmu taktiež dostaneme $A(b)\Rightarrow B(b)$ a $B(b)\Rightarrow C(b)$. Dvojnásobným použitím pravidla modus ponens z týchto troch predpokladov dostaneme $C(b)$, spojením tohto záveru s prvým predpokladom $A(b)$ dostaneme ich konjunkciu $A(b)\wedge B(b)$, čiže platí aj $\exists x\, A(x)\wedge B(x)$. To znamená, že alternatívne riešenie (6.13) je platné len ak predpokladáme existenciu $A(b)$, potom (6.13) musíme zmodifikovať takto

$$\begin{array}{l}A(b)\\ \forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right)\\ \underline{\forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)}\\ \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right)\end{array}\tag{6.14}$$

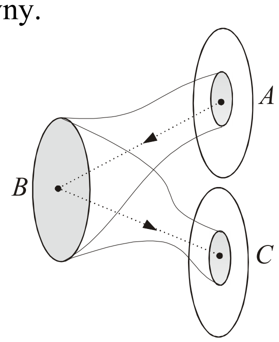
Príklad 6.6. Ako ďalší ilustratívny príklad uvažujme sylogizmus, ktorý zohral veľkú úlohu pri objasňovaní vzájomného vzťahu klasickej teórie sylogizmov a modernej predikátovej logiky

$$\begin{array}{l}BaA\\ \underline{BaC}\\ AiC\end{array}\tag{6.15}$$

Použitím predikátovej logiky ukážeme, že tento sylogizmus nie je vo všeobecnosti platný, musíme zaviesť ešte okrem dvoch premís ďalší predpoklad, aby sa stal platným. Predikátová reprezentácia tohto sylogizmu má tvar (pozri obr. 6.10)

$$\begin{array}{l}\varphi_1:\forall x\left(B(x)\Rightarrow A(x)\right)\\ \underline{\varphi_2:\forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)}\\ \psi:\exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right)\end{array}\tag{6.16}$$

K jednoduchému zisteniu, či je sylogizmus splnený alebo nie, uvažujme túto interpretáciu $\mathcal{I}$: univerzum $\mathcal{U}$ je množina indivíduí, predikát $B(x)$ znamená, že indivíduum x je auto, predikát $A(x)$ znamená, že indivíduum x má volant a predikát $C(x)$ znamená, že indivíduum x má kolesá. Premisy študovaného sylogizmu v rámci použitej interpretácie môžeme teda interpretovať tak, že prvá premisa je „každé auto má volant" a druhá premisa je „každé auto má koleso". Uvedený záver v (6.4b) predpokladá, že existujú indivíduá, ktoré majú súčasne volant a kolesá. Avšak tento záver vo všeobecnosti nevyplýva z premís sylogizmu. To znamená, že v rámci tejto konkrétnej interpretácia $\mathcal{I}$ sylogizmus (6.4) uvedený záver nie je korektný. Avšak ak postulujeme existenciu indivídua, ktoré je auto, potom na základe premís sylogizmu automatický vyplýva, že existuje také indivíduum, ktoré má súčasne tak volanty ako aj kolesá, t.j. záver (6.4b) správny.



Obrázok 6.4. Diagramatické znázornenie sylogizmu (6.15). Existencia indivíduií, ktoré majú súčasne vlastnosti *A* a *C* vyžaduje existenciu aspoň jedného indivídua s vlastnosťou *B* (pozri orientovanú prerušovaná čiaru idúcu z *A* do *C* cez *B*).

Ak rozšírime sylogizmus o 0. premisu $B(a)$ (t.j. existuje aspoň jedno indivíduum, ktoré má vlastnosť B)

$$\begin{array}{ll} \varphi_0: B(a) & \\ \varphi_1: \forall x\left(B(x)\Rightarrow A(x)\right)\Rightarrow\left(B(a)\Rightarrow A(a)\right) & \\ \underline{\varphi_2: \forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)\Rightarrow\left(B(a)\Rightarrow C(a)\right)} & \\ A(a) & \\ C(a) & \qquad (6.17) \\ A(a)\wedge C(a) & \\ \psi: \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right) & \end{array}$$

Týmto jednoduchým rozšírením predpokladov sme dosiahli, že záver $\psi = \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right)$ je korektný.

Poznámka: Schému usudzovania (6.17) môžeme riešiť alternatívne aj tak, že prvý predpoklad chápeme ako pomocný predpoklad, potom

$$\begin{array}{l} \varphi_0: B(t) \\ \varphi_1: \forall x\left(B(x)\Rightarrow A(x)\right)\Rightarrow\left(B(t)\Rightarrow A(t)\right) \\ \underline{\varphi_2: \forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)\Rightarrow\left(B(t)\Rightarrow C(t)\right)} \\ A(t) \\ C(t) \end{array}$$

$$A(t) \wedge C(t)$$
$$B(t) \Rightarrow A(t) \wedge C(t)$$
$$\psi : \forall x \left(B(x) \Rightarrow A(x) \wedge C(x) \right)$$

Záver môžeme v prirodzenom jazyku formulovať „každé *B* je *A* a *C*“.

Príklad 6.7. Tento príklad obsahuje sylogizmus s jedným záporom

$$\begin{array}{c} BaA \\ \underline{CeB} \\ AoC \end{array} \tag{6.18}$$

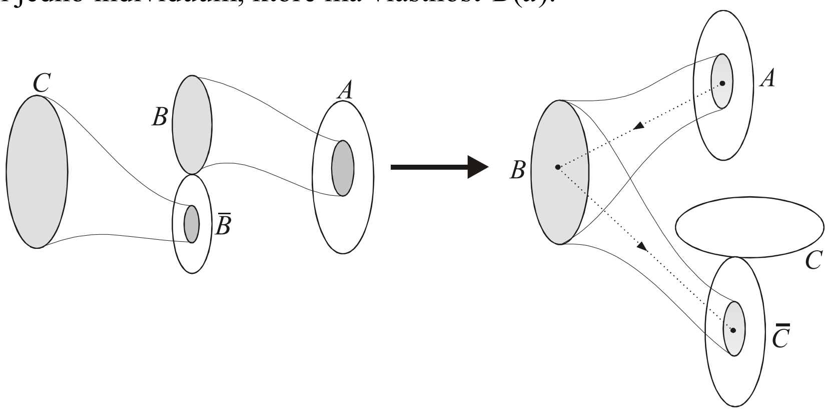
alebo v reprezentácii predikátovej logiky

$$\begin{array}{l} \varphi_1 : \forall x \left(B(x) \Rightarrow A(x) \right) \\ \underline{\varphi_2 : \forall x \left(C(x) \Rightarrow \neg B(x) \right)} \\ \psi : \exists x \left(A(x) \wedge \neg C(x) \right) \end{array} \tag{6.19}$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, aj tento sylogizmus je z pohľadu predikátovej logiky neplatný. Aj v tomto prípade, je nutné postulovať naviac existenciu jedného indivíduum *a* s vlastnosťou *B*(*a*), potom sa stáva tento sylogizmus platným. Pre väčšiu názornosť našich úvah prepíšeme druhú premisu sylogizmu (6.6b) pomocou zákona kontrapozície výrokovej logiky $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ do ekvivalentného tvaru

$$\begin{array}{l} \varphi_1 : \forall x \left(B(x) \Rightarrow A(x) \right) \\ \underline{\varphi_2' : \forall x \left(B(x) \Rightarrow \neg C(x) \right)} \\ \psi : \exists x \left(A(x) \wedge \neg C(x) \right) \end{array} \tag{6.20}$$

Diagramatická reprezentácia sylogizmov ekvivalentných (6.6) a (6.7) je znázornená na obr. 6.6, kde z pravej schémy bezprostredne vyplýva záver sylogizmu, že existuje také indivídium *a*, ktoré spĺňa vlastnosť *A*(*a*) a nespĺňa vlastnosť *C*(*a*). Avšak tento záver platí len vtedy, ak existuje aspoň jedno indivíduum, ktoré má vlastnosť *B*(*a*).



Obrázok 6.5. Grafické znázornenie ekvivalentných sylogizmov (6.6b) a (6.7). Pomocou pravého diagramu môžeme konštatovať, že sylogizmus je platný (záver: existuje taký objekt s vlastnosťou *A*, ktorý nemá vlastnosť *C*), ak existuje aspoň jedno indivíduum *a*, pre ktoré platí *B*(*a*).

Dôkaz správnosti usudzovania (6.7) vykonáme tak, že predpoklady rozšírime o 0. premisu

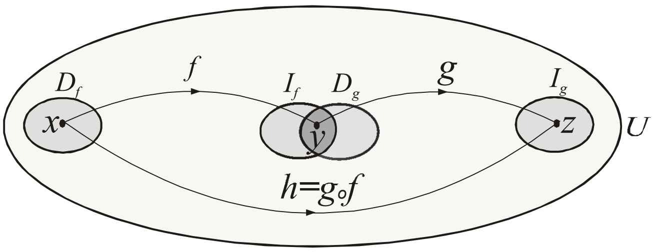
$$\begin{array}{l} \varphi_0: B(a) \\ \varphi_1: \forall x\,(B(x) \Rightarrow A(x)) \\ \underline{\varphi_2': \forall x\,(B(x) \Rightarrow \neg C(x))} \\ \psi: \exists x\,(A(x) \wedge \neg C(x)) \end{array} \tag{6.21}$$

ktorého záver je ľahko verifikovateľný, čiže rozšírený sylogizmus (6.8) je korektný.

Poznámka. Podobne ako v príklade 6.6, alternatívny prístup k riešeniu tohto sylogizmu je tento

$$\begin{array}{l} \varphi_1: \forall x\,(B(x) \Rightarrow A(x)) \\ \underline{\varphi_2': \forall x\,(B(x) \Rightarrow \neg C(x))} \\ (B(t) \Rightarrow A(t)) \\ (B(t) \Rightarrow \neg C(t)) \\ B(t) \Rightarrow A(t) \wedge \neg C(t) \\ \psi: \forall x\,(B(x) \Rightarrow A(x) \wedge \neg C(x)) \end{array}$$

Záver môžeme teda vyjadriť v prirodzenom jazyku ´každé *B* je *A* a non *C*´

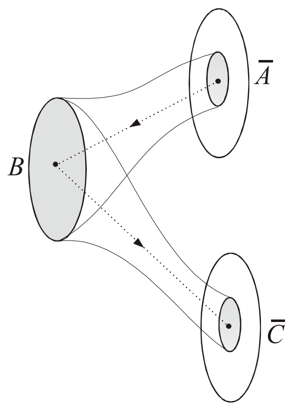


Obrázok 6.6. Schematické znázornenie dvoch zobrazení f a g, z ktorých kompozíciou vznikne zložené zobrazenie $h = g \circ f$, pričom definičné obory a obory hodnôt týchto funkcií patria do univerzálnej množiny U. Z tejto schémy jasne plynie, že zložené zobrazenie existuje len vtedy a len vtedy, ak prienik oboru funkčných hodnôt zobrazenie f a definičného oboru zobrazenia g je neprázdny, $I_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Pokúsme sa zovšeobecniť naše pozorovania o sylogizmoch, ktoré sme získali pomocou troch ilustračných príkladov. Interpretácia Aristotelovských sylogizmov môže byť chápaná ako konštrukcia všeobecnejšieho zobrazenia pomocou kompozície dvoch partikulárnych zobrazení (pozri obr. 6.6). Na tomto obrázku máme znázornené tri množiny A, B, C, dve zobrazenia $f: D_f \to I_f$ a $g: D_g \to I_g$, existencia zloženého zobrazenia $h: D_h \to I_h$ (ktoré vznikne zložením – kompozíciou zobrazení f a g) je určená podmienkou, že obor funkčných hodnôt zobrazenia f a definičný obor zobrazenia g majú neprázdny prekryv $I_f \cap D_g \neq \emptyset$, ak táto podmienka nie je splnená, potom zložené zobrazenie neexistuje. Zobrazenia môžeme vyjadriť v rámci predikátovej logiky takto:

$$
\begin{array}{l}
\varphi_0 : \exists y \in U \left(y \in I_f \wedge y \in D_g \right) \\
\varphi_1 : \forall x \in U \left(x \in D_f \Rightarrow f(x) \in I_f \right) \\
\varphi_2 : \forall y \in U \left(y \in D_g \Rightarrow g(y) \in I_g \right) \\
\hline
\psi \ : \exists x \in U \left(x \in D_f \wedge g\left[f(x) \right] \in I_g \right)
\end{array}
\qquad (6.22)
$$

Ako už bolo ukázané v predchádzajúcich ilustračných príkladov, zo samotných premís φ_1 a φ_2 nevyplýva záver ψ, k jeho dôkazu potrebujeme ešte premisu φ_0, ktorá vyjadruje podmienku, že množiny I_f a D_g majú neprázdny spoločný prienik, $I_f \cap D_g \neq \emptyset$. Čo môže byť pre niekoho trochu zavádzajúce, formula $\exists x \in U \left(x \in D_f \wedge g\left[f(x) \right] \in I_g \right)$ neobsahuje explicitne tieto množiny, sú však implicitne obsiahnuté v definícii zloženej funkcie $z = h(x) = g\left[f(x) \right]$.



Obrázok 6.7. Znázornenie sylogizmu z príkladu 6.8. Množina indivíduí s vlastnosťou *B* je zobrazovaná na množiny indivíduí, ktoré nemajú vlastnosť *A* a *C*. Potom môžeme predpokladať existenciu takých indivídií, ktoré nemajú ani vlastnosť *A* a ani *C*.

Príklad 6.8. Študujme sylogizmus, ktorý obsahuje dva zápory (pozri tabuľku 6.3, sylogizmus 59 zo štvrtej figúry)

$$
\begin{array}{c}
BeA \\
BeC \\
\hline
?
\end{array}
$$

Našou snahou bude zistiť, či tento sylogizmus má, alebo nemá riešenie (pripomeňme, že tabuľke 6.3 je uvedené, že nemá riešenie). Ukážeme, že aj tento sylogizmus má riešenie, ktoré sa vymyká klasickému prístupu k riešenie sylogizmov, vyžaduje zaviesť nový mód sylogizmu. Bude označený symbolom *u* s touto „exotickou" interpretáciou

$$AuC \leftrightarrow \exists x\left[\neg A(x) \wedge \neg C(x) \right]$$

Študovaný sylogizmus prepíšeme do štandardnej kvantifikátorovej formy

$$\begin{array}{l} \forall x\left[B(x)\Rightarrow\neg A(x)\right] \\ \underline{\forall x\left[B(x)\Rightarrow\neg C(x)\right]} \\ \exists x\left[\neg A(x)\wedge\neg C(x)\right] \end{array} \tag{6.23}$$

Predpokladajme, že existuje také indivíduum a, že predikát $B(a)$ je pravdivý, potom môžeme zostrojiť tento dôkaz

1.	$B(a)$	(1. predpoklad)
2.	$B(x)\Rightarrow\neg A(x)$	(2. predpoklad)
3.	$B(x)\Rightarrow\neg C(x)$	(3. Predpoklad)
4.	$\neg A(a)$	(modus ponens aplik. na 1 a 2)
5.	$\neg C(a)$	(modus ponens aplik. na 1 a 3)
6.	$\neg A(a)\vee\neg C(a)$	(introduk. konjunk. aplik.na 4 a 5)
7.	$\exists x\left[\neg A(x)\wedge\neg C(x)\right]$	(introduk. $\exists$ aplik. na 6)

To znamená, že študovaný sylogizmus môžeme písať v tvare

$$\begin{array}{c} BeA \\ \underline{BeC} \\ AuC \end{array}$$

pričom riešenie je platné len ak predpokladáme existenciu aspoň jedného indivúdua *a,* pre ktoré platí $B(a)$.

Poznámka. Alternatívny prístup k riešeniu tohto sylogizmu je

1.	$\forall x\big(B(x)\Rightarrow\neg A(x)\big)$	(1. predpoklad)
2.	$\forall x\big(B(x)\Rightarrow\neg C(x)\big)$	(2. predpoklad)
3.	$B(t)\Rightarrow\neg A(t)$	
4.	$B(t)\Rightarrow\neg C(t)$	
5.	$B(t)\Rightarrow\neg A(t)\wedge\neg C(t)$	
6.	$\big(A(t)\vee C(t)\big)\Rightarrow\neg B(t)$	
7.	$\forall x\Big(\big(A(x)\vee C(x)\big)\Rightarrow\neg B(x)\Big)$	

Výsledok v prirodzenom jazyku môžeme vyjadriť ´každé *A* alebo *C* nie je *B*´.

Literatúra

[1] Bendová, K.:*Sylogistika*. Karolinum, Praha, 1998.
[2] Gahér, F.: *Logika pre každého*. IRIS, Bratislava 1998
[3] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.
[4] Prawitz, D.: *Natural Deduction*. Almquist & Wiksell, Stockholm, 19??.
[5] Sousedík, P.: *Logika pro studenty humanitních oborů*. Vyšehrad, Praha 2001
[6] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.

Cvičenie

Cičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte formule:

(a) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

(b) $\neg(\forall x\, \varphi(x)) \equiv (\exists x\, \neg\varphi(x))$

(c) $\neg(\exists x\, \varphi(x)) \equiv (\forall x\, \neg\varphi(x))$

(d) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(t)$

(e) $\varphi(a) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

Cvičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte formuly (5.25)

Cvičenie 6.3. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

(d)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(e)
niektorí fyzici sú astronómovia
niektorí astrológovia sú astronómovia

?

Cvičenie 6.4. Použitím prirodzenej dedukcie riešenie sylogizmov z tabuľky 6.3.

7. kapitola

Modálna logika - Intuitívny úvod do jednoduchej (K) modálnej logiky

7.1. Úvodné poznámky

Modálna logika [1,6,7,8,10] patrí medzi neklasické logiky, ktoré využívajú modálne spojky pre kvalitatívnu špecifikáciu pravdivosti usudzovania. *Modálna logika* zahrňuje takú modifikáciu výrokovej logiky, ktorá obsahuje dve nové unárne spojky „je nutné, aby...“ a „je možné, aby...“. Iné typy modálnych logík sú temporálna logika (obsahuje modálne spojky časové charakteru ako napr. „budúci“ a „minulý“), deontickú logiku (obsahuje modálne spojky morálneho charakteru ako napr. „je povinné, aby...“, „je povolené, aby...“), epistemickú logiku (obsahuje modálne spojky „viem“, „verím“ a ďalšie spojky) a mnohé ďalšie logiky. Tieto logiky modálneho charakteru majú význam nielen vo filozofii, kde umožňujú analyzovať a precizovať jej argumenty modálneho charakteru, ktoré sú často veľmi neurčité a ťažko „uchopiteľné“, ale aj vo vedách prírodovedných, v informatike a v umelej inteligencii, kde umožňujú rozšírenie spôsobov usudzovania a reprezentácií vedomostí.

Spoločným rysom modálnych logík je, že modálne spojky nevyhovujú princípu funkcionality, ktorý je platný v klasickej výrokovej logike, pravdivosť výroku $\clubsuit\varphi$ s *unárnou modálnu spojkou* $\clubsuit$ nie je plne určená len pravdivostnou hodnotou výroku φ (ako to napr. platí pre spojku negácie, kde pravdivosť $\neg\varphi$ je plne určená pravdivosťou φ). Tento problém spôsoboval veľké problémy pri korektnej formulácii modálnych logík, menovite ich sémantickej interpretácii pomocou pravdivostných hodnôt formúl prostredníctvom pravdivostných hodnôt ich podformúl. Koncom 50. rokov minulého storočia americký filozof a logik Saul Kripke [3,4,5] navrhol novú sémantickú interpretáciu, ktorá využíva aj iné možné svety, ako je len náš svet. Kripke vychádzal zo všeobecných filozofických úvah založených na predstave nemeckého filozofa 17. storočia Leibniza, ktorý sa domnieval, že Boh mohol stvoriť svet nekonečne mnohými spôsobmi. Pojem možného sveta potom o niekoľko storočí neskoršie inšpiroval Kripkeho pri tvorbe sémantiky modálnych výrokov. Problém určenia pravdivostnej hodnoty výroku „φ je *vždy* pravdivé“, spočíva v tom, že pri jeho riešení sa musíme obracať aj na iné možné svety, ***výrok φ je nutne pravdivý vtedy a len vtedy* (*vtt*)*, ak φ je pravdivý vo všetkých možných svetoch***. Podobne, ***výrok φ je možne pravdivý vtedy a len vtedy* (*vtt*)*, ak φ je pravdivý aspoň v jednom možnom svete***. Tento prístup má univerzálny charakter a je pomerne ľahko aplikovateľný aj pre iné typy modálnych logík.

Modálne spojky „nutne“ a „možne“ majú podobnú interpretáciu, akú majú univerzálny resp. existenčný kvantifikátor. Rozdiel je však v tom, že kvantifikátory sú definované nad univerzom vecí alebo indivíduí, zatiaľ čo modálne spojky sa vzťahujú k možným svetom. Aj keď sa jedná o jemné rozlíšenie kvantifikátorov a modálnych spojok, táto analógia môže byť významná napr. pri zavádzaní kvantifikátorov v modálnej logike.

Jeden svet môže obsahovať rôzne univerzá vecí a indivíduí, zatiaľ čo nejaké univerzum je vždy určené pre nejaký daný možný svet. Táto skutočnosť podstatne komplikuje tvorbu predikátovej modálnej logiky, jeden z najjednoduchších spôsobov ako preklenúť tieto problémy je postulovať, že v každom svete existujú rovnaké univerzum vecí a indivíduí. Žiaľ toto jednoduché riešenie generuje tautológie, ktorých sémantická interpretácia nie je v súhlase s bežným prirodzeným jazykom.

Predmetom záujmu v modálnych logikách je pochopiť, ktoré modálne výroky implikujú iné modálne výroky, aký je medzi nimi vzájomný vzťah a pod. Modálna logika bola diskutovaná už Aristotelom, ktorý ako prvý poukázal na skutočnosť, že nutnosť implikuje možnosť

ak (*p je nutné*), potom (*p je možné*) (7.1a)

pričom opačná implikácia samozrejme neplatí (ak by platila, potom modality možnosť a nutnosť by boli totožné). Taktiež poukázal na možnosť definovať možnosť pomocou nutnosti a naopak

nie (*p je možné*) *vtedy a len vtedy ak* (*nie p je nutné*) (7.1b)

nie (*p je nutné*) *vtedy a len vtedy ak* (*nie p je možné*) (7.1c)

a taktiež zistil, že nasledujúce dva modálne výroky sú ***platné***

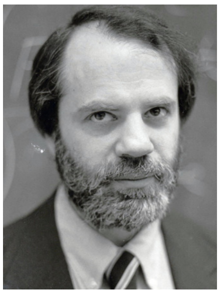
ak ((*ak p*, *potom q*) *je nutný*), *potom* (*ak* (*p je nutný*), potom (*q je nutný*)) (7.2a)

ak ((*ak p*, *potom q*) *je nutný*), *potom* (*ak* (*p je možný*), *potom* (*q je možný*)) (7.2b)

Aristoteles, podobne ako v teórii sylogizmov, pomocou vhodných interpretácií (teraz by sme povedali falzifikácií) ukázal, že nasledujúce dva modálne výroky sú ***neplatné***

ak ((*p je možné*) *a* (*q je možné*)), *potom* ((*p a q*) *je možné*) (7.3a)

ak ((*p alebo q*) je nutné), *potom* ((*p je nutné*) *alebo* (*q je nutné*)) (7.3b)



Obrázok 7.1. Americký filozof a logik Saul Kripke (∗1940), ktorý je tvorcom sémantickej interpretácie modálnej a intuicionistickej logiky pomocou novej idey možných svetov. Použitie tejto sémantickej interpretácie patrí medzi "Kopernikovský obrat" štúdia mnohých neklasických logík modálneho typu v druhej polovici minulého storočia. Prekvapujúcou je aplikácia kripkeovskej teórie možných svetov v literárnej vede [2], kde je použitá k interpretácii diel sci-fi a fantasy. Tento teoretický prístup poskytuje pre literárnych vedcov vhodný jazyk a konceptuálne rámce pre popis a špecifikáciu týchto literárnych diel.

Pri skúmaní pravdivosti modálnych výrokov „*p je nutné*“ a „*p je možné*“ hľadáme odpoveď podľa amerického filozofa a logika Saula Kripkeho [3,4,5] v možných svetoch $W = \{w_1, w_2,.., w_n,...\}$. Ak je nejaká skutočnosť pravdivá v každom možnom svete, potom povieme, že je *nutne pravdivá* aj v našom svete, alebo, ak je pravdivá aspoň v jednom možnom svete, povieme, že je *možne pravdivá* aj v našom svete. Žiaľ, tento jednoduchý postup pre sémantickú interpretáciu modálnych spojok produkuje „kolaps“ formuly ((*p* je nutné) je nutné). Ak použijeme postup naznačený vyššie pre sémantickú interpretáciu, potom (*p* je nutné) platí pre každý svet $w' \in W$, ak na výrok (*p* je nutné) opakovane aplikujeme použitú sémantickú interpretáciu dostaneme, že p platí pre každý svet $w'' \in W$. To znamená, že sémantická interpretácia formúl ((p je nutné) je nutné) a (p je nutné) je rovnaká, čo je vo všeobecnosti kontraintuitívne a môže platiť len v určitých špeciálnych prípadoch. Bolo veľkou zásluhou Saula Kripkeho, že odstránil tento nedostatok jednoduchej sémantickej interpretácie pomocou možných svetov, že každú formulu modálnej logiky zafixoval v určitom svete $w \in W$ a jej význam hľadal len vo svetoch „***dostupných***“ z daného sveta w, $w' \in \Gamma(w)$, kde $\Gamma(w) \subseteq W$ je podmnožina možných svetov, ktoré sú dostupné zo sveta w.

Použijeme dva jednoduché ilustračný príklad tejto zaujímavej idey:
(1) Študujme výrok „*nutne platí, že vlak do Prahy odchádza o 10.15*“. Ako sa jednoducho vysporiadať s unárnou modálnou spojkou „nutne“? Najjednoduchší prístup k riešeniu tohto problému bude, keď sa obrátime s otázkou „*odchádza vlak do Prahy o 10.15*“ ? na našich susedov v dome kde bývame. Potom $\Gamma(w) = susedia\_v\_dome(w)$, táto množina obsahuje susedov indivídua w, ktorý s ním bývajú na jednej chodbe. Ak nám každý takýto sused odpovie „*áno*“, potom môžeme pokladať daný výrok za nutne pravdivý. Ak nám odpovie „*áno*“ len určitá časť susedov (aspoň jeden), potom daný výrok môžeme pokladať za možne pravdivý.
(2) Predstavme si školu[1], v ktorej sa nachádza množstvo tried, pričom v každej triede ja tabuľa, na ktorej sú vypísané pravdivé výroky (napr. „Eva miluje Ivana“). Ak chceme poznať v danej triede w, v ktorej sa nachádzame, pravdivosť nejakého modálneho výroku „nutne φ“, tak musíme skontrolovať platnosť tohto výroku φ vo všetkých triedach, ktoré sú napr. na rovnakej chodbe ako daná trieda, $w' \in triedy\_v\_škole\_na\_rovnakej\_chodbe(w)$. Ak je v každej triede výrok φ pravdivý, potom φ je „nutne“ pravdivý v danej triede. Podobne, ak chceme poznať pravdivostnú hodnotu „možne φ“ v danej triede, stačí nájsť aspoň jednu triedu na rovnakej chodbe, kde na tabuli je uvedený výrok φ, potom výrok φ je „možne“ pravdivý v danej triede. Výrok „*číslo 3 je prvočíslo*“ je pravdivý za každej situácie v každej triede v celej škole, t. j. je napísaný na tabuli v každej triede, potom je takýto výrok nutne pravdivý. Podobne, ak výrok „*Eva miluje Ivana*“ je pravdivý len v niektorých triedach na rovnakej chodbe, potom tento výrok nie je nutne pravdivý ale len možne pravdivý. Na záver uvažujme výrok „*prvočíslo väčšie ako 2 je deliteľné 2*“, ktorý nie je pravdivý v žiadnej triede, t. j. je nutne nepravdivý.

Zovšeobecníme tieto dva jednoduché ilustračné príklady. Nech výrok „nutne φ“ má tvar □φ, kde symbol □ reprezentuje unárnu modálnu spojku „nutne“. Nech svet v ktorom sa skúma pravdivosť výroku □φ je označený symbolom w, množina možných svetov je označená W. Ak výrok φ je pravdivý pre každý svet $w' \in \Gamma(w)$, t. j. relácia $w' \vDash \varphi$ ($w' \nvDash \varphi$) je pravdivá (nepravdivá), potom budeme pokladať skúmaný výrok □φ za pravdivý aj pre svet w (pozri obr. 7.2)

$$w \vDash \Box\varphi \quad vtt \quad \left(\forall w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \vDash \varphi\right) \tag{7.4a}$$

alebo

$$w \nvDash \Box\varphi \quad vtt \quad \left(\exists w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \nvDash \varphi\right) \tag{7.4b}$$

[1] Tento príklad pochádza od Prokopa Sousedíka [9].

V prípade, že množina, že množina dostupných svetov $\Gamma(w)$ je prázdna (t. j. svet w nemá žiadneho nasledovníka), potom formula $w \vDash \Box\varphi$

Z tohto jednoduchého ilustračného príkladu vyplýva, že pravdivosť výroku $\Box\varphi$ je špecifikovaná pre daný objekt $w \in W$. Toto je nová črta, ktorá je neznáma v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť formuly φ je nezávislá na objekte $w \in W$, platí univerzálne.

Podobným spôsobom môžeme diskutovať aj výrok tvaru[2] $\Diamond\varphi$, kde symbol $\Diamond$ reprezentuje modálnu unárnu spojku „možne“. Ak výrok $\Diamond\varphi$ je pravdivý aspoň pre jeden svet $w' \in \Gamma(w)$, t. j. relácia $w' \vDash \varphi$, potom budeme pokladať skúmaný výrok $\Diamond\varphi$ za pravdivý aj pre svet w

$$w \vDash \Diamond\varphi \quad vtt \quad \left(\exists w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \vDash \varphi\right) \tag{7.5a}$$

alebo

$$w \nvDash \Diamond\varphi \quad vtt \quad \left(\forall w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \nvDash \varphi\right) \tag{7.5b}$$

Skutočnosť, že platnosť výrokov $\Box\varphi$ a/alebo $\Diamond\varphi$ je vztiahnutá k nejakému svetu $w \in W$ je nová črta modálnej logiky, ktorá je neznáma v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť formuly φ je nezávislá na svete $w \in W$, platí univerzálne. Modálne spojky sú navzájom spriahnuté vzťahmi

$$\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi \tag{7.6a}$$

$$\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi \tag{7.6b}$$

ktoré už boli formulované Aristotelom (pozri (2.1b-c)).

Jazyk (syntax) modálnej logiky bude definovať spôsobom, ktorý je jednoduchým rozšírením výrokovej logiky pomocou zavedenia dvoch unárnych modálnych spojok a ich sémantickou interpretáciou.

V prvok kroku budeme špecifikovať tvorbu formúl jazyka L modálnej logiky[3]. Nech $P = \{p, q, \ldots, p', q', \ldots, p_1, q_1, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ je konečná množina atomických výrokov (výrokových premenných) rozšírená o dve pravdivostné konštanty **0** a **1**, z ktorých pomocou unárnych a binárnych logických spojok (včítane modálnych $\Box$ a $\Diamond$) vytvárame formuly modálnej logiky, kde L je minimálna množina špecifikovaná týmto rekurentným spôsobom:

(1) $L := P$,
(2) Ak $\varphi, \psi \in L$, potom $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \equiv \psi), (\neg\varphi), (\Box\varphi), (\Diamond\varphi) \in L$

Použijeme metódu Kripkeho možných svetov [3,4,5] k špecifikácii pravdivostných hodnôt formúl obsahujúcich unárne operátory $\Box$ a $\Diamond$ modálnej logiky. ***Kripkeho model*** M je definovaný ako usporiadaná trojica

$$M = (W, R, val) \tag{7.7a}$$

---

[2] Formulu $\Box\varphi$ čítame „box fí“ a formulu $\Diamond\varphi$ čítamé „diamant fí“.

[3] Porovnaním s definíciou 1.2 zistíme, že jazyk L modálnej logiky je jednoduchým rozšírením jazyka výrokovej logiky o dne unárne spojky $\Box$ a $\Diamond$. To znamená, že každá formula výrokovej logiky je aj formulou modálnej logiky (ale nie naopak).

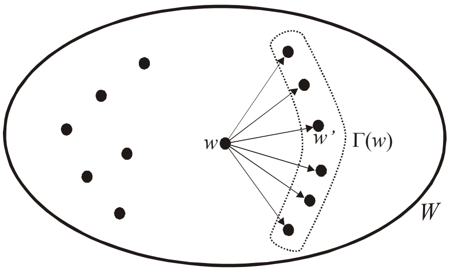
kde množina $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ obsahuje možné svety, $R \subseteq W \times W$ je binárna relácia definovaná nad množinou svetov a *val* je zobrazenie

$$val : P \times W \to \{0,1\} \tag{7.7b}$$

ktoré ohodnocuje atomické premenné $\{p, q, ..., p', q', ..., p_1, q_1, ...\}$ v každom svete $w \in W$ pravdivostnou ohodnotí $\nu al(p,w) \in \{0,1\}$ s interpretáciou (pozri obr. 7.2)

$$(\nu al(p,w) = 1) \equiv (p \text{ je pravdivé vo svete } w) \equiv (w \vDash p) \tag{7.7c}$$

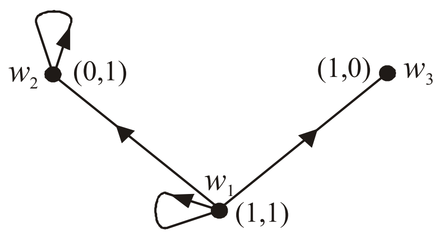
$$(\nu al(p,w) = 0) \equiv (p \text{ je nepravdivé vo svete } w) \equiv (w \nvDash p) \tag{7.7d}$$



Obrázok 7.2. Znázornenie podmnožiny $\Gamma(w) \subseteq W$, ktorá obsahuje svety, ktoré sú dostupné (susedné) vzhľadom k svetu *w*.

Pomocou relácia *R* môžeme definovať pre každý svet $w \in W$ množiny dostupných (susedných) svetov $\Gamma(w) \subseteq W$ zo sveta *w*, pozri obr. 7.2 a 7.3.

$$\Gamma(w) = \{w' ; (w, w') \in R\} \tag{7.7e}$$



Obrázok 7.3. Znázornenie binárnej relácie $R \subseteq W \times W$ pomocou orientovaného grafu, pričom množina svetov *W* obsahuje tri svety, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Množina *P* obsahuje dve výrokové premenné, $P = \{p, q\}$. Každý vrchol grafu je ohodnotený binárnou dvojicou (α, β), kde α (β) špecifikuje pravdivostnú hodnotu premennej *p* (*q*). Tak napríklad dvojica (0,1) pri vrchole w_2 špecifikuje pravdivostnú hodnotu *p* (*q*) ako 0 (1), alebo $w_2 \nvDash p$ resp. $w_2 \vDash q$. Množiny Γ sú určené takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}, \Gamma(w_3) = \emptyset$. Zobrazenie (7.7b) je určené takto: $v(p, w_1) = 1$, $v(p, w_2) = 0$, $v(p, w_3) = 1$, $v(q, w_1) = 1$, $v(q, w_2) = 1$, $v(q, w_3) = 0$.

Použitím podmnožín Γ modálne unárne operátory (spojky) sú definované takto [6]

$$(w \vDash \Box\varphi) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} (w' \vDash \varphi) & (pre\, \Gamma(w) \neq \emptyset) \\ 1 & (pre\, \Gamma(w) = \emptyset) \end{cases} \tag{7.8a}$$

$$\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\,\Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 0 & \left(pre\,\Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases} \tag{7.8b}$$

Sémantická interpretácia formuly $\Box\varphi$ je vždy vykonaná relatívne k nejakému svetu $w \in W$. Hovoríme, že formula $\Box\varphi$ (čítaná ako „***nutne*** φ“) je pravdivá vo svete w vtedy a len vtedy, ak výrok φ je pravdivý pre každý svet w' z podmnožiny dostupných svetov $\Gamma(w)$“. Podobným spôsobom je interpretovaná aj formula $\Diamond\varphi$ (čítaná ako „***možno*** φ“) je pravdivá vo svete w vtedy a len vtedy, ak výrok φ je pravdivý aspoň v jednom dostupnom svete w' z podmnožiny susedných svetov $\Gamma(w)$. Tieto dva vzťahy obsahujú zovšeobecnenie aj pre prípad prázdnej množiny susedných svetov, $\Gamma(w) = \varnothing$, potom

$$\left(w \vDash \Box\varphi\right) = 1 \tag{7.8a′}$$

$$\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) = 0 \tag{7.8b′}$$

pre ľubovoľnú formulu φ.

Pravdivostné hodnoty formúl modálnej logiky sú určené podobnou procedúrou ako vo výrokovej logike (pozri tab. 1.1). Nech atomické výroky sú pravdivostne ohodnotené zobrazením (7.7), t. j. výrazy $w \vDash p$ a $w \nvDash p$ špecifikujú, či výrok p je pravdivý resp. nepravdivý vo svete w. Uvažujme zložené formuly $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\Box\varphi$ a $\Diamond\varphi$, ich pravdivostné hodnoty vo svete w sú určené pomocou tab. 7.1.

Tabuľka 7.1. Sémantická interpretácia formúl modálnej logiky

(1)	$w \vDash \neg\varphi$ vtt $w \nvDash \varphi$
(2)	$w \vDash (\varphi \wedge \psi)$ vtt $w \vDash \varphi$ a $w \vDash \psi$
(2′)	$w \nvDash (\varphi \wedge \psi)$ vtt $w \nvDash \varphi$ alebo $w \nvDash \psi$
(3)	$w \vDash (\varphi \vee \psi)$ vtt $w \vDash \varphi$ alebo $w \vDash \psi$
(3′)	$w \nvDash (\varphi \vee \psi)$ vtt $w \nvDash \varphi$ a $w \nvDash \psi$
(4)	$w \vDash (\varphi \Rightarrow \psi)$ vtt $w \nvDash \varphi$ alebo $w \vDash \psi$
(4′)	$w \nvDash (\varphi \Rightarrow \psi)$ vtt $w \vDash \varphi$ a $w \nvDash \psi$
(5)	$w \vDash \Box\varphi$ vtt pre každé $w' \in \Gamma(w)$ platí $w' \vDash \varphi$
(5′)	$w \nvDash \Box\varphi$ vtt existuje také $w' \in \Gamma(w)$, že platí $w' \nvDash \varphi$
(6)	$w \vDash \Diamond\varphi$ vtt existuje také $w' \in \Gamma(w)$, že platí $w' \vDash \varphi$
(6′)	$w \nvDash \Diamond\varphi$ vtt pre každé $w' \in \Gamma(w)$ platí $w \nvDash \varphi$

V tab. 7.2 sú uvedené pravdivostné hodnoty jednoduchých formúl modálnej logiky pre Kripkeho model M s reláciou R znázornenou na obr. 7.3. V prvých dvoch riadkoch tabuľky sú uvedené pravdivostné hodnoty atomických premenných p a q, ktoré sú určené zobrazením v z legendy k obr. 7.3. Piaty a šiesty riadok tabuľky obsahuje modálne formuly $\Box p$ a $\Box q$, ktorých pravdivostná hodnota je určená pomocou (7.4a).

Tabuľka 7.2. Pravdivosť niektorých formúl pre Kripkeho model s reláciou R znázornenou na obr. 8.3.

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0
$p \vee q$	1	1	1
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	1
$\Diamond p$	1	0	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box p \wedge \Box q$	0	0	1
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$\Diamond p \wedge \Diamond q$	1	0	0
$\Diamond p \vee \Diamond q$	1	1	0
$\Box (p \wedge q)$	0	0	1
$\Box (p \vee q)$	1	1	1
$\Diamond (p \wedge q)$	1	0	0
$\Diamond (p \vee q)$	1	1	0

V modálnej logike sa pojem *tautológie* (reprezentovaný symbolom $\vDash$) formuly φ zavádza trochu komplikovanejšie ako vo výrokovej logike.

Definícia 7.1. Nech formula $\varphi \in L$, potom výrok ´formula φ je ***pravdivá pre model*** $M = (W, R, val)$ zapisujeme pomocou symbolu – relácie $\vDash$ takto

$$M \vDash \varphi \tag{7.9}$$

Negácia tohto výroku má tvar

$$M \nvDash \varphi \tag{7.9a}$$

Ktorú čítame ´formula φ je nepravdivá pre model M.

Hovoríme, že formula $\varphi \in L$ je ***tautológia*** práve vtedy, ak je pravdivá pre každý model M

$$\vDash \varphi =_{def} (\forall M)(M \vDash \varphi) \tag{7.10}$$

Pre modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$ platia vybrané tautológie z tab. 8.3, o ktorých platnosti sa môžeme presvedčiť pomocou sémantických tabiel.

Tabuľka 7.3. Vybrané tautológie jednoduchej modálnej logiky

(1)	$\models(\Diamond p\equiv\neg\Box(\neg p))$
(2)	$\models(\Box p\Rightarrow\Diamond p)$
(3)	$\models((\Box(p\wedge q))\equiv((\Box p)\wedge(\Box q)))$
(4)	$\models(\Diamond(p\vee q)\equiv(\Diamond p)\vee(\Diamond q))$
(5)	$\models((\Box p)\vee(\Box q)\Rightarrow\Box(p\vee q))$
(6)	$\models(\Diamond(p\wedge q)\Rightarrow(\Diamond p)\wedge(\Diamond q))$
(7)	$\models(\Box(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\Box p\Rightarrow\Box q))$
(8)	$\models(\Box(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\Diamond p\Rightarrow\Diamond q))$
(9)	$\models(\Diamond p\Rightarrow\Diamond q)\Rightarrow(\Diamond(p\Rightarrow q))$

Zrekapitulujme základné črty nášho postupu pri konštrukcii jednoduchej modálnej logiky, ktorú nazývame taktiež K (na počesť Saula Kripkeho) modálna logika. V prvom kroku sme špecifikovali dve modálne spojky „nutne“ a „možné“, reprezentované symbolmi □ resp. ◊. Sémantický význam týchto dvoch unárnych spojok bol špecifikovaný pomocou prístupu možných svetov navrhnutého Saulom Kripkom. Formuly modálnej logiky (t. j. syntax tejto logiky) boli jednoducho formulované pomocou mierne modifikovaného rekurentného postupu známeho z výrokovej logiky, v rámci ktorého formuly výrokovej logiky tvoria významnú podmnožinu korektných formúl modálnej logiky (ak formula neobsahuje modálnu spojku, potom je aj formulou výrokovej logiky). Sémantická interpretácia spojok sa odlišuje od klasického prístupu len v prípade modálnych unárnych spojok, ktoré sú interpretované v rámci modelu $M=(W,R,val)$, pričom relácia R z tohto modelu pre jednoduchosť nie je špecifikovaná, čo vlastne tvorí formálny základ jednoduchej K modálnej logiky.

7.2 Vzťah medzi modálnou logikou a predikátovou logikou

V tejto kapitole budeme diskutovať úzky vzťah medzi modálnou logikou a predikátovou logikou [1,2]. Pretože predikátová logika je historicky staršia približne o polstoročie od modálnej logiky, môžeme povedať, že modálna logika je špeciálny prípad predikátovej logiky. Niektorí autori využívajú túto skutočnosť k definícii modálnych operátorov □ a ◇ ako analogických štruktúr kvantifikátorov ∀ resp. ∃. Potom, v rámci tohto prístupu, napr. na základne platnosti predikátovej formuly $(\forall x)(p(x)\Rightarrow q(x))\Rightarrow((\forall x)p(x)\Rightarrow(\forall x)q(x))$ môžeme očakávať aj platnosť formuly $\Box(p(x)\Rightarrow q(x))\Rightarrow(\Box p(x)\Rightarrow\Box q(x))$, ktorá patrí medzi kľúčové formuly modálnej logiky. Musíme však poznamenať, že tento vzťah medzi modálnou a predikátovou logikou bol umožnený až vznikom Kripkeho sémantiky možných svetov, bez jej existencie by nikoho nenapadlo hľadať analógie medzi predikátovou a modálnou logikou.

Nech $U=\{a,b,...,x,y,...\}$ je univerzum objektov (indivíduí), vzhľadom ku ktorému bude definovať pravdivosť výroku (unárneho predikátu) p, $x\vDash p$, ktorý čítame „p je pravdivé pre objekt x“; jeho negácia $\neg(x\vDash p)=_{def}(x\nvDash p)$, ktorý sa číta „$x$ nie je pravdivé pre objekt p“. Definujme unárny operátor (univerzálny kvantifikátor) $\forall$ analogickým spôsobom, ako bol definovaný modálny operátor $\Box$ (pozri (7.8a))

$$\forall p=_{def}\bigwedge_{x\in U}(x\vDash p) \tag{7.11a}$$

Podobným spôsobom môže byť definovaný aj unárny operátor (existenčný kvantifikátor) $\exists$ ako analógia k modálnemu operátoru $\Diamond$ (pozri (7.8b))

$$\exists p=_{def}\bigvee_{x\in U}(x\vDash p) \tag{7.11a}$$

Z týchto dvoch definícií vyplýva (použitím de Morganových zákonov pre konjunkciu resp. disjunkciu) priamo vzťah medzi kvantifikátormi

$$\neg\forall p\equiv\exists\neg p \tag{7.12}$$

Na základe tejto analógie medzi kvantifikátormi a modálnymi operátormi môžeme prirodzene očakávať, že väčšina formúl predikátovej logiky má svoj „duálny“ tvar v modálnej logike (alebo naopak).

Na záver tejto sekcie o vzťahu medzi predikátovou a modálnou logikou uvedieme možné rozšírenie predikátovej logiky pre rôzne univerzá objektov, definujme si reťazec množín – univerzií objektov

$$U_1\subset U_2\subset...\subset U_n=U \tag{7.13}$$

Vzhľadom k týmto množinám môžeme definovať univerzálne a existenčné kvantifikátory

$$(\forall_i x)p(x)=_{def}\bigwedge_{x\in U_i}p(x) \tag{7.14a}$$

$$(\exists_i x)p(x)=_{def}\bigvee_{x\in U_i}p(x) \tag{7.14b}$$

kde i = 1, 2, ..., n. Univerzálny a existenčný kvantifikátor pre dané $1\le i\le n$ vyhovujú podmienke (7.12)

$$\neg(\forall_i x)p(x)\equiv(\exists_i x)\neg p(x) \tag{7.15}$$

Priamo z definície vyplývajú tieto formuly

$$(\forall_n x)p(x)\Rightarrow...\Rightarrow(\forall_2 x)p(x)\Rightarrow(\forall_1 x)p(x) \tag{7.16a}$$

$$(\exists_1 x)p(x)\Rightarrow(\exists_2 x)p(x)\Rightarrow...\Rightarrow(\exists_n x)p(x) \tag{7.16b}$$

$$(\forall_i x)p(x)\Rightarrow(\exists_i x)p(x)\quad(\text{pre } i=1,2,...,n) \tag{7.16c}$$

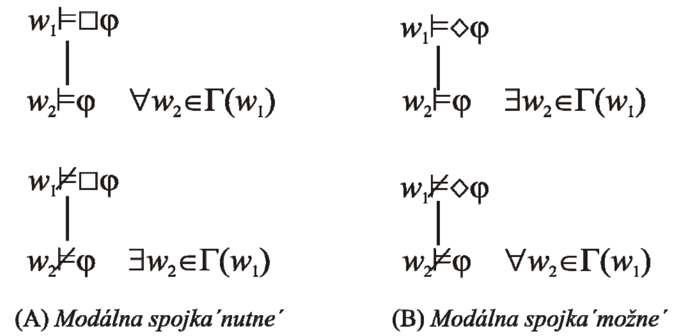
$$(\forall_{i+1} x)p(x)\equiv(\forall_i x)p(x)\wedge\left(\bigwedge_{x\in(U_{i+1}-U_i)}p(x)\right) \tag{7.16d}$$

$$(\exists_{i+1} x)p(x)\equiv(\exists_i x)p(x)\vee\left(\bigvee_{x\in(U_{i+1}-U_i)}p(x)\right) \tag{7.16e}$$

Môžeme teda konštatovať, že v rámci štúdia vzťahu medzi modálnou a predikátovou logikou navrhli sme zovšeobecnenú predikátovú logiku s rôznymi univerzálnymi a existenčnými kvantifikátormi $\forall_i$ a $\exists_j$, ktoré sú navzájom prepojené vzťahmi (7.15-16). Môžeme viesť zdĺhavé diskusie o významnosti tohto „zovšeobecnenia“ predikátovej logiky, v každom prípade bez znalosti Kripkeho sémantickej interpretácie modálnej logiky by existovala len veľmi malá pravdepodobnosť tohto zovšeobecnenia štandardnej predikátovej logiky.

7.3 Sémantické tablá v modálnej logike

Metóda sémantických tabiel [6,7] pre modálnu logiku je jednoduchým rozšírením tohto prístupu platného pre výrokovú logiku (pozri kapitolu 3.2) tak, že zavedieme nové rozšírenia sémantického tabla pre modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$, pozri obr. 7.4.



Obrázok 7.4. Rozšírenie metódy sémantických tabiel pre predikátový počet (prvý riadok) a modálnu logiku (druhý riadok). V dolnej časti diagramu vpravo sú uvedené objekty z množiny W (možné svety), pre ktoré formula platí.

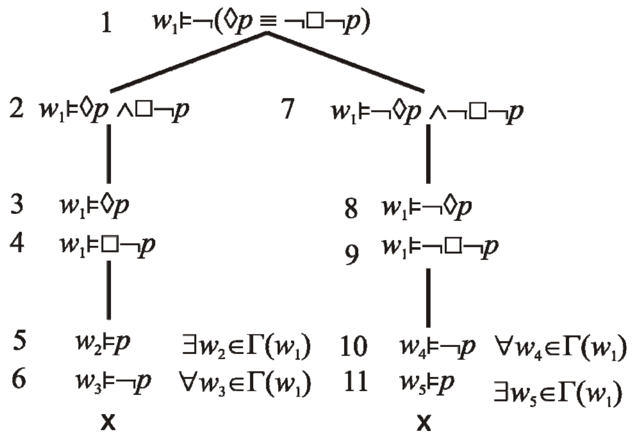
Príklad 7.1. Metódou sémantického tabla ukáže, že formula $\varphi = \left(\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p)\right)$ je tautológia. Vzniknuté sémantické tablo je znázornené na obr. 7.5, kde pre jednoduchosť sú jednotlivé uzly tabla sú označená číslami 1,…,6 s nasledujúcim komentárom:

1. Koreň tabla obsahuje negovanú formulu $\neg\varphi$, ktorá je ekvivalentnými manipuláciami prepísaná do konjunkcie $\neg\left(\Diamond p \Rightarrow \neg\Box(\neg p)\right) \wedge \left(\neg\Box(\neg p) \Rightarrow \Diamond p\right)$, pričom predpokladáme, že ekvivalentný prepis formuly $\neg\varphi = \left(\Diamond p \wedge \Box\neg p\right) \vee \left(\neg\Diamond p \wedge \neg\Box\neg p\right)$ je uvažovaný vo svete $w_1 \in W$.
2. Tento uzol sémantického tabla obsahuje podformulu $\Diamond p \wedge \Box\neg p$ vo svete w_1, ktorá pochádza z pôvodnej formuly $\neg\varphi = \left(\Diamond p \wedge \Box\neg p\right) \vee \left(\neg\Diamond p \wedge \neg\Box\neg p\right)$.

3.-4. Tieto dva uzly sú priradené podformulám $\Diamond p$ a $\Box\neg p$, obe uvažované vo svete svete $w_1 \in W$, ktoré vznikli z predchádzajúceho uzla 2 jeho rozkladom podľa konjunkcie.

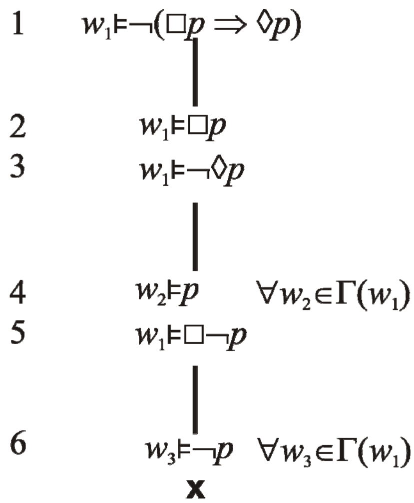
5. Uzol vznikol z uzla 3 odstránením modálneho operátora $\Diamond$, vzniknutá podformula p je uvažovaná vo svete $\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$.
6. Uzol vznikol z uzla 4 odstránením modeláneho operátora $\Box$, vzniknutá podformula $\neg p$ je uvažovaná vo svete $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$. Táto vetva sémantického tabla je ***uzavretá***, pretože dvojica komplementárnych literálov p a $\neg p$ môže existovať v rovnakom

svete $w_2 = w_3$. Podobným spôsobom môže byť komentovaná aj druhá vetva sémantického table obsahujúca uzly 7.-11., ktorá je taktiež uzavretá. Týmto sme dokázali, že formula φ je **tautológia**, jej pravdivostná hodnota nezávisí na zobrazení *v*, ktoré špecifikuje pravdivostnú hodnotu atomických premenných v jednotlivých svetoch z *W* a taktiež nie je závislá od tvaru podmnožín Γ(*w*) (pozri definíciu 7.1).



Obrázok 7.5. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p))$

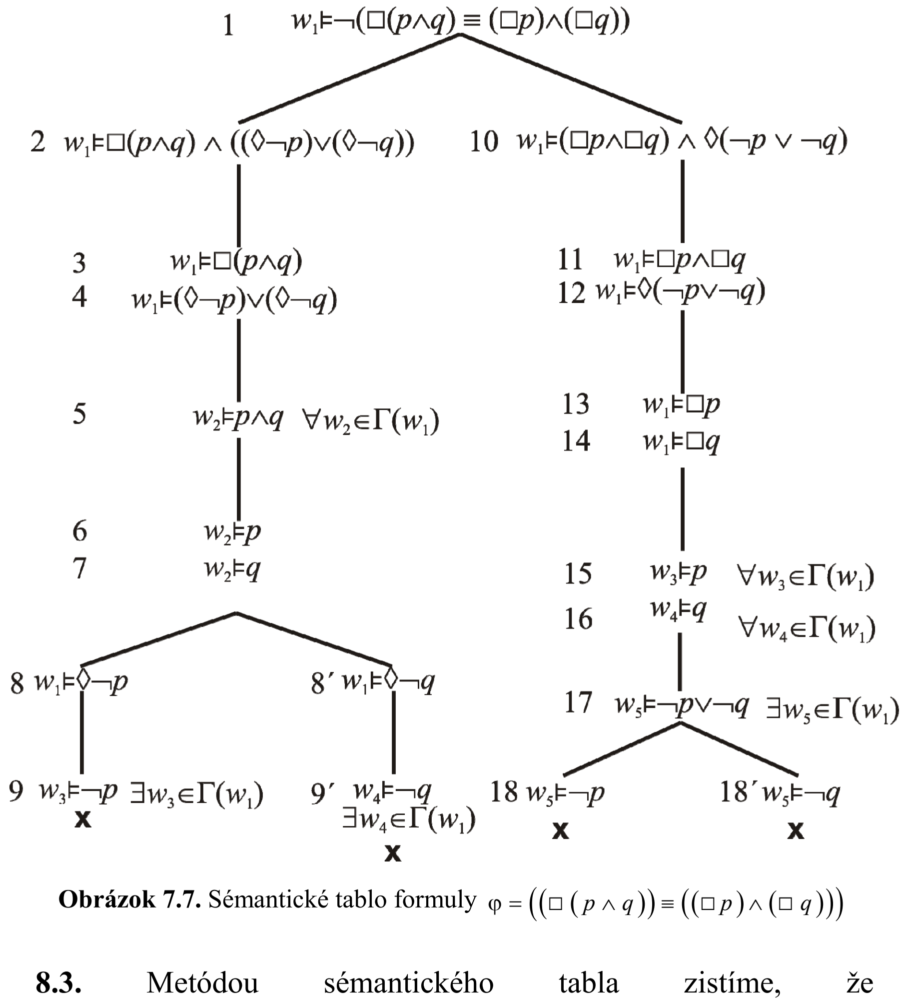
Príklad 7.2. Metódou sémantického tabla dokážte, že formula $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$ je tautológia, riešenie je uvedené na obr. 7.5.



Obrázok 7.6. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$.

Popis jednotlivých uzlov sémantického tabla z obr. 7.6:

1. Uzol sémantického tabla je inicializovaný formulou $\neg\varphi = \neg(\Box p \Rightarrow \Diamond p)$, ktorá je uvedená aj v upravenom ekvivalentnom tvare $\neg\varphi = \Box p \wedge \neg\Diamond p$, pričom formula $\neg\varphi$ je uvažovaná vo svete $w_1 \in W$.
2. Uzol obsahuje podformulu $\Box p$ vo svete $w_1 \in W$.
3. Uzol obsahuje podformulu $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$ vo svete $w_1 \in W$.
4. Uzol obsahuje literál p, ktorý vznikol z uzlu 2 odstránením spojky □, podformula je uvažovaná vo svete $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$.
5. Uzol vznikol z uzly 3 jeho prepisom pomocou formuly $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$, pričom podformulu $\Box\neg p$ je uvažovaná vo svete $w_1 \in W$.
6. Uzol znikol z 5 odstránením modálnej spojky □, podformula $\neg p$ je uvažovaná vo svete $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$, komplementárne literály z uzla 4 a 6 môžu existovať v rovnakom svete $w_2 = w_3$, t. j. vetva je uzavretá. a formula φ je tautológia.



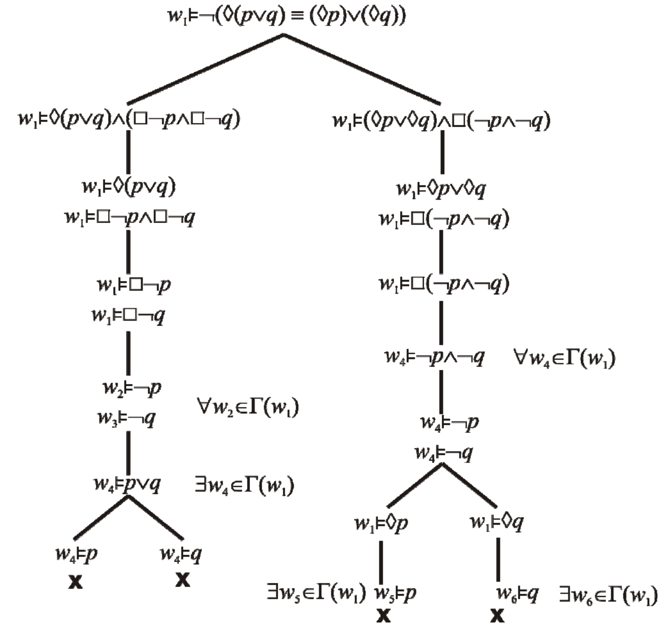
Obrázok 7.7. Sémantické tablo formuly $\varphi = ((\Box(p\wedge q)) \equiv ((\Box p)\wedge(\Box q)))$

Príklad 8.3. Metódou sémantického tabla zistíme, že formula $\varphi = ((\Box(p\wedge q)) \equiv ((\Box p)\wedge(\Box q)))$ je tautológia, riešenie je uvedené na obr. 7.7. Nebudeme už popisovať každý uzol sémantického tabla, ktoré má 4 uzavreté vetve, ktoré idúc zľava doprava sú tieto:

1. vetva, obsahuje uzly 1-9, dvojica komplemetárnych literálov je p (vo svete $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg p$ (vo svete $\exists w_3 \in \Gamma(w_1)$), potom pre $a = w_3 = w_2$ táto komplementárna dvojica súčasne existuje vo svete $a \in \Gamma(w_1)$.
2. vetva, obsahuje uzly 1-8, 10, dvojica komplemtárnych literálov pre túto vetvu obsahuje q (vo svete $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg q$ (vo svete $\exists w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre $a = w_4 = w_2$ daná komplementárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.
3. vetva. , obsahuje uzly 1, 11-19, dvojica komplementárnych literálov je p (vo svete $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg p$ (vo svete $\forall w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre svet $a = w_3 = w_4 \in \Gamma(w_1)$ daná komplemtárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.
4. vetva. , obsahuje uzly 1-17, 20-21, dvojica komplementárnych literálov je q (vo svete $\exists w_5 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg q$ (vo svete $\forall w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre svet $a = w_4 = w_5 \in \Gamma(w_1)$ dana komplemtárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.

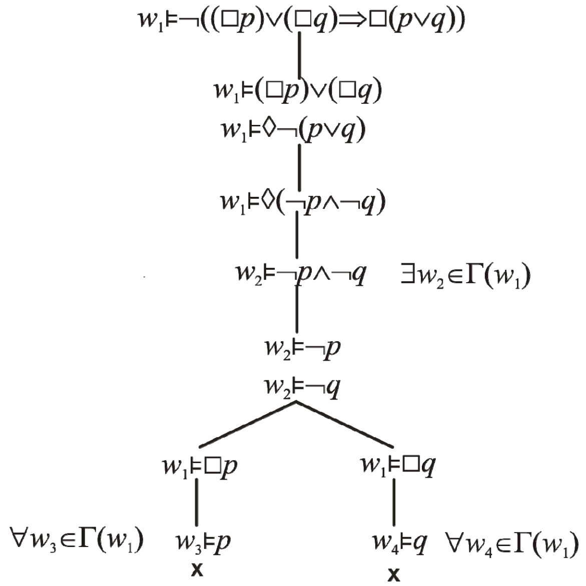
Týmto sme ukázali, že všetky vetve sú uzavreté, t. j. formula $\varphi = \left(\left(\Box\,(p \wedge q)\right) \equiv \left((\Box\, p) \wedge (\Box\, q)\right)\right)$ je tautológia.

Príklad 7.4. Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = \left(\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q)\right)$ pomocou sémantického tabla je znázornený na obr. 7.8. Nebudeme špecifikovať jednotlivé elementárne kroky konštrukcie sémantického tabla, zdôrazníme len, že všetky vetvy tabla sú uzavreté, t. j. formula φ je tautológia (ktorá je pravdivá pre každé zobrazenie v a v každom svete w).



Obrázok 7.8. Sémantické tablo formuly $\varphi = \left(\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q)\right)$

Príklad 7.5. Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ pomocou sémantického tabla je znázornený na obr. 7.9, ktorý obsahuje dve uzavreté vetvy, t. j. formula je tautológia.



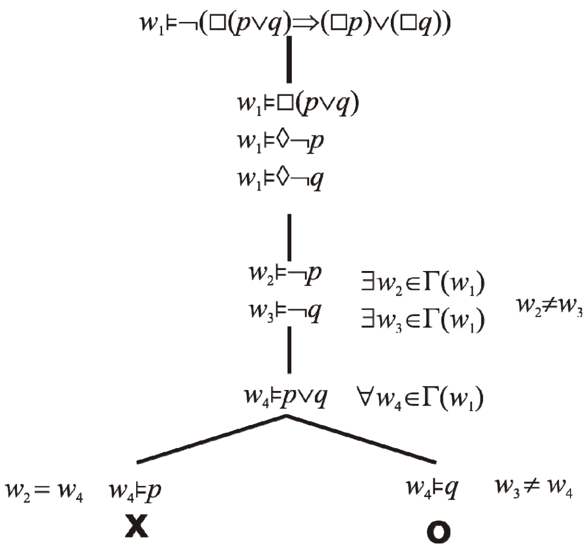
Obrázok 7.9. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$

Príklad 7.6. Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla je znázornená na obr. 7.10. Tablo obsahuje dve vetvy, jedna vetva (ľavá) je uzavretá, zatiaľ čo práva vetva je otvorená, pretože svety $\exists w_2 \in W$ a $\forall w_4 \in W$ nie je možné nastaviť tak, aby platilo $w_2 = w_4$, pretože z ľavej vetvy deklarovanej ako uzavretá, už platí restrikčná podmienka $w_1 = w_4$, čiže vo všeobecnosti platí $w_2 \neq w_4$. Tabuľka 7.4 obsahuje druhý alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia (alebo presnejšie, falzifikáciu predpokladu tautologičnosti formuly). Pomocou sémantického tabla z obr. 7.9 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných p a q, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných p a q v rôznych svetoch z množiny $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, kde podmnožiny dosažiteľných svetov sú špecifikované takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}$, $\Gamma(w_3) = \{w_3\}$, dostaneme, že formula je vždy nepravdivá vo svete w_1, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť. Tabuľka 7.4 obsahuje alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia. Pomocou sémantického tabla z obr. 7.6 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných p a q, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných p a q v rôznych svetoch z množiny $W = \{w', w_1, w_2\}$ dostaneme, že formula je vždy nepravdivá, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť.

Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla je znázornená na obr. 7.10. Tablo obsahuje dve vetvy, jedna vetva (ľavá) je uzavretá, zatiaľ čo pravá vetva je otvorená, pretože svet w_4 je fixovaný už z ľavej vetvy. Tabuľka 11 obsahuje druhý alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia (alebo presnejšie, falzifikáciu predpokladu tautologičnosti formuly). Pomocou sémantického tabla z obr. 7.10 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných p a q, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných p a q v rôznych svetoch z množiny $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, kde podmnožiny dosiahnuteľných svetov sú špecifikované takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}$, $\Gamma(w_3) = \{w_3\}$, je formula vždy nepravdivá vo svete w_1, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť.

Tabuľka 7.4. Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

Formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1



Obrázok 7.10. Sémantické tablo pre falzifikáciu tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$.

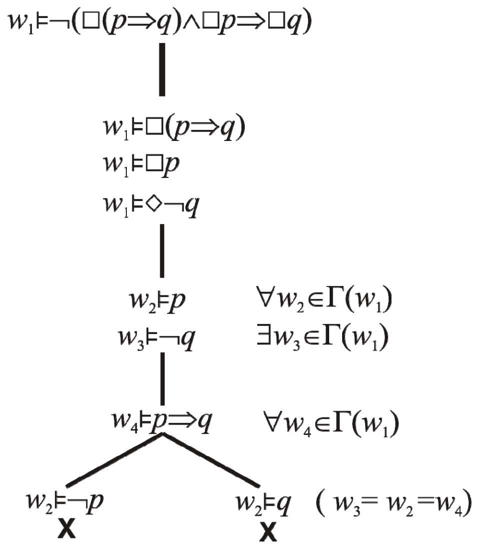
Tabuľka 7.5. Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

Formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$P \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1

Príklad 7.7. Pravidlo modus tollens v modálnej logike má tento alternatívny tvar

$$\begin{array}{|l} \Box(p \Rightarrow q) \\ \Box p \\ \hline \Box q \end{array}$$

Pomocou sémantického tabla dokážeme, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \wedge \Box p \Rightarrow \Box q$ je tautológia, pozri obr. 7.11.



Obrázok 7.11. Sémantické tablo pre dokaz, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \wedge \Box p \Rightarrow \Diamond q$.

Cvičenia

Cvičenie 7.1. Pomocou definičných vzťahov (7.8a-b) dokážte tautologičnosť ekvivalencií (7.6a-b).

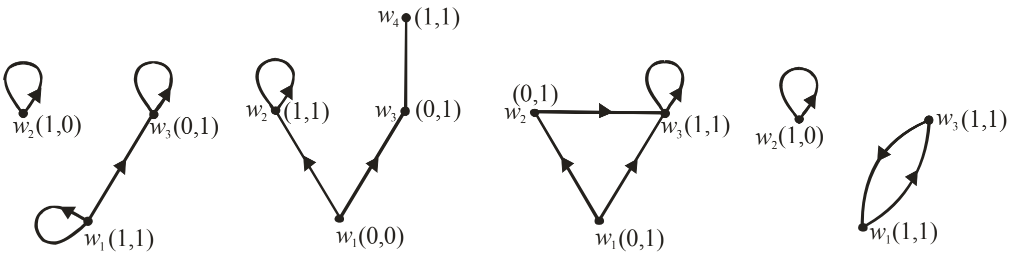
Cvičenie 7.2. Ukážte, že pre model M (8.7), kde pre každé $w \in W$, množiny dostupných svetov sú prázdne, $\Gamma(w) = \emptyset$, každá formula φ je nutná a nie je možná, t. j. pre ľubovoľnú formulu φ platí $\Box\varphi \equiv 1$ a $\Diamond\varphi \equiv 0$.

Návod: Modálne operátory nech sú definované pomocou relácií (7.6), pričom symboly konjunkcie a disjunkcie sú pre n komponent zovšeobecnené takto

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv 1 \wedge p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \equiv \begin{cases} p_1 \wedge \ldots \wedge p_n & (pre\ n \geq 1) \\ 1 & (pre\ n = 0) \end{cases}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv 0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_n \equiv \begin{cases} p_1 \vee \ldots \vee p_n & (pre\ n \geq 1) \\ 0 & (pre\ n = 0) \end{cases}$$

Cvičenie 7.3. Pre rôzne relácie špecifikované orientovaným grafom zostrojte pravdivostné hodnoty formúl: $\Box p$, $\Box q$, $\Diamond p$, $\Diamond q$, $\Box(p \wedge q)$,$\Box(p \vee q)$,$\Box(p \Rightarrow q)$, $\Diamond(p \wedge q)$,$\Diamond(p \vee q)$,$\Diamond(p \Rightarrow q)$.



(a) (b) (c) (d)

Cvičenie 7.4. Pomocou sémantického tabla falzifikujte tautologičnosť formúl, pomocou otvorených ciest navrhnite takú pravdivostnú interpretáciu premenných p a q, aby výsledná pravdivostná hodnota vo svete w_1 bola nepravda.

(a) $w \nvDash (\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,

(b) $w \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond q$,

(c) $w \nvDash (\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q) \Rightarrow \Diamond\Box(p \wedge q)$.

Cvičenie 7.5. Pomocou všeobecnej diskusie dokážte, že formula je tautológia (t. j. je pravdivá v každom svete, $(\forall w \in W)(w \vDash \varphi)$).

(a) $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$

(b) $\varphi = (\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$

(c) $\varphi = (\Diamond(p \vee q) \Rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q))$

Návod: Nech formula $\varphi = \left(\Box\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\Box p \Rightarrow \Box q\right)\right)$ je pravdivá v aktuálnom svete $w \in W$, potom (1) podformula $\varphi_1 = \Box\left(p \Rightarrow q\right)$ je nepravdivá alebo (2) podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá. Uvažujme možnosť (1), to potom znamená, že v dostupnom okolí $\Gamma(w)$ aktuálneho sveta w existuje aspoň jeden dostupný svet w' v ktorom je podformula $\varphi_{11} = p \Rightarrow q$ nepravdivá, čiže v tomto dostupnom svete platí, že premenná p je pravdivá a premenná q je nepravdivá. V možnosti (2) je podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá v aktuálnom svete w, potom v tom istom svete podformula $\varphi_{21} = \Box p$ je nepravdivá alebo podformula $\varphi_{22} = \Box q$ je pravdivá. Potom v okolí $\Gamma(w)$ existuje aspoň jeden svet w'' v ktorom je premenná p nepravdivá a v každom svete w''' z tohto okolia je premenná q je pravdivá (pozri tabuľku, kde druhý a tretí riadok špecifikujú výsledky diskusie o pravdivostných hodnotách premenných).

	w	w'	w''	w'''
p	#	1	0	#
q	#	0	#	1
$P \Rightarrow q$	#	0	1	1
$\Box(p \Rightarrow q)$	0	#	#	#
$\Box p$	0	#	#	#
$\Box q$	0	#	#	#
$\Box p \Rightarrow \Box q$	1	#	#	#
φ	1	#	#	#

Znak # reprezentuje ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu. Týmto sme dokázali, že v ľubovoľnom svete w je formula $\varphi = \left(\Box\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\Box p \Rightarrow \Box q\right)\right)$ pravdivá, čiže je tautológia.

Cvičenie 7.6. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly sú tautológie

(a) $\left(\Box p \wedge \Box q\right) \equiv \Box\left(p \wedge q\right)$,

(b) $\Box p \vee \Box q \Rightarrow \Box\left(p \vee q\right)$,

(c) $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$,

(d) $\Diamond\left(p \wedge q\right) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,

(e) $\Diamond\left(p \vee q\right) \equiv \left(\Diamond p \vee \Diamond q\right)$,

(f) $\Box\left(p \wedge q\right) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,

(g) $\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond\left(p \wedge q\right)$,

(h) $\Box p \Rightarrow \Box\left(\neg p \Rightarrow q\right)$,

(i) $\Box p \Rightarrow \Box\left(q \Rightarrow p\right)$,

(j) $\neg\Diamond q \Rightarrow \Box\left(q \Rightarrow p\right)$.

Cvičenie 7.7. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly nie sú tautológie, pomocou otvorenej vetvy tabla zostrojte protipríklad, ktorý falzifikuje tautologickosť formuly.

(a) $\Box\left(p \vee q\right) \Rightarrow \Box p \vee \Box q$,

(b) $\left(\Box p \wedge \Box\neg q\right) \Rightarrow \Box\left(p \Rightarrow q\right)$,

(c) $\left(\Diamond p \wedge \Diamond q\right) \Rightarrow \Diamond\left(p \wedge q\right)$,

(d) $\Box p \Rightarrow p$,

(e) $\Box p \Rightarrow \Diamond p$,

(f) $p \Rightarrow \Box p$.

Literatúra

[1] Blackburn, P., van Benthem, J., Wolter, F. (eds.): *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[2] Doležel, L.:. *Heterocosmica: Fiction and Possible Worlds*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1998 (existuje český preklad: Doležel, L.: *Heterocosmica. Fikce a možné světy*. Karolinum, Praha, 2003).

[3] Kripke, S.:. Semantical Analysis of Modal Logic, abstract. *Journal of Symbolic Logic*, **24** (1959), 323-324..

[4] Kripke, S.: The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 8 (1962), 113–116

[5] Kripke, S.: Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963), 83–94

[6] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2006.

[7] Peregrin, J.: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[8] Priest, G.: *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[9] Sousedík, P.: *Logika pro studenty humanitních oborů*, Vyšehrad, Praha, 2001.

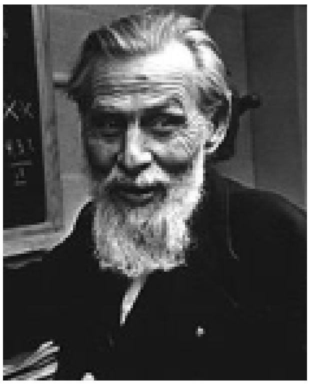
[10] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.

8. kapitola

Logické neuróny a neurónové siete

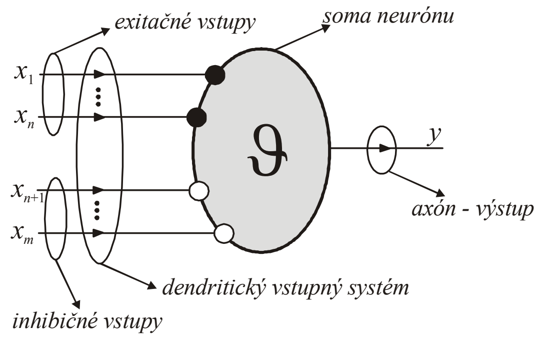
8.1 Logické neuróny McCullocha a Pittsa

Logické neuróny a neurónové siete [2,3,6,8,9] boli prvý krát študované v publikácii Warrena McCullocha a Waltera Pittsa [5] „*A logical calculus of the ideas immanent to nervous activity*" z r. 1943, ktorá je medzníkom v rozvoji metafory konekcionizmuv umelej inteligencii a kognitívnej vedy. V tejto práci bolo s geniálnou jasnozrivosťou ukázané, že neurónové siete sú efektívnym výpočtovým prostriedkom v doméne Boolových funkcií, t. j. ľubovolná Boolova funkcia je simulovaná pomocou neurónovej sieti obsahujúcej logické neuróny. Hneď úvodom je potrebné konštatovať, že táto práca McCullocha a Pittsa je veľmi ťažko čitateľná, matematicko-logická časť práce zrejme bola písaná Walterom Pittsom, ktorý bol tak v logike ako aj v matematika autodidaktom. Až zásluhou amerických vedcov, logika S. C. Kleeneho [1] a informatika N. Minskeho [6], táto významná práca bola „preložená“ v druhej polovici 50. rokov minulého storočia do štandardného jazyka súčasnej logiky a matematiky, čím sa stali myšlienky v nej obsiahnuté všeobecne prístupnými a akceptovanými.




Obrázok 8.1. Warren McCulloch (1889 - 1969) a Walter Pitts (1923 - 1969)

Elementárnou jednotkou neurónových sietí je ***logický neurón*** McCullocha a Pittsa (výpočtová jednotka), pričom stav neurónu je binárny (t. j. má dva stavy, 1 alebo 0). Takýto logický neurón možno interpretovať ako jednoduché elektrické zariadenie - relé. Predpokladajme, že dendritický systém logického neurónu obsahuje tak ***excitačné vstupy*** (opísané binárnymi premennými x_1, x_2, ..., x_n, ktoré zosilňujú odozvu), ako aj ***inhibičné*** (popísané binárnymi premennými x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m, ktoré zoslabujú odozvu), pozri obrázok 8.1.



Obrázok 8.1. Znázornenie McCullochovho a Pittsovho neurónu, ktorý obsahuje dendritický systém pre vstupné (excitačné alebo inhibičné) aktivity, axón pre výstup neurónovej aktivity. Soma (telo neurónu) je charakterizovaná prahovým koeficientom ϑ.

Aktivita logického neurónu je jednotková, ak *vnútorný potenciál* neurónu definovaný ako rozdiel medzi sumou excitačných vstupných aktivít a inhibičných vstupných aktivít je väčší alebo rovný prahu ϑ, v opačnom prípade je nulová

$$y=\begin{cases}1 & \left(x_1+\ldots+x_n-x_{1+n}-\ldots-x_m\geq-\vartheta\right)\\ 0 & \left(x_1+\ldots+x_n-x_{1+n}-\ldots-x_m<-\vartheta\right)\end{cases} \tag{8.1}$$

Pomocou jednoduchej krokovej funkcie

$$s(\xi)=\begin{cases}1 & (\xi\geq 0)\\ 0 & (\xi<0)\end{cases} \tag{8.2a}$$

môžeme aktivitu z vyjadriť takto:

$$y=s\left(\underbrace{x_1+\ldots+x_n-x_{1+n}-\ldots-x_m+\vartheta}_{\xi}\right) \tag{8.2b}$$

Tento vzťah pre aktivitu logického neurónu môžeme alternatívne interpretovať tak, že excitačné aktivity vstupujú do neurónu cez spoje, ktoré sú ohodnotené jednotkovým váhovým koeficientom (w = 1), zatiaľ čo inhibičné aktivity vstupujú do neurónu cez spoje so záporným jednotkovým váhovým koeficientom (w = -1). Potom aktivitu logického neurónu môžeme vyjadriť takto

$$y=s\left(\underbrace{w_1x_1+\ldots+w_mx_m+\vartheta}_{\xi}\right)=s\left(\sum_{i=1}^{m}w_ix_i+\vartheta\right) \tag{8.3a}$$

Kde váhové koeficienty w_{ij} sú definované takto

$$w_{ij}=\begin{cases}1 & (spoj\ j\to i\ má\ exitačný\ charakter)\\ -1 & (spoj\ j\to i\ má\ inhibičný\ charakter)\\ 0 & (spoj\ j\to i\ neexistuje)\end{cases} \tag{8.3b}$$

V neurónovej sieti váhové koeficienty sú fixne a sú určené topológiou syntaktického stromu špecifikujúceho Boolovu funkciu.

Jednoduchá implementácia elementárnych Boolových funkcií disjunkcie, konjunkcie, implikácie a negácie je znázornená na obrázok 8.2. Ako ilustratívny príklad študujme funkciu disjunkcie pre n = 2, použitím formúl z definície logického neurónu dostaneme

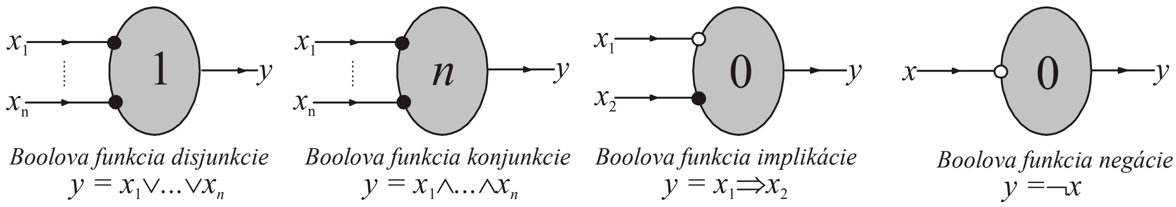
$$y_{OR}\left(x_1, x_2\right) = s\left(x_1 + x_2 - 1\right) \tag{8.4}$$

Funkčné hodnoty tejto Boolovej funkcie sú ukázané v tabuľke 8.1.

Tabuľka 8.1. Binárna Boolova funkcia disjunkcie

#	x_1	x_2	$y_{OR}(x_1,x_2)$	$x_1 \vee x_2$
1	0	0	$s(-1)$	0
2	0	1	$s(0)$	1
3	1	0	$s(0)$	1
4	1	1	$s(1)$	1

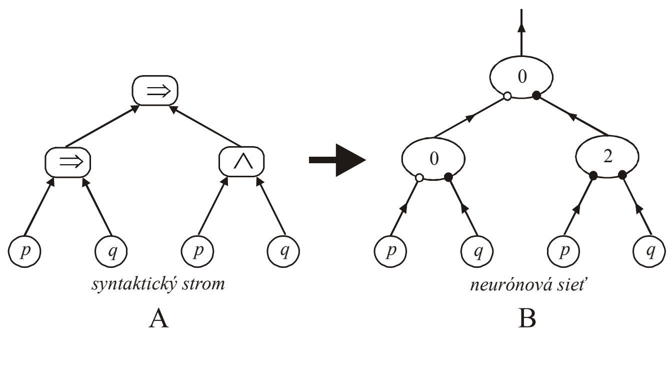
Z tabuľky vyplýva, že Boolova funkcia y_{OR} simuluje Boolovu funkciu disjunkcie.



Obrázok 8.2. Tri realizácie logických neurónov na implementáciu Boolových funkcií disjunkcií, konjunkcií a negácie. Excitačné spoje sú znázornené plným krúžkom, inhibičné prázdnym krúžkom. Pre Boolovej funkcie implikácie je použité vetvenie excitačnej aktivity na dva vstupy, to znamená, že táto excitačná aktivita je započítaná dvakrát v (4.4) pre výpočte výstupnej aktivity neurónu.

8.2 Neurónové siete

Každá Boolova funkcia (pozri kap. 1.3) je reprezentovaná pomocou syntaktického stromu, ktorý reprezentuje jej rekurentnú výstavbu inicializovanú Boolovými premennými a končiacu danou Boolovou funkciou (funkciou výrokovej logiky), pozri obrázok 8.3, diagram A. Syntaktický strom je dôležitý keď hľadáme podformuly danej formuly, každý uzol stromu špecifikuje podformulu: najnižšie položené uzly reprezentujú triviálne podformuly p a q, nasledujúce dva vrcholy reprezentujú podformuly $p \Rightarrow q$ a $p \wedge q$, najvyššie položený vrchol – koreň stromu – reprezentuje samotnú formulu $\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(p \wedge q\right)$.



Obrázok 8.3. (A) Syntaktický strom Boolovej funkcie (výrokovej formuly) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Koncové vrcholy stromu reprezentujú Boolove premenné (výrokové premenné) p a q, vrcholy z nasledujúcich vrstiev sú priradené spojkám implikácie a konjunkcie. Vyhodnocovanie tohto stromu prebieha postupne zdola nahor. (B) Neurónová sieť obsahujúca logické neuróny spojok, ktoré sa vyskytujú v príslušnom syntaktickom strome diagramu A. Vidíme, že medzi syntaktickým stromom a príslušnou neurónovou sieťou existuje veľmi tesná previazanosť, ich topológia je identická, odlišujú sa len vo vrcholoch. Obrazne môžeme povedať, že neurónovú sieť pre Boolovu funkciu φ zostrojíme pomocou jej syntaktického stromu tak, že vrcholy zo syntaktického stromu, ktoré reprezentujú logické spojky, nahradíme príslušnými logickými neurónmi, koreň syntaktického stromu je zamenený .

Pomocou syntaktického stromu ľahko zostrojíme neurónovú sieť tak, že jednotlivé vrcholy reprezentujúce Boolove elementárne funkcie (logické spojky) nahradíme príslušnými logickými neurónmi podľa obrázku 8.2. Na obrázku 8.3 je znázornená táto konštrukcia neurónovej siete pre formulu $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$. Tento postup konštrukcie neurónovej siete zosumarizujeme pomocou nasledujúcej vety.

Veta 8.1. Každá Boolova funkcia môže byť vyjadrená pomocou „neurónovej siete" zloženej z logických neurónov vyjadrujúcich logické spojky.

Táto veta patrí medzi základné výsledky slávnej práce McCullocha a Pittsa [5], kde bolo ukázané, že pomocou niekoľkých jednoduchých logických neurónov je možné zostrojiť neurónovú sieť, ktorá simuluje ľubovolnú Boolovu funkciu. Môžeme teda hovoriť o tom, že neurónové siete s logickými neurónmi majú univerzálny charakter v doméne Boolových funkcií, vyššie naznačený konštruktívny postup reprezentuje všeobecne platnú metódu pre zostrojenie neurónovej siete, ktorá simuluje Boolove funkcie.

Ako už bolo spomenuté v úvodnej časti tejto kapitoly bolo naznačené, že použitie techniky váhových koeficientov umožňuje formálne zjednodušiť teóriu logických neurónov, potom nie je potrebné a-priori odlišovať excitačné a inhibičné vstupy do neurónu. Aktivita i-teho neurónu v neurónovej sieti je vyjadrená zovšeobecnenou formulou

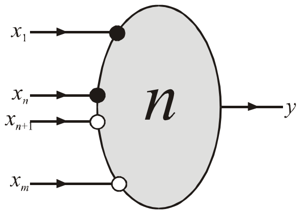
$$x_i = t\left(\sum_j w_{ij}x_j + \vartheta_i\right) \tag{8.5}$$

kde sumácia prebieha nad všetkými neurónmi, ktoré v neurónovej sieti predchádzajú i-ty neurón. Váhové koeficienty w_{ij} sú definované takto

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & (spoj\ j \to i\ má\ exitačný\ charakter) \\ -1 & (spoj\ j \to i\ má\ inhibičný\ charakter) \\ 0 & (spoj\ j \to i\ neexistuje) \end{cases} \tag{8.6}$$

To znamená, že v neurónovej sieti váhové koeficienty sú fixne a dané a sú určené topológiou syntaktického stromu špecifikujúceho Boolovu funkciu.

Architektúra neurónovej siete, ktorá je zostrojená pre danú Boolovu funkciu môže byť podstatne zjednodušená na tzv. 3-vrstvovú neurónovú sieť, t. j. obsahuje vrstvu vstupných neurónov (ktoré len kopírujú vstupné aktivity, nie sú výpočtovými jednotkami), vrstva skrytých neurónov a posledná vrstva obsahujúca výstupný neurón. Táto architektúra je minimalistická a už zrejme nemôže byť zjednodušená. Ukážeme ako zostrojiť takúto neurónovú sieť pre danú Boolovu funkciu.



Obrázok 8.4. Logický neurón, ktorý simuluje konjunktívnu klauzulu, ktorá obsahuje konjunkciu konečného prvku výrokových premenných alebo ich negácií, $y = x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge ... \wedge \neg x_m$.

Jednoduchým zovšeobecnením logických spojok možno ukázať, že logický neurón je schopný simulovať aj Boolovu funkciu, ktorá obsahuje konjunkcie premenných alebo ich negácií, $x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge ... \wedge \neg x_m$, pozri obrázok 8.4. Táto Boolova funkcia sa rovná 1 len pre $x_1 = ... = x_n = 1$ a $x_{n+1} = ... = x_m = 0$, vo všetkých ostatných pravdivostných kombináciách argumentov jej hodnota je 0 (nepravdivý výrok)

$$val_\tau\left(x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge \neg x_{n+1} \wedge ... \wedge \neg x_m\right) = \begin{cases} 1 & \left(pre\ \tau = \tau_0\right) \\ 0 & \left(pre\ \tau \neq \tau_0\right) \end{cases} \tag{8.7}$$

kde $\tau_0 = \left(x_1/1,...,x_n/1,x_{n+1}/0,...,x_m/0\right)$ je špecifikácia pravdivostných hodnôt premenných. Ľahko sa presvedčíme o tom, že táto klauzula je simulovaná logickým neurónom znázorneným na obr. 2.3. jeho výstupná aktivita je určená formulou

$$y = s\left(x_1 + ... + x_n - x_{n+1} - ... - x_m - n\right) \tag{8.8a}$$

Funkčná hodnota tejto funkcie sa rovná 1 vtedy, ak

$$x_1 + ... + x_n - x_{n+1} - ... - x_m \geq n \tag{8.8b}$$

Táto podmienka je dosiahnutá len vtedy, keď prvých *n* vstupných (excitačných) aktivít sa rovná 1 a ďalších (m-n) vstupných (inhibičných) aktivít sa rovná 0.

Tabuľka 8.2. Zadanie funkčných hodnôt Boolovej funkcie.

#	x_1	x_2	x_3	$y = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$	*klauzula*
1	0	0	0	0	-
2	0	0	1	0	-
3	0	1	0	1	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
4	0	1	1	1	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
5	1	0	0	0	-
6	1	0	1	1	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
7	1	1	0	0	-
8	1	1	1	0	-

V teórii Boolovych funkcií je dokázana dôležitá vlastnosť Boolových funkcií, podľa ktorej každá Boolova funkcia môže byť prepísaná do ekvivalentného disjunktívneho tvaru (pozri kap. 1.5)

$$\varphi = \bigvee_{\substack{\tau \\ (val_\tau(\varphi)=1)}} x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)} \tag{8.9a}$$

kde

$$x_i^{(\tau)} = \begin{cases} x_i & \left(\text{ak } val_\tau\left(x_i\right) = 1\right) \\ \neg x_i & \left(\text{ak } val_\tau\left(x_i\right) = 0\right) \end{cases} \tag{8.9b}$$

Ako ilustračný príklad použitia tejto vlastnosti, študujme Boolovu funkciu, ktorej funkčné hodnoty sú zadané tabuľkou 8.2. V tejto tabuľke v riadkoch 3, 4 a 6 sú jednotkové funkčné hodnoty (Boolova funkcia je pre tieto tri hodnoty premenných pravdivá), v poslednom stĺpci sú uvedené v týchto riadkoch aj príslušné klauzuly zostrojene pomocou (8.9b). Použitím (8.9a) dostanmeme „analytický“ tvar Boolovej funkcie určenej len tabuľkou jej funkčných hodnôt

$$y = f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3\right) \vee \left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right) \tag{8.10}$$

Táto Boolova funkcia môže byť zjednodušená tak, že prvá a druhá klauzula sa zjednodušia

$$\left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3\right) \vee \left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right) = \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \underbrace{\left(\overline{x}_3 \vee x_3\right)}_{1} = \overline{x}_1 \wedge x_2 \tag{8.11}$$

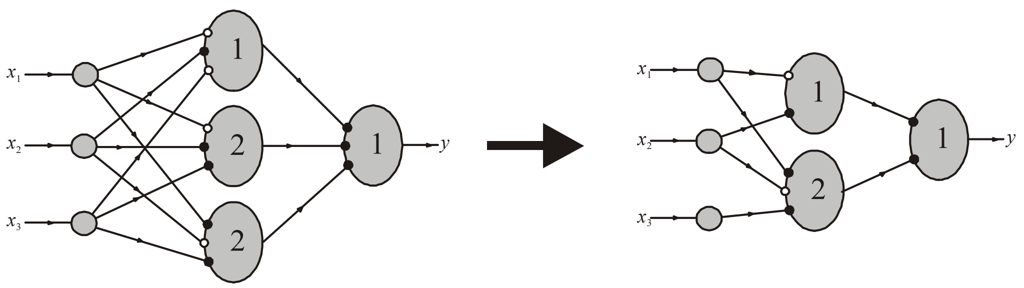
Potom

$$y = f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\overline{x}_1 \wedge x_2\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right) \tag{8.12}$$

Klauzule $x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge \ldots \wedge x_n^{(\tau)}$ môžeme vyjadriť jedným logickým neurónom, pozri obr. 8.4. Výstupy z týchto neurónov spojíme do disjunkcie pomocou neurónu reprezentujúceho disjunkciu (pozri obr. 8.2). Potom neurónová sieť, reprezentujúca Boolovu funkciu (2.10) má tvar znázornený na obr. 8.5.

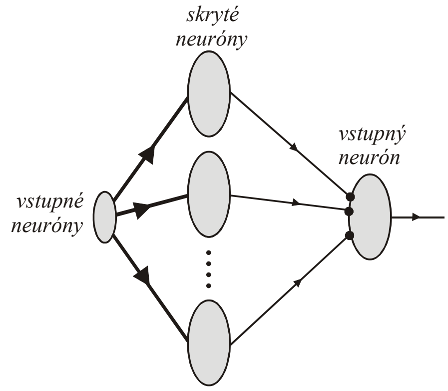
Výsledky z tohto ilustračného príkladu sú zosumarizované pomocou tejto vety.

Veta. 8.2. *Ľubovoľná Boolova funkcia f je simulovaná pomocou 3-vrstvovej neurónovej siete.*



Obrázok 8.5. Trojvrstvová neurónová sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu zadanou primárne Tab. 8.2, z ktorej je zostrojený pomocou formule (8.9) ja „analytický“ tvar (8.10). Skryté neuróny reprezentujú jednotlivé klauzuly z Tab. 8.2, ich disjunkcia je realizovaná pomocou výstupného neurónu.. Táto neurónová sieť môže byť zjednodušená tak, že prvé dve klauzule sa spoja do jednej jednoduchšej klauzule, pozri (8.7-7).

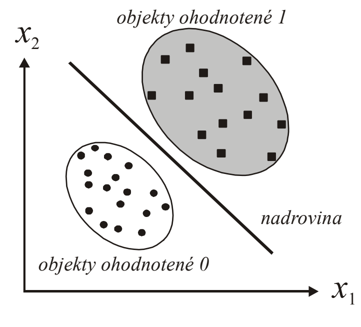
Všeobecný tvar 3-vrstvovej neurónovej siete ja znázornený na obr. 8.6.



Obrázok 8.6. Schématické znázornenie 3-vrstvovej neurónovej siete. Idúc zľava doprava, prvá je vstupná vrstva obsahujúca vstupné neuróny, ktoré nie sú výpočtové elementy, ale len formálne reprezentujú vstupné aktivity. Druhá vrstva obsahuje skryté neuróny, ktoré reprezentujú jednotlivé klauzule danej Boolovej funkcie. Tretia (posledná) vrstva obsahuje výstupný neurón, ktorý vykonáva disjunkciu aktivít zo skrytých neurónov.

Poznamenajme, že podľa vety 8.2 3-vrstvové neurónové siete obsahujúce logické neuróny sú *univerzálne výpočtové zariadenia* pre doménu Boolových funkcií. Tento výsledok predznačil moderný výsledok neurónových sietí z prelomu 80. a 90. rokov minulého storočia, podľa ktorého trojvrstvové dopredné neurónové siete so spojitou aktivačnou funkciou (1.1) majú vlastnosť univerzálneho aproximátora. Navyše, pretože dôkaz vety bol konštruktívny, poznáme jednoduchý postup, ako túto sieť systematickým spôsobom zostrojiť pre ľubovoľnú Boolovu funkciu.

Môžeme si položiť otázku, aké Boolove funkcie je schopný logický neurón vyjadriť [6]? Táto otázka sa dá pomerne jednoducho vyriešiť pomocou geometrickej interpretácie výpočtu prebiehajúceho v logickom neuróne. Výpočtová funkcia logického neurónu rozdeľuje priestor vstupov na dva polpriestory pomocou roviny $w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n = \vartheta$, pre koeficienty $w_i=0,\pm 1$. Hovoríme, že Boolova funkcia $f(x_1, x_2,..., x_n)$ je *lineárne separovateľná*, ak existuje taká rovina $w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n = \vartheta$, ktorá separuje priestor vstupných aktivít tak, že v jednej časti priestoru sú vrcholy ohodnotené 0, zatiaľ čo v druhej časti priestoru sú vrcholy ohodnotené 1 (pozri obr. 2.6).



Obrázok 8.8. Schematické znázornenie pojmu lineárnej separovateľnosti, kde okrúhle a štvorcové objekty sú separované nadrovinou $w_1x_1+...+w_nx_n-\vartheta = 0$ tak, že v jednom polopriestore sú objekty jedného druhu, zatiaľ čo v druhom polopriestore sú objekty druhého druhu.

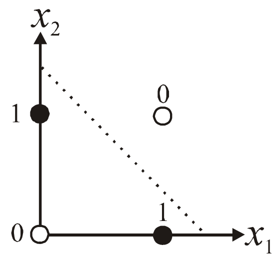
Veta 8.3. *Logický neurón je schopný simulovať len tie Boolove funkcie, ktoré sú lineárne* *separovateľné.*

Klasický príklad Boolovej funkcie, ktorá nie je lineárne separovateľná, je výroková spojka exkluzívna disjunkcia, ktorá je formálne definovaná ako negácia ekvivalencie $(x \oplus y) \Leftrightarrow \neg(x \equiv y)$, v informatickej literatúre sa obvykle označuje ako Boolova funkcia *XOR*, $\varphi_{XOR}(x,y) = x \oplus y$, jej funkčné hodnoty sú uvedené v tab. 8.3.

Tabuľka 8.3. Boolova funkcia XOR

#	x	y	$\varphi_{XOR}(x,y)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

Ak si jej funkčné hodnoty vynesieme do stavového priestoru *x* - *y* dostaneme obr. 2.7, z ktorého jasne vyplýva, že táto funkcia nie je lineárne separovateľná.

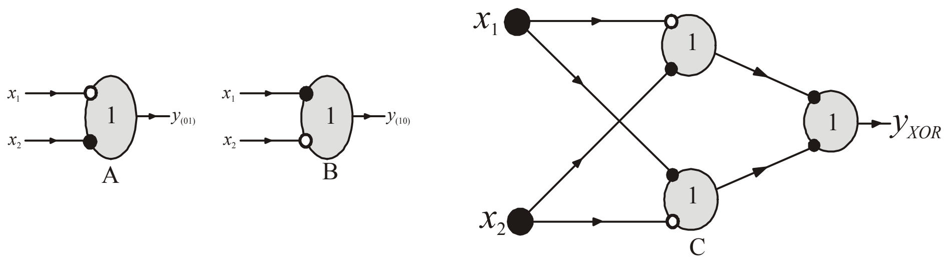


Obrázok 8.8. Znázornenie objektov Boolovej funkcie *XOR* v stavovom priestore jej argumentov. Z obrázku jasne plynie, že neexistuje priamka, ktorá by separovala celú rovinu na dve polroviny tak, že objekty (otvorené krúžky) s ohodnotením 0 budú v jednej polrovine, zatiaľ čo objekty s ohodnotením 1 (čierne krúžky) budú v druhej polrovine.

Použitím trechniky z predchádzajúcej časti tejto kapitoly, zostrojíme neurónovú sieť, ktorá simuluje túto elementárnu lineárne neseparovateľnú Boolovu funkciu. Pomocou Tab. 8.3. zostrojíme jej ekvivaletnú funkciu pomocou klauzúl

$$\varphi_{XOR}(x_1,x_2) = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \tag{8.13}$$

Potom neurónová sieť zostrojená pomocou tejto fukcie má tvar znázornený na obr. 8.9.

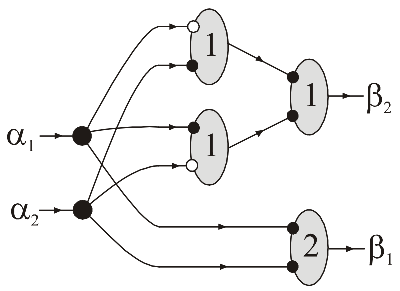


Obrázok 8.9. Diagramy A a B znázorňujú jednotlivé klauzuly z formuly (8.13). Diagram C reprezentuje 3-vrstvovú neurónovú sieť, ktorá ako skryté neuróny obsahuje neuróny z diagramu A a B, výstupný neurón reprezentuje disjunkciu výstupných aktivít zo skrytých neurónov.

Príklad 8.1. Zostrojme neurónovú sieť, ktorá simuluje sčítanie dvoch binárnych číslic:

$$\begin{array}{r}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \hline \beta_1\beta_2\end{array}$$

kde jednotlivé binárne premenné výsledku – sumy sú určené takto: $\beta_2 = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ a $\beta_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$. Druhú výstupnú premennú β_2 prepíšeme do disjunktívnej formy $\beta_2 = (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$, príslušná neurónová sieť je znázornená na obrázku 8.10.



Obrázok 8.10. Neurónová sieť vykonávajúca súčet dvoch binárnych číslic.

V predchádzajúcej časti tejto kapitoly bolo ukázané, že samotné logické neuróny sú schopné korektne klasifikovať len lineárne separovateľné Boolove funkcie. Toto podstatné obmedzenie logických neurónov môže byť odstránené pomocou logických neurónov vyšších rádov [6], ktorých aktivita je určená zovšeobecnením formuly (2.3) o členy vyšších rádov

$$y = s\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n} w_{ij} x_i x_j + \ldots + \vartheta}_{\xi}\right) \tag{8.14}$$

Ak vnútorný potenciál neurónu ξ je určený len ako lineárna kombinácia vstupných aktivít (t.j. len prvou sumou), potom logický neurón je štandardný a nazýva sa "*logický neurón prvého rádu*". Ak tento potenciál neurónu ξ obsahuje aj kvadratické a prípadne aj ďalšie členy, potom sa nazýva "*logický neurón vyššieho rádu*". Podľa Minského a Paperta [6] platí nasledujúca veta, ktorá hovorí o tom, že perceptróny vyššieho rádu sú schopné simulovať aj množiny objektov, ktoré nie sú lineárne separovateľné.

Veta 8.4. Ľubovolná Boolova funkcia *f* je simulovaná logickým neurónom vyššieho rádu.

Táto veta hovorí o tom, že každá Boolova funkcia môže byť simulovaná logickým neurónom vyššieho rádu, existujú také váhové koeficienty a prah, že pre každú špecifikáciu premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vypočítaná binárna aktivita sa rovná požadovanej hodnote.

Príklad 8.2. Ako ilustračný príklad vety študujme Boolovu funkciu *XOR*, ktorá nie je lineárne separovateľná a ktorej funkčné hodnoty sú uvedené v tabuľke 4.1. Nech aktivita logického neurónu je určená pomocou kvadratického potenciálu (čiže sa jedná o logicky neurón druhého rádu)

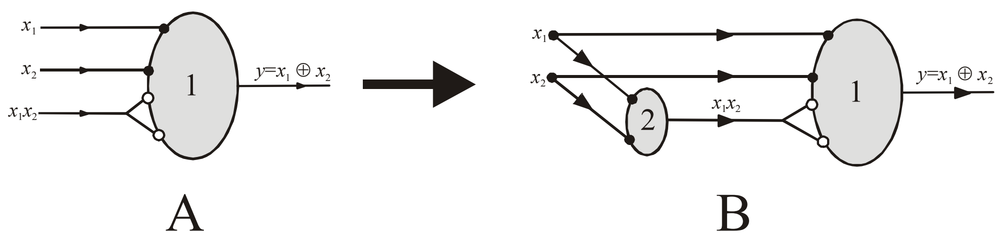
$$y = s\left(\underbrace{w_1x_1 + w_2x_2 + w_{12}x_1x_2}_{\xi} - \vartheta\right) \tag{8.15}$$

Pre jednotlivé riadky tabuľky 2.3 funkcie *XOR* platí

$$\begin{aligned} -\vartheta &< 0 \\ w_2 \quad -\vartheta &\geq 0 \\ w_1 \quad\quad -\vartheta &\geq 0 \\ w_1 + w_2 + w_{12} - \vartheta &< 0 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Postupným riešením týchto nerovníc dostaneme, že váhové koeficienty a prah majú napr. takéto riešenie

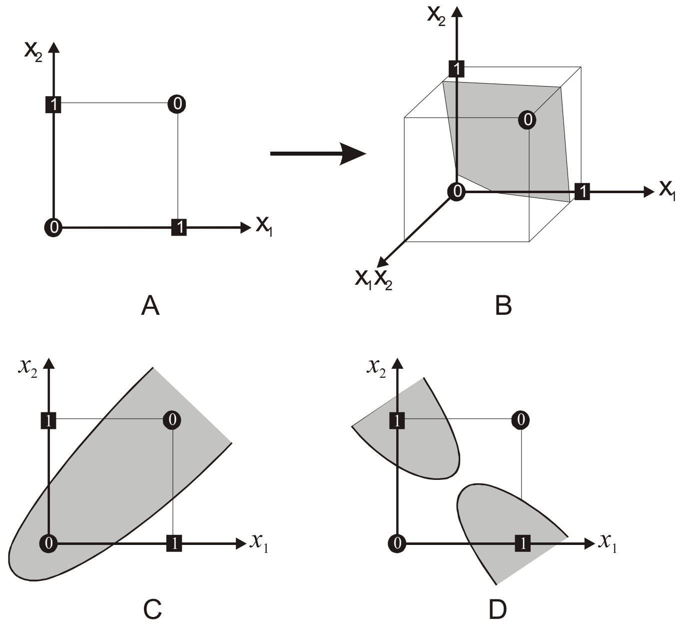
$$\vartheta = 1,\, w_1 = w_2 = 1,\, w_{12} = -2 \tag{8.17}$$



Obrázok 8.8. (A) Znázornenie logického neurónu druhého rádu simulujúceho funkciu *XOR*, kde excitačné vstupné aktivity sú binárne premenné x_1 a x_2, inhibičná aktivita je priradená premennej druhého rádu x_1x_2. Výstupná aktivita z je určená pomocou krokovej funkcie, $z = s(x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 1)$, priamou verifikáciou sa presvedčíme, že simuluje funkciu *XOR*. Na záver poznamenajme, že "vidlička" inhibičného vstupu znamená, že vstupná aktivita je počítaná dvakrát. (C) Transformácia logického neurónu druhého rádu, ktorý implementuje spojku XOR (diagram A), na neurónovú sieť, ktorá obsahuje len logické neuróny prvého rádu (digram B). Táto transformácia je založená na výpočte súčinu x_1x_2 pomocou logického neurónu pre spojku konjunkcie, výstup z tohto neurónu je potom dvojnásobný inhibičný vstup do pravého neurónu. Táto architektúra je asi najjednoduchšou neurónovou sieťou, ktorá implementuje spojku XOR pomocou logických neurónov prvého rádu (porovnaj s obr. 8.9).

V tomto ilustračnom príklade bolo ukázané, že lineárne neseparovateľná binárna spojka disjunkcie s vylúčeným (XOR) je implementovateľná pomocou logického neurónu, ktorý má tri vstupy pre x_1, x_2 a x_1x_2. V tejto súvislosti sa vynára otázka výpočtu súčinu x_1x_2, ktorý však môže byť jednoducho vykonaný pomocou spojky konjunkcie, $x_1x_2 = x_1 \wedge x_2$. Ak táto operácia bude uskutočnená pomocou logického neurónu pre konjunkciu (pozri obr. 8.7, diagram B), potom môžeme vytvoriť jednoduchú sieť obsahujúcu len dva neuróny, pričom na vstupe máme len vstupné aktivity x_1 a x_2.

Výsledky tohto príkladu 8.2 ukázujú, že logický neurón druhého rádu je schopný korektne klasifikovať Boolovu funkcia *XOR*, ktorá je lineárne neseparovateľná v 2-rozmernom fázovom priestore x_1-x_2, ale je už lineárne separovateľná v 3-rozmernom fázovom priestore x_1-x_2- x_1x_2 , pozri obr. 8.8.



Obrázok 8.8. Diagramatická reprezentácia Boolovej funkcie *XOR*. (A) Ak je funkcia *XOR* reprezentovaná v 2-rozmernom stavovom priestore x_1-x_2, objekty s jednotkovou klasifikáciou nie sú lineárne separovateľné od objektov s nulovou klasifikáciou. (B) Ak znázorníme *XOR* funkciu v 3-rozmernom fázovom priestore x_1-x_2-x_1x_2 , potom existuje v tomto priestore nadrovina, ktorá navzájom separuje objekty s rôznou klasifikáciou. Priemet tejto nadroviny do roviny poskytuje kvadratickú čiaru, ktorá separuje objekty, pozri diagramy C a D.

Pojem lineárnej separovateľnosti Boolových funkcií je ľahko zovšeobecniteľný na kvadratickú (kubickú,…) separovateľnosť pomocou kvadratickej (kubickej,…) nadplochy.

Definícia 8.1. Boolova funkcia f sa nazýva *kvadraticky separovateľná*, ak existujú také váhové koeficienty w_i, w_{ij} a prahový faktor ϑ, že pre každú špecifikáciu premenných $x_1,x_2,...,x_n$ platí

$$\begin{aligned} y_{req}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=1 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n} w_{ij}x_i x_j \geq \vartheta \\ y_{req}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n} w_{ij}x_i x_j < \vartheta \end{aligned} \tag{8.18}$$

8.3 Konštrukcia binárnych obvodov

Logické neuróny môžu byť použité na konštrukciu jednoduchých binárnych obvodov [4,7], ich kombináciou môžeme zostrojiť už zložité zariadenia, akými sú napr. rôzne sčítačky, násobičky a podobne.

8.3.1 Časový posunovač

Časový posunovač je taký binárny obvod, ktorý posunie tok signálu o niekoľko vopred zvolených jednotiek. Študujme jednoduchý obvod znázornený na obr. 2.7, diagram A, ktorý realizuje posun o jednotku (jednotkový posunovač). Aktivitu neurónu v čase t môžeme vyjadriť takto

$$y^{(t)} = t\left(x^{(t-1)} - 1\right) \tag{8.19}$$

Vstupný signál v čase t sa transformuje na výstupný signál v čase t+1

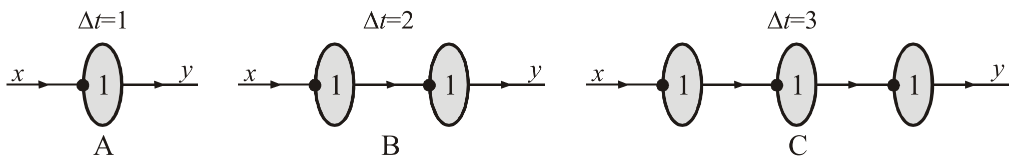
$$\begin{aligned} x^{(t)} &= 0 \Rightarrow y^{(t+1)} = t\left(-1\right) = 0 \\ x^{(t)} &= 1 \Rightarrow y^{(t+1)} = t\left(0\right) = 1 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Nech sekvencie (dĺžky 10) vstupných signálov má tvar (00700071), potom výstupný symbol má tvar sekvencie (dĺžky 7) (#00700071), kde prvý znak # je prázdny znak, pretože v počiatočnom čase t = 1 nevieme špecifikovať výstupný signál, pozri Tab. 8.4

Tabuľka 8.4. Vstupná a výstupná sekvencia pre jednotkový časový posunovač

čas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7	7
vstup x	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	..	..
výstup y	#	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	..

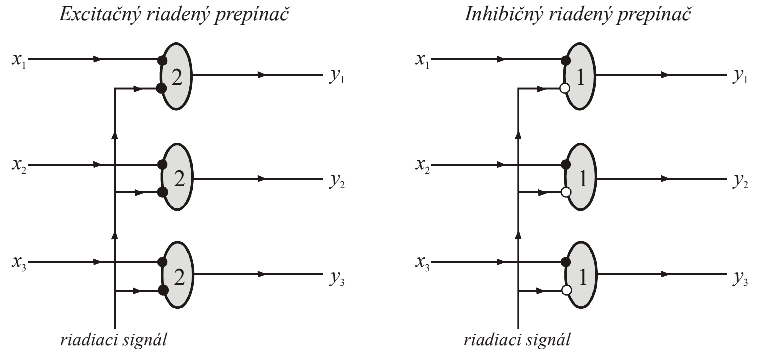
Sériovým zapojením jednotkových posunovačov dostaneme posunovače o dve, tri, .. časové jednotky, pozri diagramy B a C na obr. 8.8.



Obrázok 8.8. Neurónové siete realizujúce posun vstupného signálu o 1, 2 a 3 jednotky.

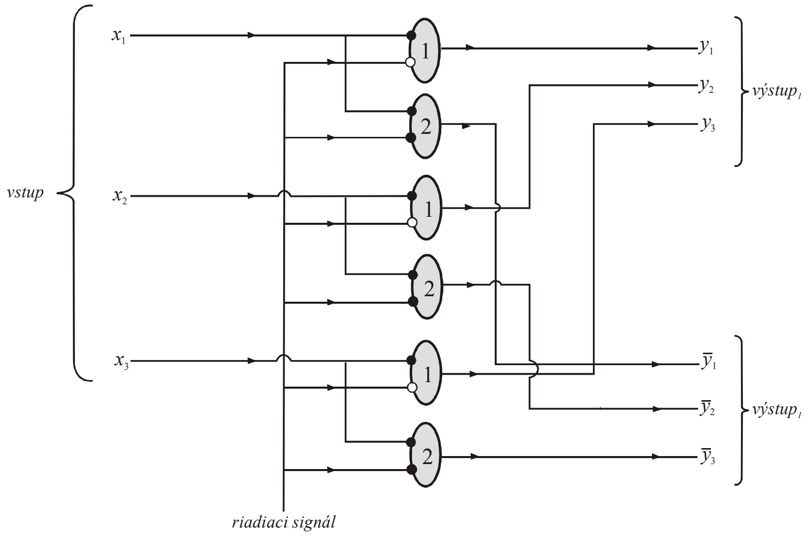
8.3.2 Riadený prepínač

Riadený prepínač pomocou riadiaceho signálu zapína alebo vypína tok signálu. Tak ak v excitačnom riadenom prepínači je riadiaci signál jednotkový, potom prepínač prepúšťa signál na výstup prepínača. V alternatívnom prípade, pre inhibične riadený prepínač, nulový riadiaci signál spôsobuje prenos signálu na výstup. Tieto dva prepínače sú znázornené na obr. 8.9.



Obrázok 8.9. Znázornenie neurónových sietí, ktoré sú excitačný resp. inhibičný riadiaci prepínač.

Kombináciou excitačného a inhibičného prepínača zostrojíme riadené rozdvojovacie zariadenie, pozri obr. 8.10.



Obrázok 8.10. Neurónová sieť riadeného rozdvojovacieho zariadenia. Ak riadiaci signál je jednotkový (nulový), potom vstup je riadený na 1. výstup (2.výstup). Obrazne môžeme povedať, že riadiaci signál pôsobí ako „prepínač“ do 1. alebo 2. polohy.

8.3.3 Sumátor dvoch binárnych čísel

Sumátor binárnych čísel rieši úlohu sčítania dvoch binárnych čísel – reťazcov rovnakej dĺžky

$$\begin{array}{r} 110011 \\ 101010 \\ \hline 1011101 \end{array}$$

Realizácia tohto problému sa môže uskutočniť úplne analogický procesu sčítania dvoch dekadických čísel, t. j. musíme používať techniku prenosu „zostatku“ (angl. *carry*) do nasledujúcej polohy. Tento princíp si vysvetlíme na všeobecnom príklade

$$\begin{array}{r} \alpha_n ... \alpha_2 \alpha_1 \\ \beta_n ... \beta_2 \beta_1 \\ \hline \gamma_{n+1} \gamma_n \cdots \gamma_2 \gamma_1 \end{array} \tag{8.21}$$

sčítania dvoch binárnych čísel $\alpha_n ... \alpha_2 \alpha_1$ a $\beta_n ... \beta_2 \beta_1$ dĺžky n. Zostatok δ_i je rekurentne definovaný takto:

$$\delta_1 = 0 \tag{8.22a}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 1 & (ak\ \alpha_1 + \beta_1 = 2) \\ 0 & (ináč) \end{cases} \tag{8.22b}$$

$$\delta_{i+1} = \begin{cases} 1 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i \geq 2) \\ 0 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i \leq 1) \end{cases} \quad (i = 2, 3, ..., n) \tag{8.22c}$$

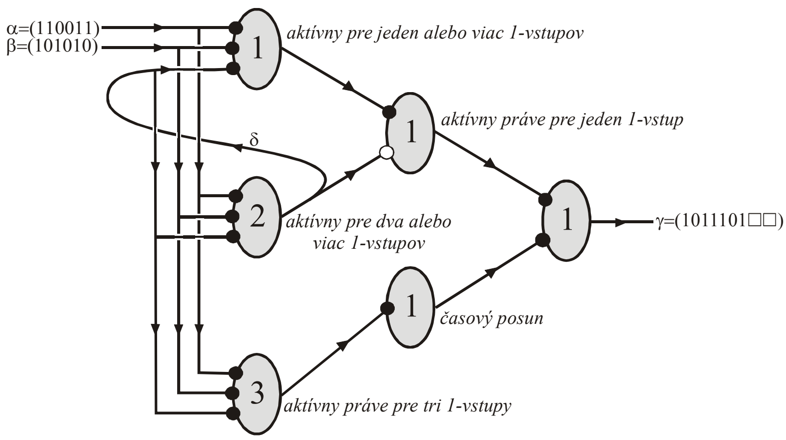
kde (8.22a-b) je inicializácia postupného výpočtu zostatkov. Pre ilustračný príklad zo začiatku tejto podkapitoly zostatky sú špecifikované binárnym reťazcom dĺžky 7 tvaru $\delta = 1000100$. Schému (8.21) prepíšeme do nového tvaru

$$\begin{array}{r} \alpha_n ... \alpha_2 \alpha_1 \\ \beta_n ... \beta_2 \beta_1 \\ \delta_{n+1} \delta_n ... \delta_2 \delta_1 \\ \hline \gamma_{n+1} \gamma_n \cdots \gamma_2 \gamma_1 \end{array} \tag{8.23}$$

Potom výsledok $\gamma = \gamma_{n+1} ... \gamma_2 \gamma_1$ je určený vzťahmi

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i = 1 \vee 3) \\ 0 & (ak\ \alpha_i + \beta_i + \delta_i = 0 \vee 2) \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., \text{n}) \tag{8.24a}$$

$$\gamma_{n+1} = \delta_{n+1} \tag{8.24b}$$



Obrázok 8.11. Neurónová sieť sumátora dvoch binárnych čísel, ktorá obsahuje šesť prahových neurónov.

Príklad zo začiatku tejto podkapitoly môže byť prepísaný do tvaru

$$
\begin{array}{r}
110011 \\
101010 \\
1000100 \\
\hline
1011101
\end{array}
$$

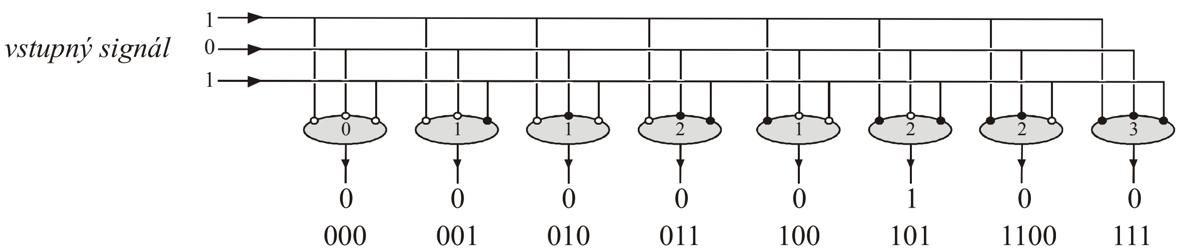
kde výsledný reťazec bol určený formulami (2.32). Jednotlivé kroky z tohto príkladu sú rozpísané takto:

$$
\begin{array}{lll}
0. & \text{krok.} & \qquad\qquad \delta_1 = 0 \\
1. & \text{krok.} & \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \delta_2 = 0, \boxed{\gamma_1 = 1} \\
2. & \text{krok.} & \alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \delta_3 = 1, \boxed{\gamma_2 = 0} \\
3. & \text{krok.} & \alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \delta_4 = 0, \boxed{\gamma_3 = 1} \\
4. & \text{krok.} & \alpha_4 = 0, \beta_4 = 1, \delta_5 = 0, \boxed{\gamma_4 = 1} \\
5. & \text{krok.} & \alpha_5 = 1, \beta_5 = 0, \delta_6 = 0, \boxed{\gamma_5 = 1} \\
6. & \text{krok.} & \alpha_6 = 1, \beta_6 = 1, \delta_7 = 1, \boxed{\gamma_6 = 0} \\
7. & \text{krok.} & \alpha_7 = 0, \beta_7 = 0, \qquad\quad \boxed{\gamma_7 = 1}
\end{array}
$$

Implementácia sumátora je znázornená na obr. 8.11.

8.3.4 Binárny paralelný dekodér

Budeme študovať paraleny dekodér pre tri binárne číslice. Predpokladáme, že informácia do dekodéra prichádza prostredníctvom impulzov cez tri paralelne vlákna, pozri obr. 8.12. Dekóder obsahuje osem nezávislých elementov – neurónov, z ktorých každý dekóduje jednu možnú binárnu kombináciu prichádzajúcich signálov.



Obrázok 8.12. Binárny paralelný dekodér, ktorý obsahuje osem prahových neurónov, ktoré dekódujú separátne vstupný signál od kombinácie 000 až po kombináciu 111.

8.4 Záver

Neurónové siete zložené z logických neurónov sú univerzálnym aproximátorom Boolových funkcií (t. j. každá Boolova funkcia môže byť ňou reprezentovaná). Podstatným ohraničením logických neurónov je, že klasifikujú len Boolove funkcie, ktoré sú lineárne separovateľné.

Bolo ukázané prave McCullochom a Pittsom, že toto ohraničenie logického neurónu je prekonané neurónovými sieťami. Druhá alternatívna možnosť, ako prekonať toto ohraničenie lineárnej separovateľnosti, sú logické neuróny vyššieho rádu, ktoré navrhli Minski a Pappert [6]. Tieto vlastnosti logického neurónu môžeme sumarizovať tak, že tieto sú univerzálnym výpočtovým zariadením v doméne Boolových fukcií,

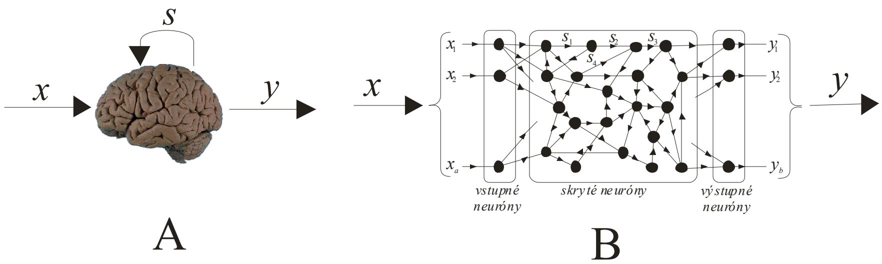
Ďalší, nemenej zaujímavý aspekt neurónových sietí obsahujúcich logické neuróny je skutočnosť, že poskytujú informatický a výpočtový pohľad na vzťah medzi mysľou a mozgom (známy filozofický problém „myseľ – telo" alebo "duša –telo" problém, ktorý vo filozofii patrí medzi centrálne problémy). Práve, moderná neuroveda, prostredníctvom neurónových sietí (v najjednoduchšom priblížení vyjadrených pomocou logických neurónov) ponúka vedecké riešenie tohto problému:

Neurovedný pohľad umelej inteligencie a kognitívnej vedy na komplex mozog–myseľ je založený na predpoklade, že mozog je mohutný paralelný počítač, ktorý transformuje vstupné údaje $\boldsymbol{x}$ (produkované zrakom, sluchom, čuchom a pod.) na motorické impulzy $\boldsymbol{y}$ (pričom táto transformácia je závislá od vnútorného stavu $\boldsymbol{s}$ (pozri obr. 8.8, diagram A). Táto neurovedná interpretácia mozgu na mikroskopickej (neurálnej) úrovni neumožňuje priame štúdium vyšších kognitívnych aktivít (riešenie problémov, porozumenie ľudskej reči, a pod.). Nechcem týmto povedať, že je to principiálne nemožné, je to možné, ale je to veľmi ťažkopádne a komplikované. Je to podobné tomu, ako keby sme chceli študovať makroskopickú vlastnosť vody "*povrchové napätie*" metódami kvantovej mechaniky. Samozrejme, že túto veličinu môžeme študovať aj takto na "mikroskopickej" úrovni, ale je to tak numericky ako aj teoreticky veľmi náročné. Podstatne jednoduchší je fenomenologický prístup založený na makroskopickej termodynamike, kde dostaneme pre túto veličinu pomerne jednoduchú formulu obsahujúcu jednoduché experimentálne verifikovateľné údaje. Podobná situácia existuje aj v teórii mozgu-mysle. Neurálny prístup je vhodný na štúdium elementárnych kognitívnych aktivít (napr. prvotné spracovanie vizuálnej informácie zo sietnice oka). Vyššie kognitívne aktivity mozgu sú študované na symbolickej úrovni, založeného na predstave, *že ľudský mozog je počítač,* ktorý pracuje podľa týchto princípov (ktoré tvoria základ tzv. *symbolickej paradigmy*), ktorý

(1) transformuje symboly pomocou syntaktických pravidiel na iné symboly, pričom

(2) myšlienky sú symbolické reprezentácie implementované pomocou jazyka myslenia, a

(3) mentálne procesy sú kauzálne sekvencie symbolov generované syntaktickými pravidlami.



Obrázok 8.8. (A) Kybernetická interpretácia mozgu ako „zariadenia“, ktoré transformuje vstup $\boldsymbol{x}$ na výstup $\boldsymbol{y}$, pričom táto transformácia je ovplyvnená vnútorným stavom $\boldsymbol{s}$. Touto špecifikáciou mozgu môžeme dostať dve rôzne odozvy $\boldsymbol{y}_1$ a $\boldsymbol{y}_2$ na rovnaký vstup $\boldsymbol{x}$. (B) Konekcionistický (neurálny) model mozgu pomocou neurónovej siete, ktorá obsahuje (1) vstupné neuróny (napr. percepčné neuróny retiny oka), (2) skryté neuróny, na ktorých prebieha transformácia vstupu na výstup a (3) výstupné neuróny (napr. neuróny riadiace motorické aktivity). Aktivity skrytých neurónov tvoria vnútorný stav neurónovej siete, rôzne počiatočné nastavenie týchto aktivít zapríčiňuje rôznu odozvu na rovnaké vstupné aktivity $\boldsymbol{x}$.

Použitie termínu „počítač“ obvykle evokuje predstavu sekvenčného počítača von neumannovskej architektúry (napr. personálne počítače majú túto architektúru), kde je možné striktne oddeliť hardware od software; kde na tom istom počítači – hardware môže byť vykonávaných nepreberné množstvo rozdielnych programov – softwarov. Pre tieto von neumannovské počítače existuje striktná dichotómia medzi počítačom a programom – t. j. medzi hardwarom a softwarom. Žiaľ, paradigma mysle ako počítača implikuje u mnohých ľudí predstavu, že je možné oddeliť mozog od mysle, ako dva „nezávislé“ fenomény, kde mozog hrá úlohu hardwaru, zatiaľ čo myseľ je software (vykonávaný na hardwaru – mozgu).

Obráťme našu pozornosť na moderný neurovedný prístup k chápaniu vzťahu medzi mozgom a mysľou [12], ktorý je založený na neurovednom chápaní mozgu ako mohutnej neurónjovej siete, ktorá obsahuje približne 1 miliardu neurónov, pričom tieto neuróny sú masívne pospájané s inými neurónmi (približne jeden neurón ma 1000 jednosmerných synaptických spojov - konexií s inými neurónmi), Mozog môže byť teda chápaný ako mohutný paralelný počítač, ktorého výpočtové jednotky sú neurónmi s extrémne jednoduchou výpočtovou prahovou aktivitou (verbálne vyjadrenou vetou - víťaz berie všetko). Možno konštatovať, *že schopnosť mozgu vykonávať nielen kognitívne aktivity, ale byť aj pamäťou, je plne zakódovaná do jeho architektúry*.

Na základe týchto neurovedných poznatkov bazálneho charakteru môžeme konštatovať, že počítačová paradigma ľudského mozgu sa musí formulovať tak, že mozog je paralelne distribuovaný počítač (obsahujúci obrovské množstvo neurónov, elementárnych procesorov, ktoré sú medzi sebou poprepájané do zložitej neurónovej siete). Program v tomto paralelnom počítači je priamo zabudovaný do architektúry neurónovej siete, t. j. *ľudský mozog je jednoúčelový paralelný počítač reprezentovaný neurónovou sieťou*, ktorý nie je možné preprogramovať bez zmeny jeho architektúry. Z týchto všeobecných úvah vyplýva, že myseľ s mozgom tvoria jeden integrálny celok; myseľ v tomto prístupe sa chápe ako program vykonávaný mozgom, avšak tento program je špecifikovaný architektúrou distribuovanej neurónovej siete reprezentujúcej mozog. Mozog a myseľ tvoria dva rôzne pohľady na ten istý objektu:

(1) Keď hovoríme o mozgu, myslíme tým „hardwarovú“ štruktúru, biologicky realizovanú neurónmi a ich synaptickými spojmi (formálne reprezentovanú neurónovou sieťou), v opačnom prípade,

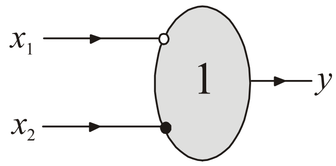
(2) keď hovoríme o mysli, myslíme tým kognitívne a iné aktivity mozgu, realizované výpočtami neurónovej siete reprezentujúcej mozog.

Na záver tejto kapitoly poznamenajme, že logické neuróny McCullocha a Pittsa majú v informatike, umelej inteligencii a kognitívnej vede mimoriadne postavenie, sú nielen univerzálnym aproximátorom v doméne Boolovych funkcií (umožňujú realizovať jednoduchú syntézu elektronických zariadení pre realizáciu štandardných binárnych operácií, ktoré sa opakované mnohokrát vyskytujú pri návrhu počítačov, čoho si prvý všimol von Neumann [10,11]), ale majú význam až "filozofický", tvoria prirodzenú teóriu pre interpretáciu mozgu ako paralelného výpočtového zariadenia a riešenia problému vzťahu medzi mysľou a mozgom.

Cvičenia

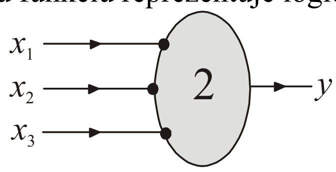
Cvičenie 8.1. Dokážte, že logické neuróny znázornené na obr. 8.2 simulujú uvedené Boolove funkcie.

Cvičenie 8.2. Zistite akú výrokovú spojku (Boolovu funkciu) reprezentuje logický neurón

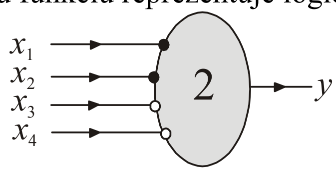


Cvičenie 8.3 Zostrojte neurónovú sieť ekvivalencie pomocou jej disjunktívnej normálnej formy, $(p \equiv q)_{NDF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

Cvičenie 8.4. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.5. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.6. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu troch binárnych číslic

$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \hline \beta_1 \beta_2 \end{array}$$

Cvičenie 8.8. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu $\varphi(p,q,r) = (p \equiv q) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

Cvičenie 1.8. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu špecifikovanú tabuľkou

#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1

6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

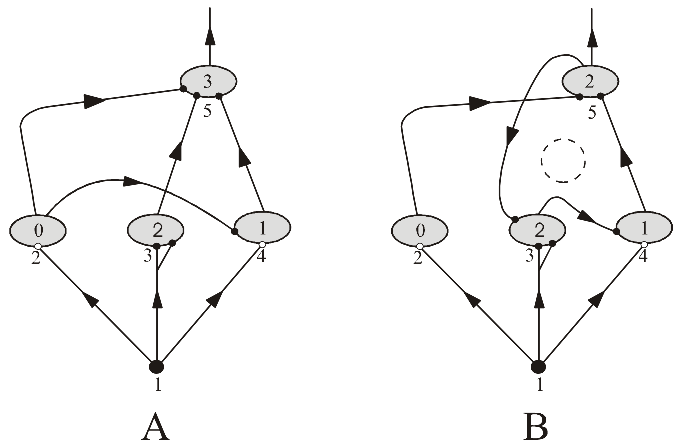
Cvičenie 8.9. Zostrojte tabuľku všetkých možných binaárnych Boolovych funkcií tvaru $y = f(x_1, x_2)$ a zistite ktoré z nich sú lineárne separovateľné a ktoré nie sú lineárne separovateľné.

Cvičenie 8.10. Nech Boolova funkcia je špecifikovaná tabuľkou

#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Zostrojte neurón tretieho rádu, ktorý simuluje túto Boolovu funkciu.

Cvičenie 8.8. Pre časové elementy $1 \le t \le 10$ zostrojte tabuľku aktivít jednotlivých neurónov znázornených na obrázku, pričom v čase $t = 1$ aktivity sú zadané takto: $x^{(1)} = (1, 0, 0, 1)$.

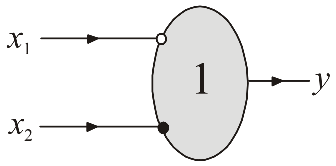


Cvičenie 8.18. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu a súčinu troch binárnych číslic

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \times \alpha_3 = \beta_1 \beta_2$$

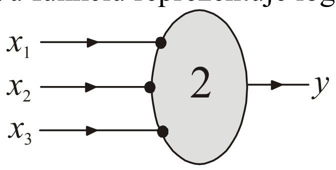
Cvičenie 8.18. Dokážte, že logické neuróny znázornené na obr. 8.10 simulujú uvedené Boolove funkcie.

Cvičenie 8.19. Zistite akú výrokovú spojku (Boolovu funkciu) reprezentuje logický neurón

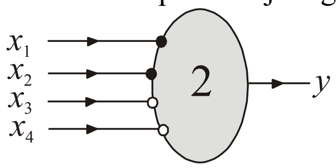


Cvičenie 8.20 Zostrojte neurónovú sieť ekvivalencie pomocou jej disjunktívnej normálnej formy, $(p \equiv q)_{NDF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

Cvičenie 8.21. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.22. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Úloha 8.23. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu troch binárnych číslic

$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \underline{\quad \alpha_3} \\ \beta_1 \beta_2 \end{array}$$

Literatúra

[1] Kleene, S. C.: Representation of events in nerve nets and finite automata. In Shannon, C. E., McCarthy, J. (eds.): *Automata Studies. Annals of Mathematics Studies*, Vol 34. Princeton University Press, Princeton, 1956, pp. 3-41.

[2] Kvasnička, V., Beňušková, Ľ., Pospíchal, J., Farkaš, I., Tiňo, P., Kráľ, A.: *Úvod do teórie neurónových sietí*. IRIS, Bratislava, 1997).

[3] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: Konekcionizmus a modelovanie kognitívnych procesov. In Rybár, J., Beňušková, Ľ., Kvasnička, V.:*Kognitívne vedy*. Kalligram, Bratislava, 2002

[4] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[5] McCulloch, W. S., Pitts, W. H.: A Logical Calculus of the Ideas Immanent in nervous Activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics* **5**(1943), 115 – 133.

[6] Minsky, M. and Papert, S.: *Perceptrons. An Introduction to Computational Geometry*. MIT Press, Cambridge, MA, 1969.

[7] Minsky, M. L.: *Computation. Finite and Infinite Machines*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

[8] Rojas, R.: *Neural Networks. A Systematic Introduction*. Springer, Berlin, 1996.

[9] Šíma, J., Neruda, R.: *Teoretické otázky neurónových sítí*. Matfyzpress, Praha, 1999.

[10] von Neumann, J.: *The Computer and the Brain*. Yale Univesity Press ,New Haven, CO, 1958.

[11] von Neumann, John: First Draft of a Report on the EDVAC, 1945. Retrieved October 1, 2012 from http://qss.stanford.edu/~godfrey/vonNeumann/vnedvac.pdf,

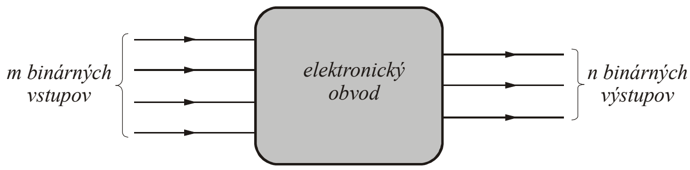
[12] Thagard, P.: *Úvod do kognitivní vědy. Mysl a myšlení.* Nakladatelství Portál, Praha, 2001
(anglický originál *Mind. Introduction to Cognitive Science*, MIT Prees, Cambridge, MA, 1998)

9.kapitola

Boolove funkcie a logické obvody

9.1 Boolova algebra

Elektronické obvody v počítačoch a v podobných zariadeniach sú charakterizované binárnymi vstupmi a výstupmi (rovnajúcimi sa 0 alebo 1), transformácia vstupu na výstupu sa uskutočňuje prostredníctvom elektronického obvodu, ktorý tvorí jadro tohto „transformačného“ zariadenia, pozri obr. 7.1. Elektronický obvod môže byť formálne simulovaný tzv. Boolovou funkciou, ktorá transformuje *m* binárnych vstupných premenných na *n* výstupných binárnych premenných.



Obrázok 9.1. Znázornenie elektronického obvodu, ktorý má *m* binárnych vstupov a *n* binárnych výstupov. Činnosť elektronického obvodu spočíva v transformácii binárnych vstupných hodnôt na binárne výstupné hodnoty.

Všeobecná definícia Boolovej funkcie je $f:\{0,1\}^m \to \{0,1\}^n$, táto funkcia transformuje binárny vektor dĺžky *m* na binárny vektor dĺžky *n*. Môžeme si položiť otázku, ako realizovať túto Boolovu funkciu, aby mala vopred špecifikované vlastnosti? Tento problém je realizovaný pomocou Boolovej algebry, ktorá pomocou premenných s 0-1 ohodnotením (t. j. binárnych) premenných a pomocou niekoľkých binárnych algebraických operácií a jednej unárnej algebraickej operácie je schopná dostatočne všeobecne modelovať Boolove funkcie s vopred špecifikovanými vlastnosťami. Poznamenajme, že Boolova algebra má dva známe modely, prvým je výroková logika a druhým algebra teórie množín. Pretože obe tieto zdanlivo odťažité disciplíny majú rovnakú „metateóriu“, existuje medzi zákonmi výrokovej logiky a formulami teórie množín „dualizmus“, pomocou ktorého ku každému zákonu výrokovej logiky priradíme 1-1-značne formulu teórie množín a naopak. Dobrým, ilustratívnym príkladom tohto dualizmu sú De Morganove formuly, ktoré vo výrokovej logike a v teórii množín majú tvary

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

V týchto formulách, vo výrokovej logike unárna logická spojka negácie má ekvivalent v teórii množín v unárnej algebraickej operácii doplnku, a podobne, vo výrokovej logike binárne spojky konjunkcie a disjunkcie majú ekvivalenty v teórii množín v binárnych algebraických operáciách prieniku resp. zjednotenia. Na záver je potrebné poznamenať, že výroková spojka ekvivalentnosti má v teórii množín ekvivalent v relácii rovnosti. Tieto priradenia vo výrokovej logike a v teórii množín môžeme zosumarizovať takto

$$\text{výrokové premenné } p,q,r,... \Leftrightarrow \text{množiny } A,B,C,...$$
$$\text{spojka negácie } \neg \Leftrightarrow \text{operácia doplnku } \overline{}$$
$$\text{spojka konjunkcie } \wedge \Leftrightarrow \text{operácia prieniku } \cap$$
$$\text{spojka disjunkcie } \vee \Leftrightarrow \text{operácia zjednotenia } \cup$$
$$\text{spojka ekvivalentnosti } \equiv \Leftrightarrow \text{relácia rovnosti } =$$

Definícia 9.1. ***Boolova algebra*** je algebraická štruktúra špecifikovaná usporiadanou 6-ticou $\left(B,+,\cdot,\overline{},\mathbf{0},\mathbf{1}\right)$, kde $B=\{a,b,...,x,y,...\}$ je neprázdna množina elementov (premenných Boolovej algebry), ktorá obsahuje dva špeciálne odlíšené elementy - konštanty $\mathbf{0},\mathbf{1}\in B$ a nad ktorou sú definované binárne operácie súčinu a súčtu

$$\cdot : B\times B\to B \tag{9.1a}$$
$$+ : B\times B\to B \tag{9.1b}$$

a unárna operácia komplementu

$$\overline{} : B\to B \tag{9.1c}$$

ktoré vyhovujú týmto podmienkam

(1) komutatívnosť:

$$x\cdot y=y\cdot x\,, \qquad x+y=y+x \tag{9.1d}$$

(2) asociatívnosť:

$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z), \qquad (x+y)+z=x+(y+z) \tag{9.1e}$$

(3) distributívnosť:

$$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z), \qquad x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z) \tag{9.1f}$$

(4) vlastnosť konštanty **0**:

$$x=x+\mathbf{0}\,, \qquad x\cdot\overline{x}=\mathbf{0} \tag{9.1g}$$

(5) vlastnosť konštanty **1** :

$$x=x\cdot\mathbf{1}\,, \qquad x+\overline{x}=\mathbf{1} \tag{9.1h}$$

V literatúre existuje mnoho alternatívnych notácií Boolovej algebry. Napríklad operácia súčinu sa alternatívne vyjadruje symbolmi $\wedge$ alebo $*$, podobne, operácia súčtu symbolmi $\vee$ a $\oplus$. Pre zjednodušenie notácie budeme vynechávať symbol súčinu, formulu $x\cdot y$ budeme zjednodušene písať ako xy. Z formúl (8.1g-h) vyplýva, že konštanta **1** (**0**) má úlohu neutrálneho (jednotkového) prvku pre súčin (súčet). Z bežného pohľadu na formuly (8.1g-h) by niekto mohol odvodiť záver, že výraz $\overline{x}$ je inverzná formula pre x. Pripomeňme si, že v kapitole 6 bol inverzný element definovaný pomocou vlastnosti $x\cdot\overline{x}=\mathbf{1}$, avšak podľa pravej formuly (A.1g) platí $x\cdot\overline{x}=\mathbf{0}$, z čoho vyplýva, že výraz $\overline{x}$ nemá vlastnosti inverzného prvku (tak vzhľadom k operácii súčtu, ako aj súčinu).

Príklad 9.1. Najjednoduchšia Boolova algebra (s veľkým významom v informatike a v logike) je založená na dvojprvkovej množine $B=\{0,1\}$. Binárne operácie súčinu, súčtu a unárna operácia komplementu sú pomocou multiplikačných tabuliek definované takto

$+$	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

$\cdot$	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

b	$\overline{b}$
0	**1**
1	**0**

Jednoducho sa môžeme presvedčiť, že pre takto špecifikované operácie sú splnené podmienky (8.1a-h), t. j. algebraická štruktúra $\left(B,+,\cdot,\overline{\ \ },\mathbf{0},\mathbf{1}\right)$ je Boolova algebra.

Príklad 9.2. Nech $A=\{a,b,c,...\}$ je neprázdna množina, položme $B=\mathcal{P}(A)$. Operácie $\cdot$ a $+$ sú realizované pomocou množinových operácií $\cap$ resp. $\cup$, operácia komplementu je realizovaná ako množinový komplement vzhľadom k množine A, $\overline{x}=A-x$. Potom platí:

(a) binárne operácie sú asociatívne, komutatívne,
(b) medzi binárnymi operáciami platia distributívne zákony,
(c) prázdna množina $\varnothing$ má vlastnosti jednotkového elementu pre operáciu $\cup$

$$(\forall X\in B)(X\cup\varnothing=\varnothing\cup X=X)$$

(d) množina A má vlastnosti jednotkového elementu pre operáciu $\cap$

$$(\forall X\in B)(X\cap A=A\cap X=X)$$

(e) pre každé $X\in B$ existuje komplement $\overline{X}\in B$ taký, že

$$(\forall X\in B)(X\cap\overline{X}=\varnothing)$$

$$(\forall X\in B)(X\cup\overline{X}=A)$$

To znamená, že podmienky (8.1a-h) sú splnené, t. j. algebraická štruktúra $\left(\mathcal{P}(A),\cup,\cap,\overline{\ \ },\varnothing,A\right)$ je Boolova algebra.

Príklad 9.3. Nech $B=\{p,q,r,...\}$ je množina výrokových formúl, ktorá je uzavretá vzhľadom k binárnym operácia konjunkcie ($\wedge$), disjunkcie ($\vee$) a k unárnej operácii negácie ($\neg$). Pre túto množinu je definovaná aj relácia ekvivalentnosti $'\equiv'$, dve formuly sú ekvivalentné vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú pravdivostnú interpretáciu (logicky ekvivalentné). Z množiny B vyberieme formulu kontradikciu (napr. $p\wedge\neg p$) a označíme ju symbolom 0; podobne formula tautológia (napr. $p\vee\neg p$) je označená symbolom 1. To znamená, že symboly 0 a 1 patria do množiny B. Pre každú formulu p platia tieto vzťahy

$$p\vee\mathbf{0}=\mathbf{0}\vee p=p$$

$$p\wedge\mathbf{1}=\mathbf{1}\wedge p=p$$

Pretože logické spojky konjunkcie a disjunkcie sú komutatívne a asociatívne, pre tieto operácie platia taktiež distributívne zákony, podmienky z definície A.1 sú splnené, t. j. algebraická štruktúra $(B,\vee,\wedge,\neg,0,1)$ tvorí Boolovu algebru.

9.2 Vlastnosti Boolovej algebry

V úvodnej časti kapitoly A.1 bol zmienený princíp duality medzi algebrou teórie množín a výrokovou logikou. Ukážeme, že tento princíp je aplikovateľný aj pre rôzne Boolove algebry.

Jednoduchými prostriedkami je možné dokázať jednoznačnosť jednotkového (neutrálneho) elementu a taktiež aj jednoznačnosť komplementu..

Veta 9.2. Jednotkové elementy **1** a **0** existujú jednoznačne.

Podobne sa dá dokázať aj jednoznačnosť existencie inverzných elementov v Boolovej algebre.

Veta 9.3. Pre každý element $x \in B$ existuje jednoznačne element $\overline{x} \in B$ taký, že $x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$ a $x + \overline{x} = \mathbf{1}$ (t. j .sú splnené podmienky 7.1g-h).

Veta 9.4. Nech $\left(B, +, \cdot, \overline{}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\right)$ je Boolova algebra, potom platia tieto formulu

(1) Involutívnosť komplementu

$$\left(\forall x \in B\right)\left(\overline{\overline{x}} = x\right) \tag{9.2a}$$

(2) Idempotentnosť

$$\left(\forall x \in B\right)\left(x \cdot x = x\right) \tag{9.2b}$$

$$\left(\forall x \in B\right)\left(x + x = x\right) \tag{9.2c}$$

(3) De Morganove zákony

$$\left(\forall x, y \in B\right)\left(\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}\right) \tag{9.2d}$$

$$\left(\forall x, y \in B\right)\left(\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}\right) \tag{9.2e}$$

(4) Nulitnosť

$$\left(\forall x \in B\right)\left(x + \mathbf{1} = \mathbf{1}\right) \tag{9.2f}$$

$$\left(\forall x \in B\right)\left(x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\right) \tag{9.2g}$$

(5) Absorpcia

$$\left(\forall x, y \in B\right)\left(x + \left(x \cdot y\right) = x\right) \tag{9.2h}$$

$$\left(\forall x \in B\right)\left(x \cdot \left(x + y\right) = x\right) \tag{9.2i}$$

(6) Komplementy konštánt

$$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{1} \tag{9.2j}$$

$$\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \tag{9.2k}$$

(7) Vlastnosti konštánt vzhľadom k binárnym operáciam

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{1}, \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{9.2l}$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{9.2m}$$

Dôkaz týchto vlastností prenecháme na cvičenie.

9.3 Boolove funkcie[4]

V úvode k tejto kapitole bola Boolova funkcia definovaná ako funkcia nad binárnymi premennými $\{0,1\}$. Tento pomerne zjednodušený pohľad na Boolovu funkciu bude teraz rozšírený tak, aby koncepcia Boolovej funkcie bola časťou Boolovej algebry. Základný pojem pre definíciu Boolovej funkcie je pojem Boolovej premennej. Použijeme analogický prístup, aký sa používa pre definíciu reálnej premennej, je to veličina, ktorá môže nadobúdať hodnoty z množiny reálnych čísel.

Definícia 9.2. Nech $\left(B,+,\cdot,\overline{\ \ },\mathbf{0},\mathbf{1}\right)$ je Boolova algebra. Potom,

(1) ***Boolova premenná*** je taká premenná, ktorá nadobúda hodnoty z množiny *B,*
(2) ***komplement premennej*** *x*, označený $\overline{x}$, je taká premenná, ktorej hodnota sa rovná komplementu hodnoty premennej *x* (t. j. ak $x=b\in B$, potom $\overline{x}=\overline{b}\in B$,
(3) ***literál*** je Boolova premenná *x* alebo jej komplement $\overline{x}$.

V ďalšom texte budeme používať notáciu, ktorá umožní rozlíšiť literál

$$x^e=\begin{cases} x & (pre\ e=1) \\ \overline{x} & (pre\ e=0) \end{cases} \tag{9.3}$$

Podobne ako pre reálnu premennú, aj Boolova premenná môže byť kombinovaná do tvaru Boolových formúl použitím binárnych operácií súčinu, súčtu a komplementu.

Definícia 9.3. Nech $\left(B,+,\cdot,\overline{\ \ },\mathbf{0},\mathbf{1}\right)$ je Boolova algebra. Potom ***Boolova formula***, obsahujúca Boolove premenné $x_1,x_2,...,x_n$, je definovaná takto:

(1) konštanty **0** a **1** sú Boolove formuly,
(2) Boolove premenné $x_1,x_2,...,x_n$ sú Boolove formuly,
(3) ak *X* a *Y* sú Boolove formuly, potom aj výrazy $\left(X\cdot Y\right)$, $\left(X+Y\right)$, $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ sú Boolove formuly.

V tejto definícii bod (3) môže byť rozšírený ešte o ďalšie Boolove spojky, napr. spojku ⊕, ktorá sa nazýva exkluzívna disjunkcia (XOR) a je definovaná takto: $x\oplus y$ = 1 vtedy a len vtedy, ak buď x = 1 alebo y = 1, ale nie súčasne ($x \neq y$); $x\oplus y$ = 0 vtedy a len vtedy, ak premenné *x* a *y* majú rovnaku hodnotu ($x = y$).

V ďalšom texte budeme používať konvenciu, že ak bude jasné o akú formulu sa jedná, tak termín ´Boolova formula´ budeme skracovať na ´formula´. Podobne, ako vo výrokovej logike môžeme si definovať rastúcu prioritu operácií takto: (1) súčet, (2) súčin a (3) komplement. Napríklad, formulu $\left(\left(x\cdot y\right)+z\right)$ môžeme pomocou tejto konvencie vyjadriť

[4] Niektoré časti tejto kapitoly už boli preyentované v kap. 1.5, menovite DNF a KNF tvary výrokových formulí, ktoré boli nepostrádateľné pre korektné zavedenie sémantických tabiel.

v zjednodušenom tvare bez zátvoriek $x \cdot y + z$. Konečne, podobne ako v štandardnej algebre, budeme vynechávať znak súčinu, napríklad predchádzajúci ilustračný príklad má tvar $xy + z$.

Príklad 9.5. Zjednodušte formulu $\left((x+y)\cdot(\overline{x}+\overline{y})\right)$.
Použitím distributívneho zákona a (A.1g-h)

$$\left((x+y)\cdot(\overline{x}+\overline{y})\right)=(x\cdot\overline{x})+(x\cdot\overline{y})+(y\cdot\overline{x})+(y\cdot\overline{y})=\underbrace{x\overline{x}}_{0}+x\overline{y}+y\overline{x}+\underbrace{y\overline{y}}_{0}=x\overline{y}+\overline{x}y$$

Definícia 9.4. Dve Boolove formule sú ***ekvivalentné*** (alebo ***rovné***) vtedy a len vtedy, ak jedna pomocou konečného počtu aplikácií axióm Booloej algebry je pretransformovaná na druhú formulu.

Podľa príkladu A.4 formule $\varphi_1 = (x+y)\cdot(\overline{x}+\overline{y})$ a $\varphi_2 = x\overline{y}+\overline{x}y$ sú ekvivalentné, pretože druhú formulu získame z prvej použitím konečného počtu aplikácií axióm Boolovej algebry, potom $\varphi_1 = \varphi_2$.

Konečne sa dostávame k definícii Boolovej funkcie $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ako Boolovej formuly, ktorá obsahuje premenné $x_1,x_2,...,x_n$. Napríklad

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1(x_2+\overline{x}_3)$$

Definícia 9.5. Nech $\left(B,+,\cdot,\overline{},\mathbf{0},\mathbf{1}\right)$ je Boolova algebra.

(1) ***Boolova funkcia*** $f(x_1,x_2,...,x_n)$ premenných $x_1,x_2,...,x_n$, je zobrazenie $f: B^n \to B$, pričom $f(x_1,x_2,...,x_n)$ je špecifikovaná ako Boolova formula.

(2) Všetky Boolove formuly, ktoré sú navzájom ekvivalentné, definujú rovnakú funkciu.

Z tejto definície vyplýva, že ekvivaletné Boolove formuly špecifikujú rovnakú Boolovu formulu. Napríklad, máme dve funkcie

$$f: B^2 \to B \qquad f(x_1,x_2)=x_1(\overline{x}_1+x_2)$$
$$g: B^2 \to B \qquad g(x_1,x_2)=x_1x_2$$

Použitím distribučného zákona ľahko dokážeme, že formuly sú ekvivaletné, $x_1(\overline{x}_1+x_2)=x_1x_2$, potom funkcie *f* a *g* sú rovnaké.

Pretože Boolova funkcia môže byť vyjadrená mnohými rôznymi formulami, ktoré sú navzájom ekvivaletné, vzniká otázka, ako efektívne rozhodnúť, či dve Boolove formuly sú ekvivalentné, alebo či dve Boolové funkcie sú rovnaké. Ukážeme postup, ktorý nie je založený na transformácii jednej formuly na druhú, aby sme rozhodli, či funkcie sú rovnaké, ale navrhne sa „kanonická“ reprezentácia Boolovej funkcie, podľa ktorej môžeme jednoducho rozhodnúť, či dve Boolove funkcie sú rovnaké alebo nie.

Definícia 9.6. ***Súčinová klauzula*** premenných $x_1,x_2,...,x_n$ je Boolova formula, ktorá obsahuje súčin *n* literálov (t. j. premennú alebo jej komplement) pre každú premennú.

Ako príklad súčinovej klauzuly premenných x_1, x_2, x_3 sú tieto formuly: $x_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2x_3$, $\overline{x}_1x_2x_3, \ldots,$ $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$. Ak použijeme formalizmus x^e, potom súčinovú klauzulu premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktorá je špecifikovaná binárnym vektorom $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, má tvar

$$l_{\boldsymbol{e}} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n} \tag{9.4}$$

Napríklad, pre $\boldsymbol{e} = (11011)$ súčinová klauzula má tvar

$$l_{(11011)} = x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^1 x_5^1 = x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 x_5$$

Pretože binárnych vektorov $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je 2^n, potom aj ***rôznych*** súčinových klauzúl je 2^n.

Definícia 9.7. ***Súčtová klauzula*** premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je Boolova formula, ktorá obsahuje súčet *n* literálov (t. j. premennú alebo jej komplement) pre každú premennú.

Podobne ako pre súčinovú klauzulu, môžeme aj súčtovú klauzulu pre premenné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ špecifikovať binárnym vektorom $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$

$$L_{\boldsymbol{e}} = x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + \ldots + x_n^{e_n} \tag{9.5}$$

Pre $\boldsymbol{e} = (10100)$ súčtová klauzula má tvar

$$L_{\boldsymbol{e}} = x_1^1 + x_2^0 + x_3^1 + x_4^0 + x_5^0 = x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5$$

Pretože každá súčtová klauzula premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je špecifikovaná binárnym vektorom $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, potom počet súčtových klauzúl je taktiež 2^n.

Týmto sa dostávame k formulácii hlavného výsledku tejto kapitoly, že každá Boolova funkcia môže byť jednoznačne vyjadrená ako sumácia súčinových klauzúl (tento tvar sa nazýva vo výrokovej logike ***disjunktívna normálna forma***, skratka DNF).

Príklad 9.6. Vyjadrite Boolovu funkciu $x_1x_2(x_1 + x_3)$ pomocou súčtu súčinových klauzúl (DNF)

$$\begin{aligned} x_1x_2(x_1 + x_3) &= x_1x_2x_1 + x_1x_2x_3 \\ &= \underbrace{x_1x_1}_{x_1} x_2 + x_1x_2x_3 = x_1x_2 + x_1x_2x_3 \\ &= x_1x_2\mathbf{1} + x_1x_2x_3 = x_1x_2(x_3 + \overline{x}_3) + x_1x_2x_3 \\ &= \underbrace{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3}_{x_1x_2x_3} + x_1x_2\overline{x}_3 \\ &= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 \end{aligned}$$

Veta 9.5. Každá Boolova funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktorá sa identicky nerovná nule, môže byť špecifikovaná ako suma súčinových klauzúl

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1,x_2,...,x_n\right) &= \sum_{\boldsymbol{e}} f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)x_1^{e_1}x_2^{e_2}...x_n^{e_n} \\
&= \sum_{\boldsymbol{e}} f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)l_{(e_1,e_2,...,e_n)} \\
&= \sum_{\substack{\boldsymbol{e} \\ (f(\boldsymbol{e})=1)}} f\left(\boldsymbol{e}\right)l_{\boldsymbol{e}}
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

V poslednej formule berieme v úvahu len také binárne hodnoty argumentov $\boldsymbol{e}$ pre ktoré sú funkčné hodnoty jednotkové, nulové funkčné hodnoty, $f(\boldsymbol{e}) = 0$, môžu byť ignorované.

Naznačíme jednoduchý konštruktívny dôkaz. Boolova funkcia $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ je alternatívne špecifikovaná pomocou jej funkčných hodnôt $f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)$, pre všetky hodnoty binárneho vektora $\boldsymbol{e}=\left(e_1,e_2,...,e_n\right)\in\{0,1\}^n$.

#	$\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,...,e_n)$	$f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)$
1	(00........00)	0
2	(00........01)	1
....		
i	$(e_1^{(i)},e_2^{(i)},...,e_n^{(i)})$	1/0
....		
2^n	(11........11)	0

Súčinová klauzula $l_{(e_1,e_2,...,e_n)}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x_1^{e_1}x_2^{e_2}...x_n^{e_n}$, ktorá je priradená binárnemu vektoru $\boldsymbol{e}=\left(e_1,e_2,...,e_n\right)\in\{0,1\}^n$ má zaujímavú vlastnosť, jej funkčná hodnota sa rovná 1 len pre $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\left(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\right)$, kde $\boldsymbol{e}_i\in\{0,1\}$, pre všetky iné prípady funkčná hodnota je 0

$$
l_{(e_1,e_2,...,e_n)}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\begin{cases}1 & \left(pre\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\left(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\right)\right)\\ 0 & \left(pre\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\neq\left(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\right)\right)\end{cases}
\tag{9.7}
$$

To znamená, že pre konštrukciu (9.6) sú pre nás dôležité len funkčné hodnoty 1, funkčné hodnoty 0 nie sú podstatné pre náš konštruktívny dôkaz. Zostrojíme Boolovu formulu ako sumáciu týchto klauzúl (t. j. v DNF tvare)

$$
F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\sum_{\boldsymbol{e}} f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)l_{(e_1,e_2,...,e_n)}
\tag{9.8}
$$

Z konštrukcie tejto Boolovej funkcie, vyplýva, že jej funkčné hodnoty sú špecifikované tabuľkou funkčných hodnôt Boolovej funkcie $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$. To znamená, že Boolove funkcie $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ a $F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ sú ekvivalentné, t. j. majú rovnaké funkčné hodnoty pre rôzne hodnoty argumentov. Týmto sme zavŕšili jednoduchý intuitívny konštruktívny dôkaz vety 9.5.

Poznamenajme, že DNF tvar Boolovej funkcie je určený jednoznačne až na permutácie argumentov v súčtových klauzulách, alebo až na permutácie súčtových klauzúl. Táto nejednoznačnosť DNF tvaru vyplýva zo skutočnosti, že binárne operácie súčtu a súčinu sú komutatívne. Môžeme teda konštatovať, že DNF sú základné charakteristiky (niečo ako odtlačky prstov alebo zloženie DNA) Boolových funkcií. Aby sme odstránili prípadné nejednoznačnosti zapisujeme DNF v tzv. kanonickom tvare, t. j. jednotlivé argumenty sa zapisujú postupne podľa rastúceho indexu (tým sme odstránili nejednoznačnosti v dôsledku kumutatívnosti súčinu) a potom jednotlivé súčinové klauzule sú písané v poradí rastúcej číselnej hodnoty „indexu“ $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,...,e_n)$.

Príklad 9.7. Jednoduchý dôkaz formuly (9.6) môžeme zostrojiť pomocou Shannonovej formuly [xx] Boolovej funkcie $f(x_1)$

$$f(x_1)=\overline{x}_1 f(0)+x_1 f(1)$$

Ktorá je jednoduchým dôsledkom skutočnosti, že v Boolovej algebre funkcia $f(x_1)$ má len dve možné hodnoty **0** alebo **1**. Túto formulu môžeme aplikovať k funkcii $f(x_1,x_2)$ k premennej x_1

$$f(x_1,x_2)=\overline{x}_1 f(0,x_2)+x_1 f(1,x_2)$$

Na komponenty $f(0,x_2)$ a $f(1,x_2)$ Shanonnovu formulu

$$f(0,x_2)=\overline{x}_2 f(0,0)+x_2 f(0,1)$$
$$f(1,x_2)=\overline{x}_2 f(1,0)+x_2 f(1,1)$$

Potom pre $f(x_1,x_2)$ dostaneme

$$f(x_1,x_2)=\overline{x}_1\overline{x}_2 f(0,0)+\overline{x}_1 x_2 f(0,1)+x_1\overline{x}_2 f(1,0)+x_1 x_2 f(1,1)$$

Týmto sme dokázali, že pomocou Shanonnovej formuly pre n=1 dokážeme aj formulu pre n=2. Týmto postupom (matematickou indukciou) dokážeme, že formula platí (8.6) aj pre ľubovolné celočíselne n.

Príklad 9.8. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ v tvare DNF. Podľa vety 8.5 DNF tvar tejto funkcie je

$$f(x_1,x_2)=f(0,0)\overline{x}_1\overline{x}_2+f(0,1)\overline{x}_1 x_2+f(1,0)x_1\overline{x}_2+f(1,1)x_1 x_2$$

kde jednotlivé funkčné hodnoty sú uvedené v tabuľke

#	e_1	e_2	$f(e_1,e_2)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

Potom funkcia f má tvar

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=0\overline{x}_1\overline{x}_2+1\overline{x}_1 x_2+1x_1\overline{x}_2+1x_1 x_2\\&=\overline{x}_1 x_2+x_1\overline{x}_2+x_1 x_2\end{aligned}$$

Ľahko dokážeme, že takto definovaná funkcia $f(x_1,x_2)=\overline{x}_1 x_2+x_1\overline{x}_2+x_1 x_2$ je ekvivalentná s pôvodnou Boolovou funkciou $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$

$$f\left(x_1,x_2\right)=\overline{x}_1x_2+x_1\overline{x}_2+x_1x_2=\overline{x}_1x_2+x_1\overline{x}_2+x_1x_2+x_1x_2=\left(\underbrace{\overline{x}_1+x_1}_{1}\right)x_2+x_1\left(\underbrace{\overline{x}_2+x_2}_{1}\right)=x_1+x_2$$

Príklad 9.9. Zostrojte Boolovu funkciu $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_2x_3+x_1x_3$ v tvare DNF. Táto Boolova funkcia je určená tabuľkou funkčných hodnôt

#	e_1	e_2	e_3	e_2e_3	e_1e_3	$e_2e_3+e_1e_3$
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Potom funkcia $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ (uvažujeme len jednotkové funkčné hodnoty) má DNF tvar

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\overline{x}_1x_2x_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2x_3$$

Použijeme duálny princíp z vety 8.1, veta 8.5 má potom tento duálny tvar

Veta 9.6. Každá Boolova funkcia $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, ktorá sa identicky nerovná nule, môže byť špecifikovaná ako súčin sumačných klauzúl

$$\begin{aligned} f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)&=\prod_{\boldsymbol{e}}\left(f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)+x_1^{1-e_1}+x_2^{1-e_2}+...+x_n^{1-e_n}\right)\\ &=\prod_{\boldsymbol{e}}\left(f\left(e_1,e_2,...,e_n\right)+L_{\left(1-e_1,1-e_2,...,1-e_n\right)}\right)\\ &=\prod_{\substack{\boldsymbol{e}\\ \left(f(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0}\right)}}\left(f\left(\boldsymbol{e}\right)+L_{\overline{\boldsymbol{e}}}\right)\end{aligned} \tag{9.9}$$

kde $\overline{\boldsymbol{e}}=\left(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\right)=\left(1-e_1,1-e_2,...,1-e_n\right)$.

Táto veta reprezentuje hlavný duálny výsledok tejto kapitoly, že každá Boolova funkcia môže byť jednoznačne vyjadrená ako súčin súčtových klauzúl (tento tvar sa nazýva vo výrokovej logike ***konjunktívna normálna forma***, skratka KNF).

Príklad 9.10 . Vyjadrite $f\left(x_1,x_2\right)=x_1\left(x_1+x_2\right)$ v KNF tvare.
V prvom kroku zostrojíme tabuľku funkčných hodnôt tejto Boolovej funkcie

#	e_1	e_2	e_1+e_2	$e_1(e_1+e_2)$
1	0	0	0	0

2	0	1	1	0
3	1	0	1	1
4	1	1	1	1

Použitím (8.9) dostaneme vyjadrenú Boolovu funkciu $f(x_1,x_2)=x_1(x_1+x_2)$ v KNF

$$f(x_1,x_2)=\left(\underbrace{f(0,0)}_{0}+x_1+x_2\right)\cdot\left(\underbrace{f(0,1)}_{0}+x_1+\overline{x}_2\right)\cdot\underbrace{\left(\underbrace{f(1,0)}_{1}+\overline{x}_1+x_2\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\underbrace{f(1,1)}_{1}+\overline{x}_1+\overline{x}_2\right)}_{1}$$

$$=(x_1+x_2)\cdot(x_1+\overline{x}_2)$$

Z tohto príkladu vyplýva, že pre konštrukciu KNF sú dôležité nulové funkčné hodnoty danej Boolovej funkcie. Táto vlastnosť je duálnu k vlastnosti DNF, kde sú relevantné jednotkové funkčné hodnoty Boolovej funkcie. Z tohto faktu vyplýva skutočnosť, že si zvolíme DNF tvar Boolovej funkcie vtedy, keď tabuľka obsahuje v prevažnej miere nulové funkčné hodnoty, KNF si zvolíme vtedy, keď tabuľka obsahuje v prevažnej miere jednotkové funkčné hodnoty. V prípade, že tabuľka obsahuje rovnaký počet nulových a jednotkových funkčných hodnôt z pohľadu „zložitosti“ konštrukcie je jedno, aký tvar Boolovej funkcie sme zvolili.

Príklad 9.11. Zostrojte KNF Boolovej funkcie $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1+x_2)\cdot(\overline{x}_1+\overline{x}_3)$. Tabuľka funkčných hodnôt má tvar

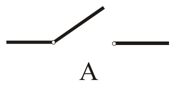
#	e_1	e_2	e_3	$\overline{e}_1$	$\overline{e}_3$	$\overline{e}_1+e_2$	$\overline{e}_1+\overline{e}_3$	$(\overline{e}_1+e_2)\cdot(\overline{e}_1+\overline{e}_3)$
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	1	1	1	1
8	1	1	1	0	0	1	0	0

KNF má potom tvar (využívame len tri riadky s nulovou výslednou funkčnou hodnotou)

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1+x_2+x_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)$$

9.4 Spínacie obvody

Mnohé elektronické zariadenia, akými sú napr. počítače, telefónne ústredne, zariadenia na riadenie dopravy, obsahujú ako časť spínancie obvody. Ich teória bola vypracovaná v r. 1938 C. Shannonom v rámci jeho MSc. dizertacie [xx]. Spínač môže byť chápaný ako taký spoj v obvode, ktorý ak je uzavretý, potom ním prechádza elektrický prúd, v opačnom prípade, ak je otvorený, elektrický prúd ním neprechádza. Spínač môžeme znázorniť takto:



(9.10)

Predpokladajme , že v spínacom obvode máme spínač A. Stav tohto spínača označíme premennou x, ak $x = 1$ ($x = 0$), potom spínač A je uzavretý (otvorený).

O trochu zložitejší prípad spínacieho obvodu obsahuje dva spínače A_1 a A_2

(9.11)

Hovoríme, že v tomto prípade sú spínače zapojené *sériovo*. Nech x_1 a x_2 sú premenné popisujúce stavy spínačov A_1 resp. A_2, tieto premenné ak sa rovnajú 1 (0) , potom daný spínač je uzavretý (otvorený). Nech $f\left(x_1,x_2\right)$ je funkcia, ktorej hodnota sa rovná 1 (0) pre tie hodnoty x_1 a x_2, ktoré umožňujú (znemožňujú) tok prúdu. Táto funkcia môže byť chápaná ako binárna funkcia $f:\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, ktorej funkčné hodnoty sú určené tabuľkou

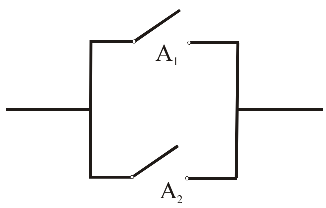
#	x_1	x_2	$f\left(x_1,x_2\right)$
1	0	0	0
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Z tejto tabuľky vyplýva, že funkcia f je vyjadrená ako súčin premenných x_1 a x_2

$$f\left(x_1,x_2\right) = x_1 x_2 \tag{9.12}$$

Táto funkcia je definovaná nad Boolovou algebrou $\left(\{0,1\},+,\cdot,\mathbf{G}0,1\right)$, t. j. premenné patria do množiny $\{0,1\}$.

Nový druh spínacieho obvodu, ktorý je podobný sériovému obvodu (8.11), ale v paralelnom zapojení, má tvar



(9.13)

Podobne ako v predchádzajúcom príklade (9.11), nech spínače A_1 a A_2 sú popísané premennými x_1 a x_2 , tento obvod je popísaný funkciou $g(x_1,x_2)$ nad Boolovou algebrou $\left(\{0,1\},+,\cdot,\mathbf{G}0,1\right)$, ktorá je špecifikovaná tabuľkou

#	x_1	x_2	$g(x_1,x_2)$
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

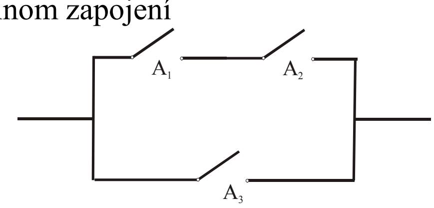
Potom funkcia $g(x_1,x_2)$ je špecifikovaná ako súčet premenných

$$g(x_1,x_2)=x_1+x_2 \tag{9.14}$$

ktorá je definovaná nad Boolovou algebrou $\left(\{0,1\},+,\cdot,\mathbf{G}0,1\right)$

Funkcie, ktoré sú podobné (9.12) a (9.14) popisujú vlastnosti spínacieho obvodu pomocou stavov spínačov, ktoré sú súčasťou daného obvodu. Takéto funkcie sa nazývajú ***spínacie funkcie***. Majme n spínačov, ktorých stavy sú špecifikované premennými x_1, x_2, ..., x_n. Spínacia funkcia $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ popisuje správanie sa spínacieho obvodu pre všetky možné 2^n stavy spínačov. Ako už bolo ukázané na predchádzajúcich ilustračných príkladoch, funkcia f môže byť reprezentovaná Boolovou formulou a teda aj Boolovou funkciou.

Nasledujúci príklad spínacieho obvodu bude zložitejší spínací obvod, ktorý obsahuje tri spoínače v sériovo-paralelnom zapojení

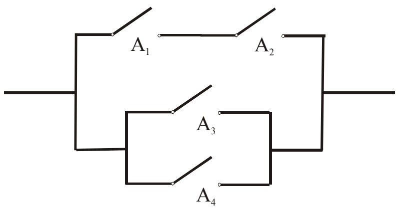


(9.15)

Nech jednotlivé spínače A_1, A_2 a A_3 sú špecifikované premennými x_1, x_2 resp. x_3. Nech funkcia $f(x_1,x_2)$ popisuje vlastnosti hornej časti obvodu, ktorý obsahuje dva sériovo zapojené spínače A_1 a A_2. Pomocou predchádzajúceho príkladu (9.11) funkcia, ktorá špecifikuje takýto obvod má tvar $f_1(x_1,x_2)=x_1x_2$. Celkový obvod potom môžeme zložiť z dvoch paralelných podštruktúr, horná je reprezentovaná funkciou $f_1(x_1,x_2)=x_1x_2$ a dolná je reprezentovaná funkciou $f_2(x_3)=x_3$. Spojením týchto dvoch funkcií pomocou (9.14) dostaneme Boolovu funkciu celého spínacieho obvodu (9.15)

$$f(x_1,x_2,x_3)=f_1(x_1,x_2)+f_2(x_3)=x_1x_2+x_3 \tag{9.16}$$

Príklad 9.12. Zostrojte spínaciu funkciu f spínacieho zariadenia

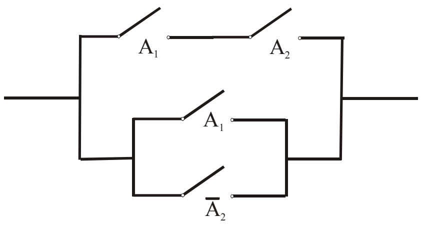


(9.17)

Nech x_1, x_2, x_3 a x_4 sú premenné označujúce stavy spínačov A_1, A_2, A_3 resp. A_4. Potom celková spínacia funkcia zariadenia má tvar $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. V prvom kroku určíme pomocné spínacie funkcie $f_1(x_1, x_2)$ a $f_2(x_3, x_4)$, ktoré sú priradené hornej časti obsahujúcej spínače A_1, A_2 resp. dolnej časti obsahujúcej spínače A_3, A_4. Tieto funkcie sú určené spínacími funkciami (9.12) a (9.14), $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$ resp. $f_2(x_3, x_4) = x_3 + x_4$. Hľadaná spínacia funkcia má potom tvar

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 + x_4 \tag{9.18}$$

Príklad 9.13. Zostrojte spínaciu funkciu f zariadenia, ktoré vznikne malou modifikáciou spínacieho zariadenia (9.17)



(9.19)

kde pôvodné spínače A_1 a A_3 sú teraz spolu spriahnuté, t. j. obe sú súčasne zapnuté alebo vypnuté (preto sú obe označené A_1). Ďalšie dva pôvodné spínače A_2 a A_4 sú teraz spolu taktiež spriahnuté, ale opačným spôsobom, t. j. ak je jeden spínač zapnutý, druhý je vypnutý a naopak (preto sú oba označené A_2 a $\overline{A}_2$). Spínaciu funkciu takto špecifikovaného zariadenia ľahko zostrojíme pomocou spínacej funkcie (9.18) pôvodného spínacieho zariadenia, keď položíme $x_3 = x_1$ a $x_4 = \overline{x}_2$

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_1, \overline{x}_2) = x_1 x_2 + x_1 + \overline{x}_2 \tag{9.20}$$

Tabuľka funkčných hodnôt tejto spínacej funkcie má tvar

x_1	x_2	$\overline{x}_2$	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 + x_1 + \overline{x}_2$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Ak použime vetu 8.6, zostrojíme Boolovu funkciu v tvare KNF, ktorá simuluje túto tabuľku, z ktorej si vyberieme riadok s nulovou funkčnou hodnotou, potom $f(x_1, x_2) = x_1 + \overline{x}_2$. Spínacie zariadenie (8.19) má túto zjednodušenú spínaciu funkciu

$$g(x_1, x_2) = x_1 + \overline{x}_2 \tag{9.21}$$

Ľahko dokážeme, že funkcie (9.20) a (9.21) sú ekvivalentné

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 + \overline{x}_2 = \left(\underbrace{x_2 + 1}_{1}\right) x_1 + \overline{x}_2 = 1 x_1 + \overline{x}_2 = x_1 + \overline{x}_2$$

Príklad 9.12. Budeme riešiť veľmi praktickú úlohu, ktorá pre mnohých z nás je záhadou ako vlastne funguje. Predstavme si schodište, na začiatku a konci ktorého sú umiestnené stenové vypínače S_1 a S_2, pomocou ktorých zapneme alebo vypneme svetlo nad schodišťom. Hlavná požiadavka je taká, aby sa na jednom konci mohlo svetlo buď vypnúť, ak na druhom konci je zapnuté, alebo zapnúť , ak je na druhom konci vypnuté. Túto podmienku môžeme formulovať alternatívne tak, že ak sú oba spínače S_1 a S_2 vypnuté alebo zapnuté, potom zariadením nepreteká prúd, ale stačí, aby bolo zapnuté práve jedno, potom zariadením preteká prúd, čo môžeme vyjadriť touto tabuľkou

S_1	S_2	prúd
zapnuté	zapnuté	nie
zapnuté	vypnuté	áno
vypnuté	zapnuté	áno
vypnuté	vypnuté	nie

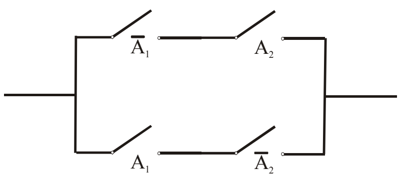
Predpokladajme, že vypínače S_1 a S_2 sú realizovaný pomocou dvoch spínačov A_1 a A_2. Ak použijeme premenné x_1 a x_2 , ktoré označujú stavy spínačov A_1 a A_2 , potom vyššie uvedená tabuľka môže byť prepísaná do tvaru

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Podľa vety 9.5, táto tabuľka špecifikuje Boolovu funkciu v DNF

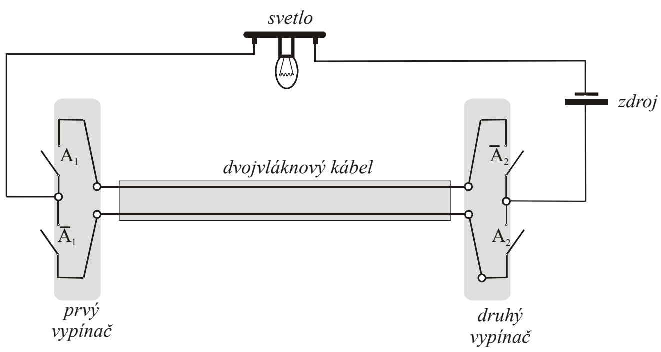
$$f\left(x_1, x_2\right) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 \qquad (9.22)$$

Spínací obvod so spínacou funkciou takto špecifikovanou má tvar



(9.23)

Diagram (9.26) znázorňuje realizáciu tohto spínacieho obvodu, kde vytieňované oblasti tvoria stenové vypínače, ktoré sú spojené dvojvláknovým káblom.



(9.26)

Tento jednoduchý príklad demonštruje užitočnosť teórie spínacích obvodov vybudovanej pomocou Boolových funkcií. Vyriešili sme praktický príklad, ako realizovať zapínanie a vypínanie svetla na schodišti (alebo na dlhej chodbe) tak, že každým vypínačom môžeme svetlo zapnúť alebo vypnúť, nezávisle od polohy druhého vypínača.

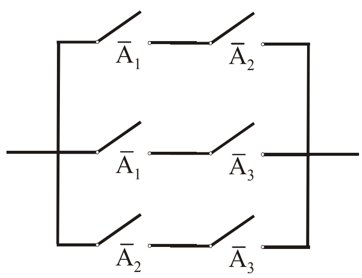
Príklad 9.13. Ústredné kúrenie v rodinnom dome je riadené troma termostatmi, ktoré sú umiestnené v každej izbe domu. Termostaty sú nastavené na 18 °C, pričom z dôvodu šetrenia energiou sa požaduje, aby systém ústredného kúrenia bol zapnutý len ak teplota aspoň v dvoch izbách je menšia ako 18 °C, v opačnom prípade je systém vypnutý. Navrhnite spínačový systém, ktorý prijíma signály z termostatov a ktorý riadi ústredné kúrenie. Pokúste sa minimalizovať navrhnutý systém, aby bol čo najjednoduchší.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Boolova funkcia špecifikovaná touto tabuľkou má tvar

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\ &= \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3} + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2\underbrace{(\bar{x}_3 + x_3)}_{1} + \bar{x}_1\underbrace{(x_2 + \bar{x}_2)}_{1}\bar{x}_3 + \underbrace{(\bar{x}_1 + x_1)}_{1}\bar{x}_2\bar{x}_3 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3\end{aligned}$$

Potom spínací obvod pre automatické zapínanie a vypínanie ústredného kúrenia má podobu



9.5 Logické obvody

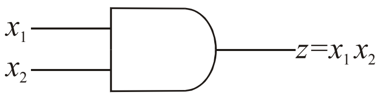
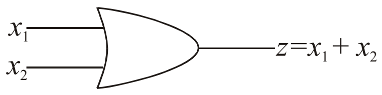
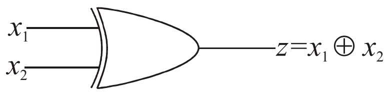
Na tomto mieste je vhodné pripomenúť[5] si pioniersku prácu McCullocha a Pittsa z r. 1943, v ktorej boli formulované teoretické základy neurónových sietí s logickými neurónmi a ktorá je v súčasnosti pokladaná za jednu prvých prác, na základe ktorých vznikol nový

[5] Pozri náš učebný text *Matematická logika*, kapitola 4.

informatický vedný odbor ***umelá inteligencia***. Autori dokázali, že ľubovoľná Boolova funkcia môže byť simulovaná pomocou obvodu (neurónovej siete) obsahujúcej elementárne obvody – neuróny, ktoré simulujú disjunktívne a konjunktívne klauzuly. V prípade logických obvodov sa jedná o abstrakciu, ktorá ignoruje vnútornú architektúru neurónov a postuluje existenciu elementárnych logických brán pre operácie disjunkcie, konjunkcie a negácie.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať logickými obvodmi, ktoré tvoria základné funkčné jednotky v počítačoch. Logické obvody obsahujú logické brány typu disjunkcie, konjunkcie a negácie, pozri tab. A.1.

Tabuľka 9.1. Logické brány

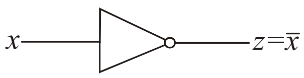
logická brána konjunkcie	Logická brána disjunkcie	Logická brána exkluzívnej disjunkcie
		

x_1	x_2	x_1x_2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	x_1+x_2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	x_1+x_2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

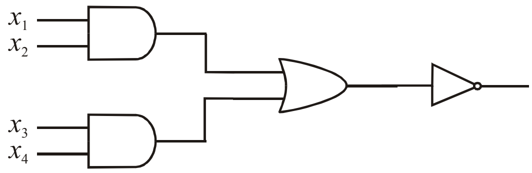
logická brána negácie



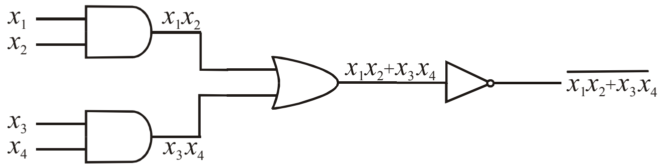
x_1	$\overline{x}_1$
0	1
1	0

Konjunktívna a disjunktívna brána má dva binárne vstupy a jeden binárny výstup, jednoduchšia brána negácie má jeden binárny vstup a jeden binárny výstup.

Príklad 9.14. Zostrojte Boolovu funkciu pre logický obvod



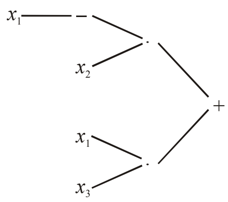
Použitím tabuľky A.1 jednotlivé spoje tohto logického obvodu ohodnotíme takto



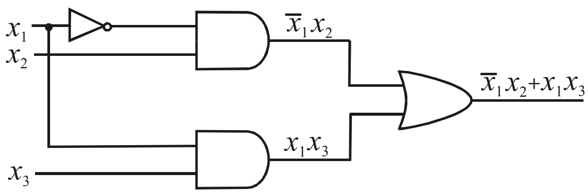
To znamená, že Boolova funkcia priradená tomuto obvodu má tvar

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1x_2+x_3x_4}$$

Príklad 9.15. Zostrojte logický obvod, ktorý simuluje Boolovu funkciu $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x}_1x_2+x_1x_3$. Pre ilustráciu zostrojíme syntaktický strom tejto funkcie



Logický obvod zostrojíme jednoducho z tohto syntaktického stromu, ktorý interpretuje Boolovu funkciu $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x}_1x_2+x_1x_3$, tak, že jednotlivé vrcholy znázorňujúce algebraické operácie nahradíme príslušnými logickými bránami



9.5.1 Sumátor dvoch binárnych čísel (polosumátor)

Technika logických obvodov je aplikovateľná ku konštrukcii súčtu dvoch kladných celých čísel, ktoré sú prezentované v binárnej reprezentácií. Táto konštrukciu obsahuje tri etapy. *Prvá etapa* spočíva v návrhu logického obvodu (nazývaného *polosumátor*) ktorý sčíta dve jednobitové čísla x a y

$$\begin{array}{cc} & x \\ & y \\ \hline c & s \end{array} \tag{9.27}$$

Uvedieme tabuľku všetkých prípadov tejto schémy, ktoré môžu nastať

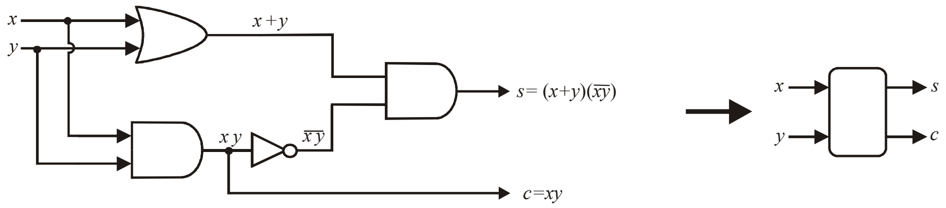
vstup		výstup		
x	y	c	s	
0	0	0	0	
0	1	0	1	(9.28)
1	0	0	1	
1	1	1	0	

Ak použijeme vetu 9.5 výstupné premenné z tejto tabuľky sú určené pomocou sumácie klauzúl (v DNF tvare)

$$s = f(x,y) = \bar{x}y + x\bar{y} = (x+y)(\bar{x}+\bar{y}) = (x+y)(\overline{xy}) \tag{9.29a}$$

$$c = g(x,y) = xy \tag{9.29b}$$

kde pri konštrukcii alternatívnej pravej strany Boolovej funkcie f bol použitý distributívny zákon.



(9.30)

9.5.2 Sumátor troch binárnych čísel (dvojitý sumátor)

*K*onštrukcii logického obvodu (nazývaného *dvojitý sumátor*) pre sčítanie troch jednobitových čísel

$$\begin{array}{r} x \\ y \\ \underline{z} \\ u\,v \end{array} \tag{9.31}$$

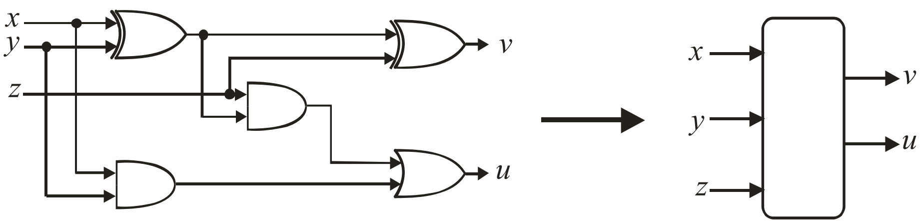
Všetky možné prípady tejto schémy sú uvedené v tabuľke

vstup			výstup		
x	y	z	u	v	
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	1	0	(9.32)
1	0	0	0	1	
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	

Pomocou formuly (9.6) môžeme zostrojiť z tejto tabuľky DNF Boolovu funkciu pre výstupy u a v

$$
\begin{aligned}
u &= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = \left(\bar{x}y + x\bar{y}\right)z + xy\left(z+\bar{z}\right) \\
&= \left(x \oplus y\right)z + xy \\
v &= \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz = \left(\bar{x}y + x\bar{y}\right)\bar{z} + \left(\bar{x}\bar{y} + xy\right)z \\
&= \left(x \oplus y\right) \oplus z
\end{aligned}
\tag{9.33}
$$

Výstupné veličiny u a v môžu byť reprezentované pomocou spoločnečj Boolovej funkcie, ktorá je reprezentované obvodom



(9.34)

9.6 Optimalizácia logických obvodov

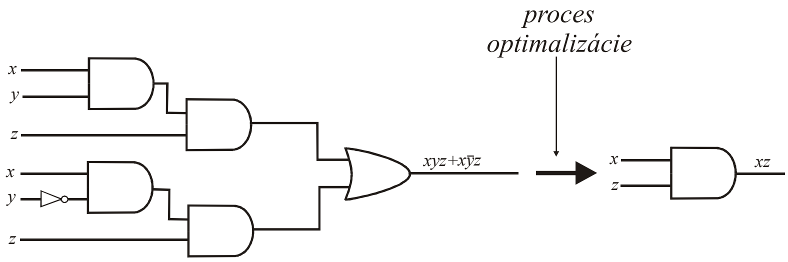
Efektívnosť logických obvodov závisí na počte a prepojení jej logických brán. Proces návrhu logického obvodu začína návrhom tabuľky špecifikujúcej Boolovu funkciu, ktorá transfomuje vstupné binárne veličiny na výstupné binárne veličiny. Boolova funkcia je zostrojená podľa vety 9.5 pomocou súčtu konjunktívnych klauzúl. Aj keď je tento prístup ku konštrukcii Boolovej funkcie všeobecný, veta 9.5 nezaručuje optimálnosť zostrojenej funkcie. Pod optimálnosťou rozumieme to, že Boolova funkcia, ktorá simuluje danú tabuľku funkčných hodnôt pre všetky kombinácie vstupných hodnôt, má minimálny počet literálov.

Uvažujme logický obvod, ktorý má výstup 1 vtedy a len vtedy, ak $x = y = z = 1$ alebo ak $x = z = 1$ a $y = 0$. Boolova funkcia zostrojená podľa vety 9.5, ktorá simuluje tento logický obvod má tvar $f\left(x,y,z\right) = xyz + z\bar{y}z$, môže byť podstatne zjednodušená takto

$$f\left(x,y,z\right) = xyz + x\bar{y}z = x\left(y+\bar{y}\right)z = x \cdot 1 \cdot z = xz$$

To znamená, že táto funkcia xz, ktorá obsahuje dva literály, je ekvivalentná s pôvodnou funkciou obsahujúcej 6 literálov; môžeme teda povedať, že optimálny tvar Boolovej funkcie $f\left(x,y,z\right) = xyz + z\bar{y}z$ je nová funkcia $g\left(x,z\right) = xz$, ktorá aj keď je s pôvodnou ekvivalentná, má podstatne menej literálov.

Tento jednoduchý príklad dostatočne jasne ukazuje dôležitosť hľadať optimálny tvar Boolovej funkcie, pôvodne zostrojene podľa vety 9.5, ak má táto slúžiť ako podklad pre návrh logického obvodu. Optimálny tvar Boolovej funkcie môže v špeciálnych prípadoch podstatné zjednodušiť navrhovaný logický obvodu. Ako ilustračný príklad budeme študovať logické obvody priradené Boolovej funkcii $f\left(x,y,z\right) = xyz + z\bar{y}z$ a jej optimálnej formy $g\left(x,z\right) = xz$



(9.38)

Logický obvod zostrojený pomocou optimálneho tvaru (vpravo), obsahujúceho minimálny počet literálov je podstatne jednoduchší ako logický obvod (vľavo), ktorý obsahuje šesť logických hradiel.

9.6.1 Quinova a McCluskeyho optimalizačná metóda [2,5,6]

Táto metóda patrí medzi často pouižívané prístupy k optimalizácii Boolových funkcií, jej hlavnou prednosťou pred ostatnými prístupmi je jej konceptuálna jednoduchosť a priamočiara algoritmizovateľnosť.

Quinovu a McCluskeyho metóda [2,5,6] bude ilustrovaná konkrétnym prípadom optimalizácie jednoduchej Boolovej funkcie

$$f\left(x,y,z\right)=xyz+x\overline{y}z+\overline{x}yz+\overline{x}\,\overline{y}z+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \qquad (9.39)$$

Každá súčinová klauzula (pozri definícia A.6 a formulu (9.3)) môže byť reprezentovaná bitovým reťazcom $\boldsymbol{e}=\left(e_1,e_2,e_3\right)\in\left\{0,1\right\}^3$

$$l_{\boldsymbol{e}}\left(x,y,z\right)=x^{e_1}y^{e_2}z^{e_3}\rightarrow\left(e_1,e_2,e_3\right) \qquad (9.40)$$

kde $\xi^e=\xi$, ak $e=1$, $\xi^e=\overline{\xi}$, ak $e=0$, pre $\xi=x,y,z$. Pre takto definovanú binárnu reprezentáciu môžeme použiť metriku Hammingovej vzdialenosti ku kvantifikácii podobnosti medzi binárnymi vektormi. Nech $\boldsymbol{e}_i=\left(e_1^{(i)},e_2^{(i)},...,e_n^{(i)}\right)$ a $\boldsymbol{e}_j=\left(e_1^{(j)},e_2^{(j)},...,e_n^{(j)}\right)$ sú dve binárne reprezentácie klauzúl, potom

$$d_H\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|e_k^{(i)}-e_k^{(j)}\right| \qquad (9.41)$$

Táto vzdialenosť pre binárne vektory nám špecifikuje počet polôh v ktorých sa binárne vektory vzájomne odlišujú. Napríklad, ak Hammingova vzdialenosť medzi dvoma binárnymi vektormi je 2, potom tieto vektory sa navzájom odlišujú na dvoch miestach binárneho reťazca.

Každá Boolova formula v DNF forme je 1-1-značne reprezentovaná pomocou množiny bitových reťazcov, ktoré sú priradené jednotlivým klauzulám študovanej formuly. Pre ilustračný príklad (A.39) táto množina obsahuje 5 binárnych reťazcov dĺžky 3

$$U_f=\left\{(111),(101),(011),(001),(000)\right\} \qquad (9.42)$$

Táto možnosť reprezentovať Boolovu funkciu v DNF forme pomocou množiny binárnych vektorov vyplýva zo skutočnosti, že operácia sumácie je komutatívna a asociatívna, čiže nezáleží v akom poradí sčítame jednotlivé klauzuly v Boolovej funkcii.

Dve klauzuly z množiny U_f môžu byť vzájomne sčítané do jednej klauzuly vtedy a len vtedy ak sa líšia ich binárne reťazce práve v jednej polohe, čiže ak ich vzájomná Hammingova vzdialenosť sa rovná 1. Napríklad, z množiny (9.42) vyberieme prvú a druhú klauzulu, ich binárne reprezentácie (111) a (101) sa líšia len hodnotou binárnej premennej v druhej polohe, $d_H(111{,}101)=1$. Tieto dve klauzuly sú sčítané takto

$$xyz + x\overline{y}z = x\left(\underbrace{y+\overline{y}}_{1}\right)z = xz \tag{9.43a}$$

V binárnej reprezentácii tento proces zjednodušenia formálne vyjadríme takto

$$(111)+(101)=sum\left((111),(101)\right)=(1\#1) \tag{9.43b}$$

kde bol použitý nový „*prázdny*“ symbol ´#´, ktorý reprezentuje prázdne miesto v binárnej reprezentácii novej klauzuly *xz*, pozri (A.43a). Takto zostrojené nové klauzuly obsahujúce jeden symbol ´#´ tvoria množinu

$$U_f^{(1)}=\{(1\#1),(\#11),(\#01),(0\#1),(00\#)\} \tag{9.44}$$

V ďalšej etape vytvárame z množiny $U_f^{(1)}$ novú množinu $U_f^{(2)}$, ktorá obsahuje klauzuly s dvoma prázdnymi symbolmi ´#´ a ktoré boli vytvorené operáciou súčtu klauzúl z množiny $U_f^{(1)}$

$$U_f^{(2)}=\{(\#\#1)\} \tag{9.45}$$

Proces sčítania klauzúl obsahujúcich symboly ´#´ musí byť podrobnejšie špecifikovaný:

(a) Sčítať môžeme len také dve klauzuly, ktoré obsahujú rovnaký počet symbolov ´#´, pričom tieto symboly v oboch použitých klauzulách musia byť umiestnené v rovnakých polohách v oboch binárnych reprezentáciách.

(b) Klauzuly, ktoré vyhovujú podmienke (a) môžeme sčítať len vtedy, ak ich binárne komponenty sa líšia len v jednej polohe.

Uvažujme dve klauzuly $\boldsymbol{e}_i=\left(e_1^{(i)},e_2^{(i)},...,e_n^{(i)}\right)$ a $\boldsymbol{e}_j=\left(e_1^{(j)},e_2^{(j)},...,e_n^{(j)}\right)$, ktoré chceme sčítať. Podľa podmienky (a) musí existovať taká množina indexov $I\subseteq\{1,2,...,n\}$, že

$$(\forall k\in I)\left(e_k^{(i)}=e_k^{(j)}=\#\right)\ \text{a}\ (\forall k\notin I)\left(e_k^{(i)},e_k^{(j)}\in\{0,1\}\right) \tag{9.46}$$

Ako príklad uvedieme dvojicu klauzúl $\boldsymbol{e}_i=(10\#0\#11)$ a $\boldsymbol{e}_j=(11\#0\#10)$, pre množinu indexov $I=\{3,5\}$ platia obe podmienky. V prípade, že takáto množina neexistuje, potom klauzuly $\boldsymbol{e}_i=\left(e_1^{(i)},e_2^{(i)},...,e_n^{(i)}\right)$ a $\boldsymbol{e}_j=\left(e_1^{(j)},e_2^{(j)},...,e_n^{(j)}\right)$ nemôžu byť použité v procese sčítania klauzúl. Zavedieme zovšeobecnenú Hammingovu vzdialenosť pre klauzuly, ktoré vyhovujú podmienke (a)

$$d_H\left(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{k\notin I}\left|e_k^{(i)}-e_k^{(j)}\right| \tag{9.47}$$

t. j. v sumácii sú aktívne len binárne členy. Potom podmienka (b) požaduje, že Hammingova vzdialenosť medzi klauzulami musí byť rovná 1. Bez zníženia všeobecnosti môžeme postulovať, že Hammingova vzdialenosť medzi vektormi $\boldsymbol{e}_i=\left(e_1^{(i)},e_2^{(i)},...,e_n^{(i)}\right)$ a $\boldsymbol{e}_j=\left(e_1^{(j)},e_2^{(j)},...,e_n^{(j)}\right)$, ktoré nevyhovujú podmienke (a) (majú buď rôzny počet symbolov symbol ´#´, alebo ak majú rovnaký počet týchto symbolov, potom ich polohy nie sú rovnaké) je nekonečne veľká. Týmto jednoduchým predpokladom máme zabezpečené, že podmienka (a) je splnená.

Zavedieme operátor $\mathcal{A}$, ktorý špecifikuje prechod množiny $U_f^{(k)}$ na množinu $U_f^{(k+1)}$

$$U_f^{(k+1)} = \mathcal{A}\left(U_f^{(k)}\right) \tag{9.48}$$

Musí existovať také kladné celé číslo n, že tento proces tvorby nových množín je ukončený, t. j. platí $U_f^{(n+1)} = \mathcal{A}\left(U_f^{(n)}\right) = \emptyset$. Rekurentný proces (9.48) je inicializovaný množinou $U_f^{(0)} = U_f$. Môžeme hovoriť o etapách procesu tvorby nových klauzúl z pôvodnej (počiatočnej) množiny klauzúl. V 1. etape vytvoríme procesom sčítania dvoch klauzúl z množiny $U_f^{(0)} = U_f$ klauzuly s jedným prázdnym symbolom ´#´, v 2. etape vytvoríme z množiny $U_f^{(1)}$ klauzuly s dvoma symbolmi #. Tento rekuretný proces je ukončený vtedy, ak operátor $\mathcal{A}$ aplikovaný na množinu $U_f^{(n)}$ produkuje prázdnu množinu, t. j. $\mathcal{A}\left(U_f^{(n)}\right) = \emptyset$.

Ako ilustračný príklad rekurentnej tvorby množín $U_f^{(k)}$ použijeme množinu (A.42), výsledky je možné uviesť vo forme tabuľky

0. etapa			1. etapa				2. etapa		
1	(111)		1	(1,2)	(1#1)		1	(1,3), (2,4)	(##1)
2	(101)		2	(1,3)	(#11)				
3	(011)		3	(2,4)	(#01)				
4	(001)		4	(3,4)	(0#1)				
5	(000)		5	(4,5)	(00#)				

V stĺpcoch pre prvú a druhú etapu sú uvedené aj dvojice indexov klauzúl z predchádzajúceho stĺpca, ktoré boli použité v sumačnom procese.

Stojíme pred úlohou, ako vybrať taký minimálny počet klauzúl zostrojených v prvej alebo v ďalších etapách, ktoré sú odvoditeľné zo všetkých pôvodných klauzúl z množiny $U_f^{(0)} = U_f$. K presnej špecifikácii tohto posledného kroku Quinovej a McCluskyeho metódy musíme zaviesť nový pojem „pokrytie“. Klauzula ***e´ pokrýva*** klauzulu $\boldsymbol{e}$, formálne $\boldsymbol{e}' \subseteq \boldsymbol{e}$, vtedy a len vtedy, ak platí pre každé i=1,2,...,n práve jedna z týchto podmienok

1. $\left(e_i' = 1\right) \Rightarrow \left(e_i = 1\right)$
2. $\left(e_i' = 0\right) \Rightarrow \left(e_i = 0\right)$

(9.49)

3. $\left(e_i' = \#\right) \Rightarrow \left(e_i \in \{0,1,\#\}\right)$

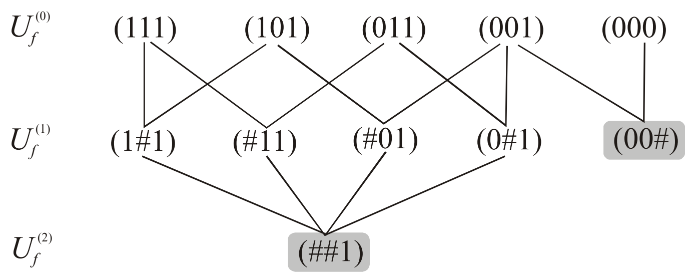
Pre ilustráciu tejto relácie uvedieme jednoduchý ilustračný príklad ktorý vyhovuje týmto podmienkam

0	1	#	1	#	0	1	0	1	$\boldsymbol{e}$
0	1	#	1	#	#	1	0	#	$\boldsymbol{e}'$

Ľahko sa presvedčíme, že sa jedná o ***reláciu čiastočného usporiadania*** nad množinou vektorov $\boldsymbol{e} \in \{0,1,\#\}^n$ (pozri knihu [xx], kapitolu 3.2). Potom množina klauzúl, ktorá vznikne zjednotením množín $U_f^{(0)}$, $U_f^{(1)}$, $U_f^{(3)}$,...

$$\tilde{U}_f = U_f^{(0)} \cup U_f^{(1)} \cup U_f^{(2)} \cup$$

je čiastočne usporiadaná a diagramatický znázornená Hasseho diagramom



Z tohto diagramu vyplýva, že má 5 maximálnych klauzúl (klauzuly patriace do množiny $U_f^{(0)}$) a dve minimálne klauzuly (##1) a (00#), ktoré sú na Hasseho diagrame vysvietené.

Pre každdú klauzulu ***e*** obsahujúcu aspoň jeden prázdny symbol, $e \in U_f^{(1)} \cup U_f^{(2)} \cup \ldots$, zostrojíme množinu $U(\boldsymbol{e}) \subseteq U_f$, ktorá obsahuje všetky pôvodné klauzuly (neobsahujúce prázdne symboly #), ktoré sú pokryté klauzulou ***e***

$$U(\boldsymbol{e}) = \left\{ \boldsymbol{e}' ; \left(\boldsymbol{e}' \in U_f \right) \wedge \left(\boldsymbol{e} \subseteq \boldsymbol{e}' \right) \right\} \tag{9.50}$$

Pre lepšie pochopenie tejto množinovej koncepcie uvedieme príklady tejto množiny vychádzajúce z vyššie uvedeného Hassovho diagramu

$$U(1\#1) = \{(111),(101)\}$$
$$U(\#11) = \{(111),(011)\}$$
$$U(\#01) = \{(101),(001)\}$$
$$U(0\#1) = \{(011),(001)\}$$
$$\boxed{U(00\#)} = \{(001),(000)\}$$
$$\boxed{U(\#\#1)} = \{(1,1,1),(101),(011),(001)\}$$

kde posedné dve klauzuly sú označené ako minimálne

Našim cieľom je vybrať také minimálne klauzuly, ktoré pokrývajú pôvodné klauzuly z množiny $U_f^{(0)}$. Množinu týchto minimálnych klauzúl označíme V, potom v rámci tejto množiny hľadáme takú podmnožinu $\tilde{V} \subseteq V$, ktorej klauzuly plne pokrývajú množinu $U_f^{(0)}$

$$\bigcup_{e \in \tilde{V}} U(e) = U_f \tag{9.51}$$

Podmnožina je určená podmienkou minimálnosti počtu literálov, [$\tilde{V}$], ktoré obsahuje

$$\tilde{V} = arg \min_{V' \subseteq V} [V'] \tag{9.52}$$

Riešenie tohto optimalizačného problému je pre malý počet premenných (cca do päť) obvykle zvládnuteľný ručne tak, že preberieme všetky možnosti, ktoré pokrývajú množinu U_f. Pre väčšie problémy môže byť použitá metóda spätného prehľadávania, ktorá systematicky preskúma všetky možnosti. Žiaľ, tento prístup je nepoužiteľný pre niekoľko desiatok premenných, v dôsledku exponenciálneho rastu zložitosti. V praxi sa používajú rôzne heuristické metódy, ktoré poskytujú kvalitne suboptimálne riešenie, ktoré je často rovné optimálnemu riešeniu. V ďalšej časti tejto kapitoly budeme diskutovať veľmi jednoduchú metódu uskutočnenia optimálneho pokrytia pôvodných (maximálnych klauzúl bez prázdnych symbolov #), ktorú zo súčasného pohľadu algoritmov môžeme nazvat "greedy" metóda [xx].

V tomto konkrétnom príklade sa jedná o extrémne jednoduchý problém, môžeme vybrať obe minimálne klauzuly (##1) a (00#), ktoré pokrývajú pôvodné klauzuly. Potom môžeme písať Boolovu funkciu (7.39) v ekvivalentnom tvare

$$f\left(x,y,z\right)=z+\overline{x}\,\overline{y}$$

čo reprezentuje podstatné zjednodušenie (optimalizáciu) pôvodnej Boolovej funkcie (7.39), ktorej počet literálov z 15 klesol na 3.

Príklad 9.15. Quinova a McCluskeyho metóda pôvodne nevyužívala algoritmus spätného prehľadávanie, bola založená na heuristickom prístupe naformulovanom v podobe tabuliek a ktorý v súčasnosti nazývame „greedy“ metóda . Uvažujme Boolovu funkciu

$$f\left(w,x,y,z\right)=wxy\overline{z}+w\overline{x}yz+\overline{w}xyz+w\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\overline{x}yz+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$$

V nasledujúcej tabuľke je znázornený postup vytvárania všetkých možných sumácií medzi klauzulami (v binárnej reprezentácii) k tejto Boolovej funkcie

0. etapa		1. etapa			2. etapa		
1	(1110)	1	(1,4)	(1#10)	2	(4,7)	(0##1)
2	(1011)	2	(2,4)	(101#)	3	(5,6)	(0##1)
3	(0111)	3	(2,6)	(#011)			
4	(1010)	4	(3,5)	(01#1)			
5	(0101)	5	(3,6)	(0#11)			
6	(0011)	6	(5,7)	(0#01)			
7	(0001)	7	(6,7)	(00#1)			

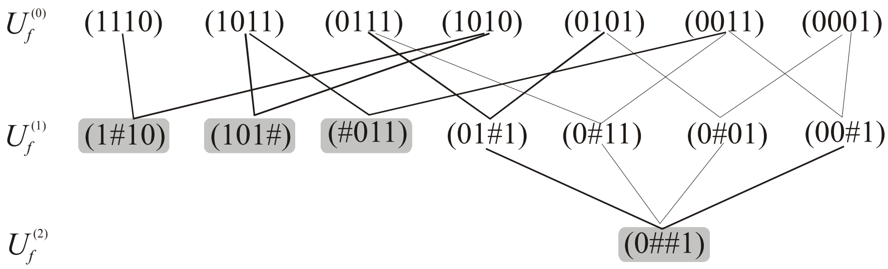
V 0. etape máme zoznam všetkých klauzúl z Boolovej funkcie, množina $U_f^{(0)}$ má tvar

$$U_f^{(0)}=\{(1110),(1011),(0111),(1010),(0101),(0011),(0001)\}$$

V 1. etape vytvoríme sumáciami nové klauzuly, ktoré obsahujú jeden prázdny znak # (tieto klauzuly sú uvedené v šiestom stĺpci vyššie uvedenej tabuľky

$$U_f^{(1)}=\mathcal{A}\left(U_f^{(0)}\right)=\{(1\#10),(101\#),(\#011),(01\#1),\left(0\#11\right),(0\#01),(00\#1)\}$$

V 2. etape vytvoríme množinu kroku množina $U_f^{(2)}=\mathcal{A}\left(U_f^{(1)}\right)=\{\left(0\#\#1\right)\}$ obsahuje už len jednu klauzulu (0##1), ktorá vznikla dvoma alternatívnymi spôsobmi, súčtom klauzúl 5 a 6 resp. 4 a 7 zo 6. stĺpca. Hasseho diagram má tvar



Teraz stojíme pred problémom ako vybrať taký minimálny počet klauzúl, ktoré nám budú pokrývať celú pôvodnú množinu klauzúl. V prvom kroku vyberieme takú minimálnu klauzulu, ktorá pokrýva najväčší počet maximálnych klauzúl. V prípade, že existuje niekoľko rovnocenných minimálnych klauzúl, ktoré pokrývajú rovnaký počet maximálnych klauzúl, tak vyberieme takú minimálnu klauzulu, ktorá má minimálny počet literálov. V tomto prvom kroku vyberieme minimálnu klauzulu (0##1), ktorá pokrýva štyri maximálne klauzuly. V ďalšom kroku máme dve alternatívne možnosti, a to výber minimálnej klauzuly (1#10) alebo výber minimálnej klauzuly (101#). V oboch prípadoch tieto mimimálne klauzuly pokrývajú dve maximálne klauzuly, pretože majú rovnaký počet literálov, tak sú rovnocenné. Na záver máme dve rovnocenné možnosti výberu minimálných klauzúl (101#) resp. (#011), vybrali sme prvú možnosť (101#), tým sme dokázali, že sedem maximálnych klauzúl môže byť pokrytých pomocou troch minimálnych klauzúl (0##1), (1#10) a (101#), ktoré majú dohromady osem literálov. Ekvivalentná (minimálna) Boolova funkcia, ktorá je určená týmito klauzulami má tvar

$$f_1(w,x,y,z) = \overline{w}z + wy\overline{z} + w\overline{x}y$$

Ak by sme vybrali druhú alternatívnu možnosť (#011), potom alternatívny tvar minimálnej Boolovej funkcie je

$$f_2(w,x,y,z) = \overline{w}z + wy\overline{z} + \overline{x}yz$$

Cvičenia

Cvičenie 9.1. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou
(a) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$,
(b) $x + x = \mathbf{0}$,
(c) $x \cdot \mathbf{1} = x$,
c(d) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$.
(e) $x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$

Cvičenie 9.2. Zostrojte tabuľku funkčných hodnôt Boolovej funkcie
(a) $f(x,y,z) = \overline{x}y$,
(b) $f(x,y,z) = x + yz$,
(c) $f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{xyz}$,

Cvičenie 9.3. Znázornite Boolove funkcie $f(x,y,z)$ z cvičenia A.2 na 3-rozmernej kocke tak, že hodnoty 1 (0) budú reprezentované na kocke čiernym (bielym) bodom.

Cvičenie 9.4. Pre ktoré hodnoty x a y platí $xy = x + y$.

Cvičenie 9.5. Zostrojte tabuľku všetkých možných binárnych Boolových funkcií a identifikujte v nej známe Boolove binárne operácie súčinu a súčtu. Vyjadrite ostatné binárne operácie pomocou súčtu, súčinu a komplementu.

Cvičenie 9.6. Riešte nasledujúce rovnice s exkluzívnou disjunkciou
(a) $x \oplus \mathbf{0}$,
(b) $x \oplus \mathbf{1}$,
(c) $x \oplus x$,
(d) $x \oplus \overline{x}$.

Cvičenie 9.7. Dokážte, že platia rovnosti
(a) $x \oplus y = (x+y)\left(\overline{xy}\right)$,
(b) $x \oplus y = \overline{x}y + x\overline{y}$.

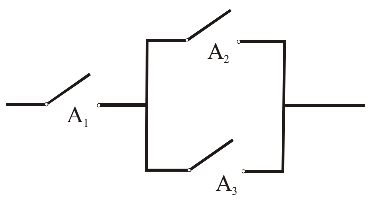
Cvičenie 9.8. Zostrojte duálne výrazy k týmto Boolovym funkciam
(a) $x + y$,
(b) $\overline{x}\,\overline{y}$,
(c) $xyz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

Cvičenie 9.9. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným x, y a z, ktorá má hodnotu **1** vtedy a len vtedy, ak
(a) $x = y = \mathbf{0}, z = \mathbf{1}$,
(b) $x = \mathbf{0}, y = \mathbf{1}, z = \mathbf{0}$,
(c) $y = z = \mathbf{1}$.

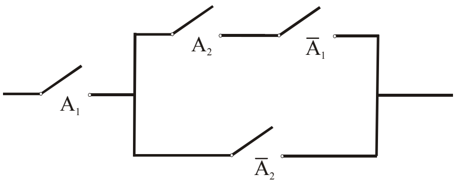
Cvičenie 9.10. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným x, y a z, ktorá je ekvivalentná s funkciou
(a) $F(x,y,z) = x + y + \overline{z}$,
(b) $F(x,y,z) = x\overline{z}$.

Cvičenie 9.11. Zostrojte spínacie funkcie pre spínacie obvody

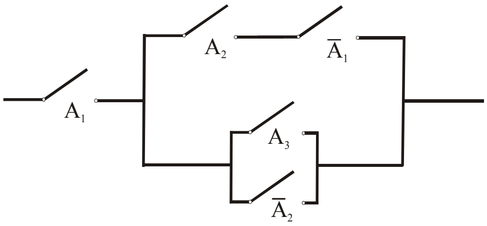
(a)



(b)

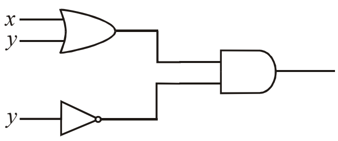


(c)

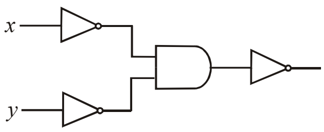


Cvičenie 9.12. Zostrojte tabuľku výstupov logických obvodov

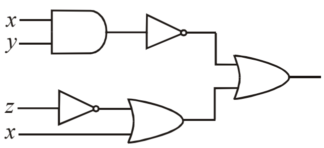
(a)



(b)



(c)



Cvičenie 9.13. Zostrojte logické obvody, ktoré simulujú Boolove funkcie

(a) $\overline{x}+y$,

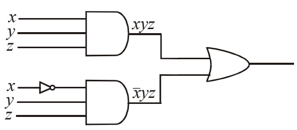
(b) $\left(\overline{x+y}\right)x$,

(c) $xyz+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{x}$,

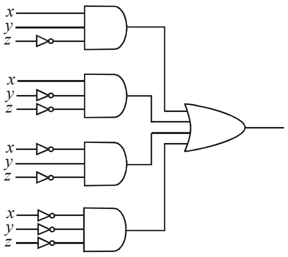
(d) $\overline{\left(\overline{x}+z\right)\left(y+\overline{z}\right)}$.

Cvičenie 9.14. Zjednodušte logické obvody

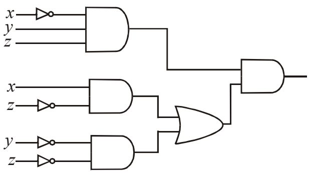
(a)



(b)



(c)



Cvičenie 9.15. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

(a) $wxyz + wx\overline{y}z + wx\overline{y}\,\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\,\overline{y}z$,

(b) $wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$,

(c) $wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$.

Literatúra

[6] Astola, J. T., Stankovic, R. S.:*Fundamentals of Switching Theory and Logic Design*. Springer, Berlin, 2006.

[7] Frištacký, N., Kolesár, M., Kolenička, J., Hlavatý, J.: *Logické systémy*. Alfa, Bratislava, 1990.

[8] Chen, W. K.: *Logic Desing*. CRC Press, Boca Raton, 2003.

[9] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Algebra a diskrétna matematika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008.

[10] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[11] Shannon, C. E.: A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuit. *AIEE Transaction*s, **57** (1938), 713- 723.

Riešenie príkladov z 1. kapitoly

Cvičenie 1.1. Prepíšte z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky:

(a) *Jano pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
p= Jano pôjde na výlet, *q= Fero pôjde na výlet*
(1) Použijeme formulu $(p \wedge q) =_{def} \neg(p \Rightarrow \neg q)$, ktorú môžeme dokázať pomocou de Morganovho vzťahu. Pretransformovaný výrok pomocou implikácie má potom formu: *Nie je pravda, že ak Jano pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet.*
(2) Negácia výroku sa vykoná pomocou $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$, negovaný výrok má formu: *Jano nepojde na výlet alebo Fero nepôjde na výlet*.

(b) *Eva pôjde na výlet alebo Viera nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.
p= Eva pôjde na výlet, *¬q= Viera pôjde na výlet*
(1) $(p \vee \neg q) \equiv (\neg p \Rightarrow \neg q)$, potom pretransformovaná veta má túto formu, *ak Eva nepôjde na výlet, potom Viera nepôjde na výlet*.
(2) Negáciu vykonáme pomocou formule $\neg(p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge q)$, použitím tejto formuly dostaneme: *Eva nepôjde na výlet a Viera pôjde na výlet*.

(c) *Ak Viera pôjde na výlet, potom Fero nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
p= Viera pôjde na výlet, ¬q= Fero nepôjde na výlet.
(1) $(p \Rightarrow \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$, potom pretransformovaná veta má formu: *Viera nepôjde na výlet alebo Fero nepôjde na výlet.*
(2) $\neg(p \Rightarrow \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv (p \wedge q)$, potom negácia vety má formu: *Viera pôjde na výlet a Fero pôjde na výlet.*

(d) *Ak Viera pôjde na výlet alebo Jano pôjde na výlet, potom Fero pôjde na výlet a Eva nepôjde na výlet*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a (2) vykonajte inverziu pôvodnej implikácie.
p= Viera pôjde na výlet, q= Jano pôjde na výlet, r= Fero pôjde na výlet, s= Eva pôjde na výlet.
(1) Veta má tento tvar $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)$, implikáciu odstránime z formule takto $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s) \equiv \neg(p \vee q) \vee (r \wedge \neg s) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s)$, potom pretransformovaná veta má tvar: (*Viera nepôjde na výlet a Jano nepôjde na výlet*) alebo (*Fero pôjde na výlet a Eva nepôjde na výlet*)
(2) Inverzia implikácie sa vykoná pomocou formule $((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) \equiv (\neg(r \wedge \neg s) \Rightarrow \neg(p \vee q)) \equiv ((\neg r \vee s) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$, potom veta má formu: *Ak Fero nepôjde na výlet alebo Eva pôjde na výlet, potom Viera nepôjde na výlet a Jano nepôjde na výlet*

(e) *Viera na výlet pôjde a Eva na výlet nepôjde*; (1) vyjadrite túto vetu pomocou implikácie a negácie a (2) vykonajte negáciu pôvodnej vety.

p= Viera pôjde na výlet, $\neg q$*= Eva nepôjde na výlet*
(1) Veta má tento tvar: $(p \wedge \neg q)$, vyjadrenie tejto formuly pomocou implikácie a negácie má tvar $(p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(p \Rightarrow q)$. Transformovaná veta má tvar: *Nie je pravda, že ak Viera pôjde na výlet, potom Eva pôjde na výlet*.
(2) Negácia pôvodnej vety $\neg(p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$, potom *ak Viera pôjde na výlet, potom Eva pôjde na výlet*.

Cvičenie 1.2. Negujte tieto výroky.
(a) *Budem sa prechádzať alebo budem si spievať.*
Použijeme $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$, potom: *Nebudem sa prechádzať a nebudem si spievať*

(b) *Jano nefandí Slovanu ani Interu.*
Použijeme $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee q)$, potom: *Jano fandí Slovanu alebo Interu.*

(c) *Ak je streda, potom máme schôdzu.*
Použijeme $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg q)$, potom: *Je streda a nemáme schôdzu.*

(d) *Ak sa budem moc učiť, tak pôjdem študovať na vysokú školu.*
Podobne sako v predchádzajúcom príklade: *budem sa moc učiť a nepôjdem študovať na vysokú školu.*

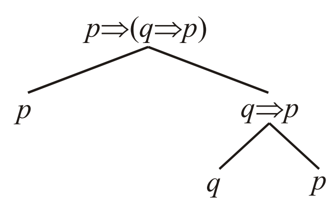
(e) *Ak sa budem moc učiť a budem mať trochu šťastia, potom urobím skúšku z logiky*.
Použijeme formulu $\neg(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \equiv \neg((\neg p \vee \neg q) \vee r) \equiv (p \wedge q \wedge \neg r)$, potom: B*udem sa moc učiť a budem mať trochu šťastia a nerobím skúšku z logiky* .

(f) *Dám ti facku, ak ma oklameš.*
Tento výrok musíme chápať ako implikáciu *ak ma oklameš, potom ti dám facku*, podobne ako v príkladoch (c) a (d): *ak ma oklameš a nedám ti facku.*

(g) *Ak bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto, potom pôjdeme na výlet a budeme sa kúpať.*
Použijeme $\neg((p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)) \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \equiv \neg((\neg p \vee \neg q) \vee (r \wedge s)) =$
$(\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(r \wedge s)) \equiv ((p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \equiv ((p \wedge q) \wedge (r \Rightarrow \neg s))$, potom: *bude pekné počasie a nepokazí sa nám auto a ak pôjdeme na výlet, tak sa nebudeme kúpať.*

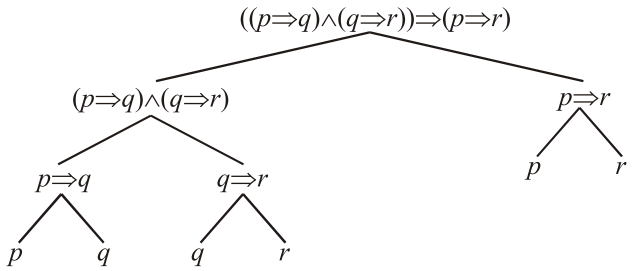
Cvičenie 1.3. Zostrojte syntaktické stromy formúl, zostrojte podformuly daných formúl:

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$



podformuly sú určené pomocou vrcholov podstromov, dostaneme $\{p, q, q \Rightarrow p, p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\}$.

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$



$\{p, q, r, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \Rightarrow r, (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r), ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$

Syntaktické stromy ostatných formúl sa zostroja podobným postupom, nebude ich tu uvádzať.

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

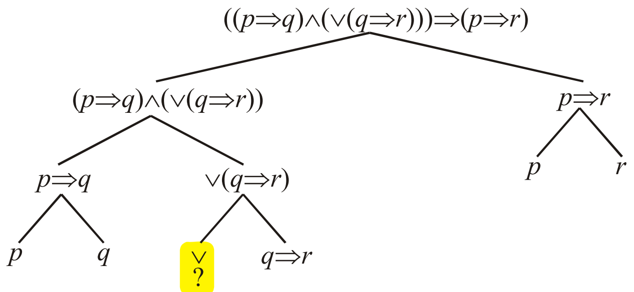
(e) $p \wedge \neg(\neg q \Rightarrow p)$

(f) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$

Cvičenie 1.4. Prečo uvedené výrazy nie sú formuly výrokovej logiky?

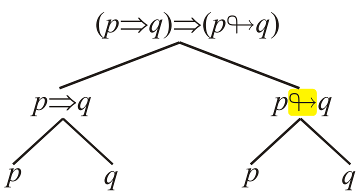
(a) $((p \Rightarrow q) \wedge (\vee(q \Rightarrow r))) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Táto formula obsahuje nekorektnú postupnosť konjunkcie a disjunkcie



(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \looparrowright q)$.

Táto formula obsahuje nepovolený znak $\looparrowright$, ktorý nepatrí medzi logické spojky výrokovej logiky.



Cvičenie 1.5. Preverte pomocou tabuľkovej metódy, ktoré formuly z cvičenia 1.3 sú tautológie, kontradikcie a splniteľné.

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
0	0	1	1

0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, t. j. formula $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ je tautológia.

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$4 \wedge 5$	$7 \Rightarrow 4$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, preto formula $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ je tautológia.

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$5 \Rightarrow 6$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, preto formula $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ je tautológia.

(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

1	2	3	4	5	6
p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee q$	$4 \Rightarrow 5$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Pretože posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, formula $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ je tautológia.

(e) $p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow p)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Pretože posledný stĺpec obsahuje len pravdivostné hodnoty 1, formula $p \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow p)$ je tautológia.

(f) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Pretože posledný stĺpec obsahuje tak 1 ako aj 0, formula $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow q)$ je splniteľná.

Cvičenie 1.6. Použitím tabuľkovej metódy určite pre ktoré interpretácie premenných τ sú výrokové formuly pravdivé:

(a) $((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$,

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\neg r \Rightarrow p$	$((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Interpretácie premenných p, q a r sú: $\tau_1 = (0,0,1), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,0,1), \tau_4 = (1,1,1)$

(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow \neg r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Interpretácie premenných p, q a r sú: $\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (0,1,1)$, $\tau_5 = (1,0,0), \tau_6 = (1,0,1), \tau_7 = (1,1,0)$.

Cvičenie 1.7. Dokážte tieto ekvivalencie:

Poznámka. Pri riešení týchto príkladov použijeme tieto definičné identity
$\left(p \downarrow q\right) =_{def} \neg\left(p \vee q\right)$ (NOR logická spojka)
$\left(p \uparrow q\right) =_{def} \neg\left(p \wedge q\right)$ (NAND logická spojka)
Z týchto dvoch identít odvodíme negácie elementárnych premenných položením $p = q$
$\left(p \downarrow p\right) =_{def} \neg\left(p \vee p\right) = \neg p$
$\left(p \uparrow p\right) =_{def} \neg\left(p \wedge p\right) = \neg p$

(a) $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$$\left(\neg(p \vee q) = (p \downarrow q)\right) \to \left(\neg p \wedge \neg q = (p \downarrow q)\right) \to \left(p \wedge q = (\neg p \downarrow \neg q)\right)$$
$$\to p \wedge q = \left((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\right)$$

(b) $(p \vee q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$$\left(\neg(p \vee q) = (p \downarrow q)\right) \to \left((p \vee q) = \neg(p \downarrow q)\right) \to \left((p \vee q) = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\right)$$

(c) $(p \wedge q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$,

$$\left(\neg(p \wedge q) = (p \uparrow q)\right) \to \left(\neg p \vee \neg q = (p \uparrow q)\right) \to \left(p \vee q = (\neg p \uparrow \neg q)\right)$$
$$\to p \vee q = \left((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)\right)$$

(d) $(p \vee q) \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

$$\left(\neg(p \wedge q) = (p \uparrow q)\right) \to \left((p \wedge q) = \neg(p \uparrow q)\right) \to \left((p \wedge q) = (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)\right)$$

Cvičenie 1.8. Pretransformujte do DNF a KNF výrokové formuly:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$
DNF: $\left((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)\right) \equiv (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$
KNF: $\left((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)\right) \equiv \left((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)\right)$

(b) $\neg(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow p$
DNF: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p)$
KNF: $(p) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) $\left(((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p\right)$
DNF: $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p)$
KNF: $(p \vee p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg q) = 1$

Cvičenie 1.9. Zostrojte DNF a KNF Boolovej funkcie určenej tabuľkou

#	x_1	x_2	x_3	α
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

$$\varphi_{DNF} = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$$
$$\varphi_{KNF} = \left(x_1 + \overline{x}_2 + x_3\right)\cdot\left(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right)\cdot\left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3\right)\cdot\left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right)$$

Cvičenie 1.10. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčin dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \times\,\alpha_3\ \alpha_4 \\ \hline \beta_4\ \beta_3\ \beta_2\ \beta_1 \end{array}$$

Tabuľka všetkých možných hodnôt argumentov a priradených výsledkov má tvar

#	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4	Interpretácia
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0×0=0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0×1=0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0×2=0
4	0	0	1	1	0	0	0	0	0×3=0
5	0	1	0	0	0	0	0	0	1×0=0
6	0	1	0	1	0	0	0	1	1×1=1
7	0	1	1	0	0	0	1	0	1×2=2
8	0	1	1	1	0	0	1	1	1×3=3
9	1	0	0	0	0	0	0	0	2×0=0
10	1	0	0	1	0	0	1	0	2×1=2
11	1	0	1	0	0	1	0	0	2×2=4
12	1	0	1	1	0	1	1	0	2×3=6
13	1	1	0	0	0	0	0	0	3×0=0
14	1	1	0	1	0	0	1	1	3×1=3
15	1	1	1	0	0	1	1	0	3×2=6
16	1	1	1	1	1	0	0	1	3×3=9

$$\beta_1 = \left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right)$$

$$\beta_2 = \left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right) \vee \left(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4\right) \vee$$
$$\left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4\right)$$

$$\beta_3 = (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4)$$

$$\beta_4 = (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)$$

Cvičenie 1.11. Zostrojte Boolovu funkciu $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ pomocou ktorej je implementovaný súčet dvoch binárnych čísel $(\alpha_1\alpha_2)$ a $(\alpha_3\alpha_4)$

$$\begin{array}{r} \alpha_1\ \alpha_2 \\ \underline{\alpha_3\ \alpha_4} \\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \end{array}$$

Tabuľka všetkých možných hodnôt argumentov a priradených výsledkov má tvar

#	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	Interpretácia
1	0	0	0	0	0	0	0	0+0=1
2	0	0	0	1	0	0	1	0+1=1
3	0	0	1	0	0	1	0	0+2=2
4	0	0	1	1	0	1	1	0+3=3
5	0	1	0	0	0	0	1	1+0=1
6	0	1	0	1	0	1	0	1+1=2
7	0	1	1	0	0	1	1	1+2=3
8	0	1	1	1	1	0	0	1+3=4
9	1	0	0	0	0	1	0	2+0=2
10	1	0	0	1	0	1	1	2+1=3
11	1	0	1	0	1	0	0	2+2=4
12	1	0	1	1	1	0	1	2+3=5
13	1	1	0	0	0	1	1	3+0=3
14	1	1	0	1	1	0	0	3+1=4
15	1	1	1	0	1	0	1	3+2=5
16	1	1	1	1	1	1	0	3+3=6

$$\beta_1 = (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)$$
$$\beta_2 = (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)$$
$$\beta_3 = (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4) \vee$$
$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \neg\alpha_4)$$

Cvičenie 1.12. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme konjuktívnej a disjunktívnej normálnej formy

(a) $x=y=0, z=1$, $f_{DNF}(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\,z$, $f_{KNF}(x,y,z)=x+y+\overline{z}$.

(b) $x=0, y=1, z=0$, $f_{DNF}(x,y,z)=\overline{x}\,y\,\overline{z}$, $f_{KNF}(x,y,z)=x+\overline{y}+z$.

(c) $y=z=1$, $f_{DNF}(x,y,z)=x\,y\,z+\overline{x}\,y\,z=\left(\underbrace{x+\overline{x}}_{1}\right)yz=yz$, $f_{KNF}(x,y,z)=\overline{y}+\overline{z}$.

Cvičenie 1.13. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným x, y a z (DNF forme), ktorá je ekvivalentná s funkciou $F(x,y,z)$.

(a) $F(x,y,z)=x+y+\overline{z}$,

$$\begin{aligned}
F(x,y,z)=x+y+\overline{z}&=x(y+\overline{y})(z+\overline{z})+(x+\overline{x})y(z+\overline{z})+(x+\overline{x})(y+\overline{y})\overline{z}\\
&=x\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,z+x\,\overline{y}\,\overline{z}\\
&\quad+x\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,z+\overline{x}\,y\,\overline{z}\\
&\quad+x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\\
&=x\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,\overline{z}+\overline{x}\,y\,z
\end{aligned}$$

(b) $F(x,y,z)=x\overline{z}$

$$F(x,y,z)=x(y+\overline{y})\overline{z}=x\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,\overline{z}\,.$$

Riešenie príkladov z 2. kapitoly

Cvičenie 2.1. Nájdite model pre tieto formuly

(g) $\psi = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

$[\![\psi]\!] = \{0,1\}^2$ (tautolóogia)|

(h) $\psi = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

$[\![\psi]\!] = \{0,1\}^3$ (tautolóogia)

(i) $\psi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$[\![\psi]\!] = \{0,1\}^2$ (tautolóogia)

(j) $\psi = (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

$[\![\psi]\!] = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (0,1), \tau_3 = (1,0)\}$ (splniteľná)

(k) $\psi = p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$

$[\![\psi]\!] = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (0,1), \tau_3 = (1,0)\}$ (splniteľná)

(l) $\psi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee r)$.

$[\![\psi]\!] = \{\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (1,0,1), \tau_5 = (0,1,1), \tau_6 = (1,1,0), \tau_7 = (1,1,1)\}$
(splniteľná)

Cvičenie 2.2. Dokážte, že pre teóriu Φ a pre formulu φ platí $\Phi \vdash \varphi$

(a) $\Phi = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$, $\varphi = r$,

$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (1,1,1)\}$,

$[\![\varphi]\!] = \{\tau_1 = (0,0,1), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,0,1), \tau_4 = (1,1,1),\}$,

platí $[\![\Phi]\!] \subset [\![\varphi]\!]$, potom $\Phi \vdash \varphi$.

(b) $\Phi = \{p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q\}$, $\varphi = p \Rightarrow r$,

$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (0,1,0), \tau_2 = (0,1,1), \tau_3 = (1,1,1)\}$

$[\![\varphi]\!] = \{\tau_1 = (0,0,0), \tau_2 = (0,0,1), \tau_3 = (0,1,0), \tau_4 = (0,1,1), \tau_5 = (1,0,1), \tau_5 = (1,1,1)\}$

platí $[\![\Phi]\!] \subset [\![\varphi]\!]$, potom $\Phi \vdash \varphi$.

(c) $\Phi = \{p, \neg p\}$, $\varphi = q$,

$[\![\Phi]\!] = \varnothing$,

$[\![\varphi]\!] = \{\tau_1 = (0,0), \tau_2 = (1,0)\}$

platí $[\![\Phi]\!] \subset [\![\varphi]\!]$, potom $\Phi \vdash \varphi$, t. j. $p \wedge \neg p \Rightarrow q$ (tautológia).

Cvičenie 2.3. Zostrojte pre danú teóriu Φ formulu φ, ktorá je jej sémantickým dôsledkom

(a) $\Phi = \{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow q\}$, $\varphi = q$

(b) $\Phi = \{p \Rightarrow q \vee r, q\}$, $\varphi = q$

(c) $\Phi = \{p \Rightarrow q \wedge r, q\}$

(d) $\Phi = \{p \wedge q \Rightarrow r, p\}$,

(e) $\Phi = \{p \vee q \Rightarrow r, p\}$.

Cvičenie 2.4. Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

(1) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}}{\emptyset}$, (2) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ q \end{matrix}}{\emptyset}$, (3) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{matrix}}{\emptyset}$, (4) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{matrix}}{\neg p}$,

(5) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}}{\emptyset}$, (6) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ q \end{matrix}}{\emptyset}$, (7) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \end{matrix}}{q}$, (8) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \end{matrix}}{p}$,

(9) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow \neg q \\ p \end{matrix}}{\neg q}$, (10) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow \neg q \\ q \end{matrix}}{\neg p}$, (11) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \end{matrix}}{\emptyset}$, (12) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \end{matrix}}{\emptyset}$,

(13) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow \neg q \\ p \end{matrix}}{\emptyset}$, (14) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow \neg q \\ q \end{matrix}}{p}$, (15) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \end{matrix}}{\neg q}$, (16) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \end{matrix}}{\emptyset}$,

Cvičenie 2.5. Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

(1) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{matrix}}{p \Rightarrow r}$, (2) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow r \end{matrix}}{p \Rightarrow q \wedge r}$, (3) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow q \end{matrix}}{p \vee r \Rightarrow q}$, (4) $\dfrac{\begin{matrix} p \Rightarrow \neg q \\ q \Rightarrow r \end{matrix}}{q \Rightarrow \neg p \wedge r}$, (5) $\dfrac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{matrix}}{\neg p \Rightarrow r}$

Cvičenie 2.6. Overte správnosť/nesprávnosť dôsledkov, v prípade nesprávneho dôsledku upravte predpoklady tak, aby dôsledok bol správny:

(a) Ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd.
Ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár.
Prúd ide.

Ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár.

Elementárne výroky:
p = motor beží,
q = motor je chybný,
r = ide prúd,
s = musí sa zavolať opravár.

1. predpoklad: $\varphi_1 = (\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$

2. predpoklad: $\varphi_2 = (q \Rightarrow s)$
3. predpoklad: $\varphi_3 = r$

záver: $\varphi = (\neg p \Rightarrow s)$

1.	$\neg p$	(aktivácia predpokladu)
2.	$(\neg p) \Rightarrow (q \vee \neg r)$	(1. predpoklad)
3.	$q \Rightarrow s$	(2. predpoklad)
4.	r	(3. predpoklad)
5.	$(q \vee \neg r) = (r \Rightarrow q)$	(aplikácia modus ponens na 1. a 2.)
6.	q	(aplikácia modus ponens na 4. a 5.)
7.	s	(aplikácia modus ponens na 3. a 6.)
8.	$\neg p \Rightarrow s$	(deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(b) Je doma alebo je v kaviarni.
Ak je doma, potom vás očakáva.

Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni.

Elementárne výroky:
p = je doma,
q = je v kaviarni,
r = očakáva vás.

1. predpoklad: $\varphi_1 = (p \vee q)$
2. predpoklad: $\varphi_2 = (p \Rightarrow r)$

záver: $\varphi = (\neg r \Rightarrow q)$

1.	$\neg r$	(aktivácia predpokladu)
2.	$p \vee q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	(1. predpoklad)
3.	$p \Rightarrow r$	(2. predpoklad)
4.	$\neg p$	(modus tollens pre 1. a 3.)
5.	q	(modus ponens pre 2. a 4.)
6.	$\neg r \Rightarrow q$	(deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

(c) Nie je pravda, že študent vie po nemecky a anglicky.
Študent nevie po anglicky.

Študent nevie po nemecky.

Elementárne výroky:
p = študent vie po nemecky,
q = študent vie po anglicky,

1. predpoklad: $\varphi_1 = \neg(p \wedge q) = (\neg p \wedge \neg q) = (p \Rightarrow \neg q)$

2. predpoklad: $\varphi_2 = \neg q$

záver: $\varphi = \neg p$

Záver nie je dokázateľný, ak sa však predpoklady zmodifikujú takto:

Nie je pravda, že študent vie po nemecky a nevie po anglicky.
Študent nevie po anglicky.

Študent nevie po nemecky.

1. predpoklad: $\varphi_1 = \neg(p \wedge \neg q) = (\neg p \wedge q) = (p \Rightarrow q)$

2. predpoklad: $\varphi_2 = \neg q$

záver: $\varphi = \neg p$

Záver jednoducho odvodíme aplikáciou modus tollens na 1. a 2.

(d) Ak študujem, získam dobré postavenie.
Ak neštudujem, potom si užívam.

Užívam si alebo dosiahnem dobré postavenie.

Elementárne výroky:
p = študujem,
q = získam dobré postavenie,
r = užívam si

1. predpoklad: $\varphi_1 = p \Rightarrow q$

2. predpoklad: $\varphi_2 = \neg p \Rightarrow r$

záver: $\varphi = (q \vee r) \equiv (\neg q \Rightarrow r)$

1.	$\neg q$	(aktivovaný predpoklad)
2.	$p \Rightarrow q$	(1. predpoklad)
3.	$\neg p \Rightarrow r$	(2. predpoklad)
4.	$\neg p$	(aplikácia modus tollens na 1. a 2.)
5.	r	(aplikácia modus ponens na 3. a 4.)
6.	$(\neg q \Rightarrow r) \equiv (q \vee r)$	(deaktivácia predpokladu)

Týmto sme dokázali, že záver je dokázateľný z predpokladov.

Cvičenie 2.7. Aké sú dôsledky týchto predpokladov:
(a)
Karol pocestuje vlakom alebo autobusom
Ak pocestuje Karol autobusom alebo autom, potom pricestuje neskoro
Karol nepricestoval neskoro

?
Riešenie: Karol pricestoval vlakom.

(b)

Karol pocestuje vlakom alebo lietadlom
ak pocestuje lietadlom, potom navštívi priateľov
nenavštívilo priateľov

?
Riešenie: Karol pocestuje vlakom.

(c)
ak pocestujem do zahraničia, potom si zoberiem dovolenku
ak si zoberiem dovolenku, potom som necestoval do zahraničia

?
Riešenie: Nepocestujem do zahraničia.

(d)
nie som občanom štátu XY
ak by som sa narodil v AB, potom by som bol občanom XY

?
Riešenie: Nenarodil som sa v AB

(e)
som absolventom univerzity v PQ
ak by som bol sociológom, potom nemôžem byť absolventom univerzity v PQ

?
Riešenie: Nie som sociológom

(f)
som učiteľom a taktiež som aj informatikom

---

ak je niekto informatikom, potom má vysoké IQ

?

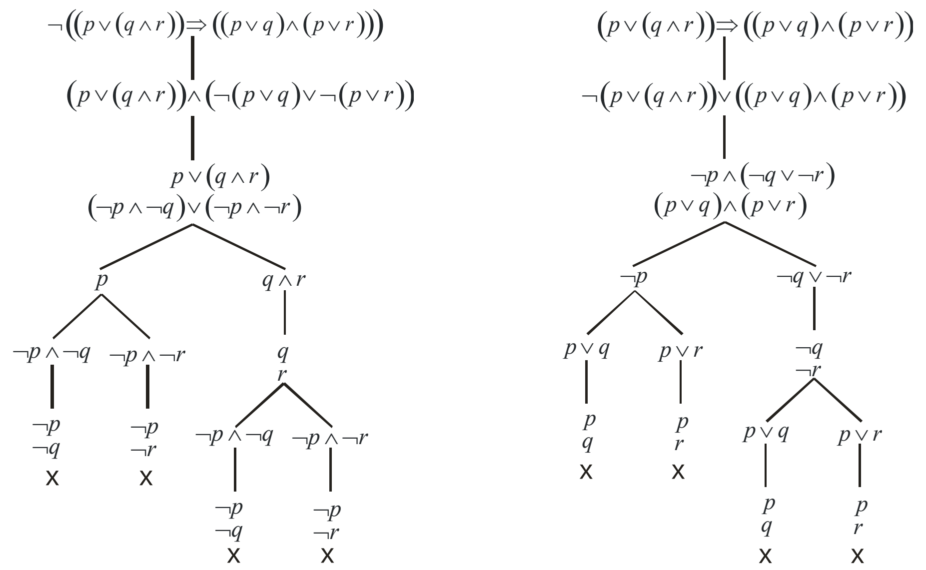
(g)
Jano je informatikom
ak je Jano informatikom alebo matematikom, potom studoval v CD

?
Riešenie: Mám vysoké IQ.

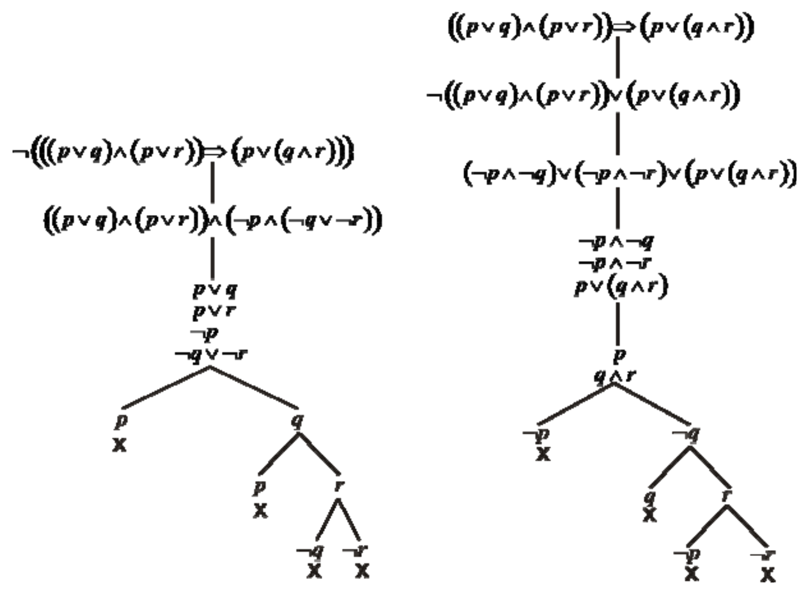
Riešenie príkladov z 3. kapitoly

Cvičenie 3.1. Pomocou metódy sémantických tabiel a konjugovaných sémantických tabiel dokážte, že formuly sú tautológie

(a) $\left(p\vee\left(q\wedge r\right)\right)\Rightarrow\left(\left(p\vee q\right)\wedge\left(p\vee r\right)\right)$,

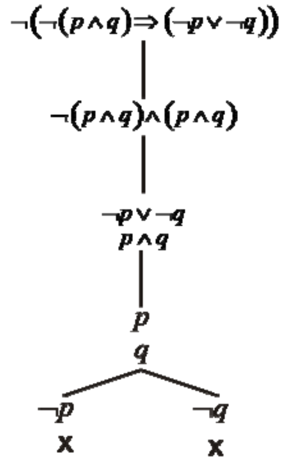


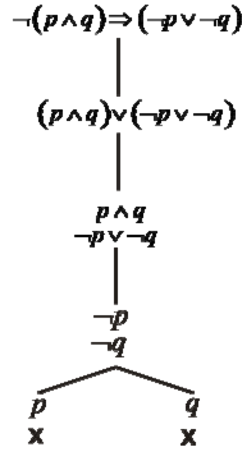
(b) $\left(\left(p\vee q\right)\wedge\left(p\vee r\right)\right)\Rightarrow\left(p\vee\left(q\wedge r\right)\right)$,

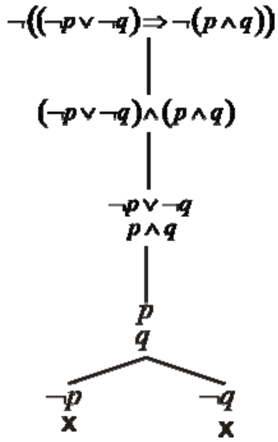


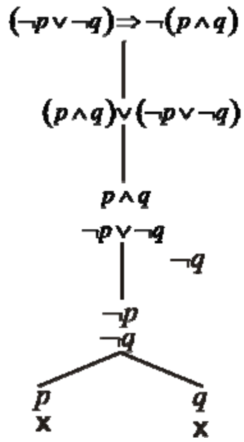
(c) $\neg\left(p\wedge q\right)\equiv\left(\neg p\vee\neg q\right)$.

Sémantické tablá zostrojíme pre dve formuly $\neg\left(p\wedge q\right)\Rightarrow\left(\neg p\vee\neg q\right)$ a $\left(\neg p\vee\neg q\right)\Rightarrow\neg\left(p\wedge q\right)$

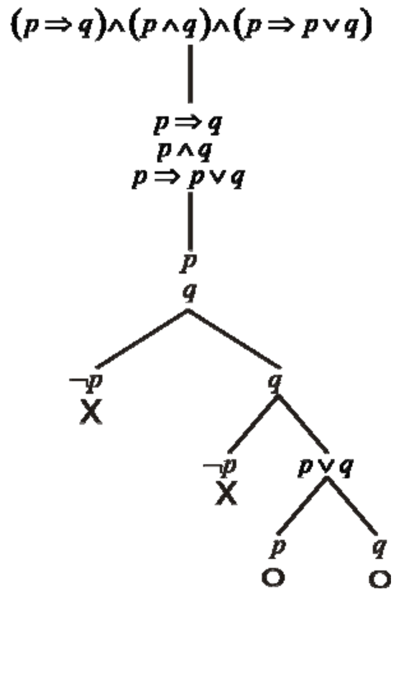






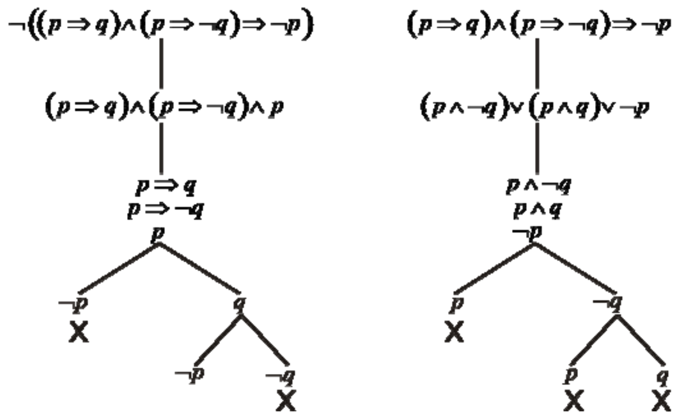


Cvičenie 3.2. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte, že množina formúl $\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow q, p \wedge q, p \Rightarrow p \vee q\}$ je neprotirečivá (t.j. existuje aspoň jedna špecifikácia premenných $\tau_1 = (p/?, q/?)$, pre ktorú sú všetky formuly z $\boldsymbol{T}$ pravdivé).

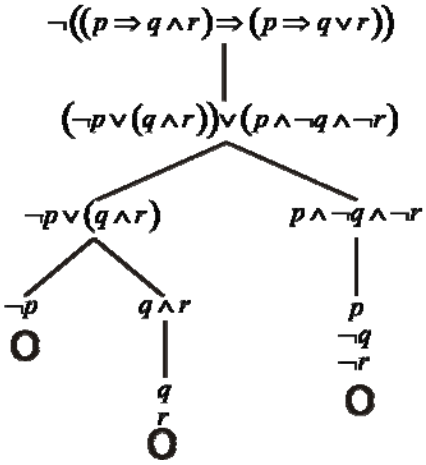


Cvičenie 3.3. Pomocou sémantických tabiel a duálnych sémantických tabiel zistite, či formuly sú tautológie, splniteľné alebo kontradikcie

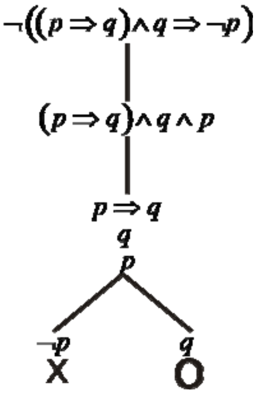
(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$,



(b) $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$,

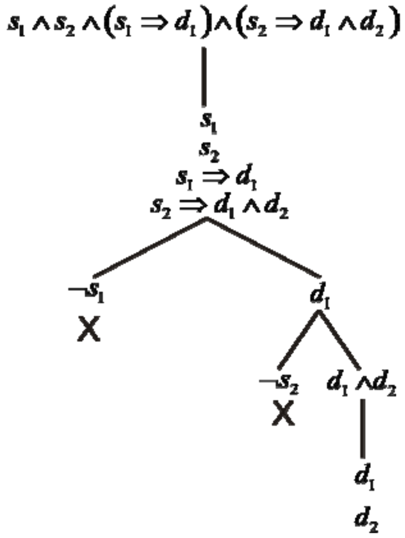


(c) $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow \neg p$.

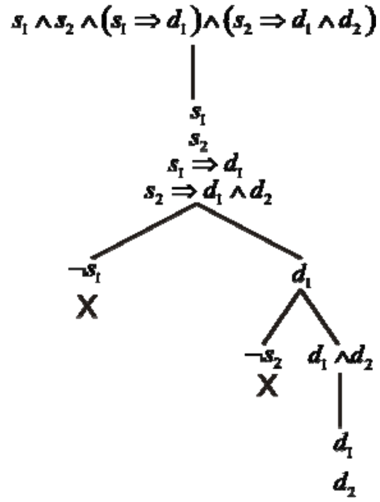


Cvičenie 3.4. Pomocou sémantických tabiel dokážte konzistentnosť alebo nekonzistentnosť teórií

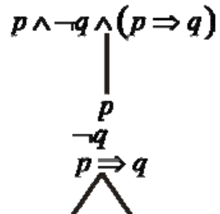
(a) $\boldsymbol{T} = \{s_1, s_2, s_1 \Rightarrow d_1, s_2 \Rightarrow d_1 \wedge d_2\}$,



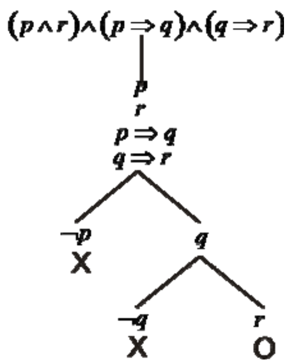
(b) $\boldsymbol{T} = \{s_1, s_2, s_1 \Rightarrow d_1, s_2 \Rightarrow \neg d_1 \wedge d_2\}$,



(c) $\boldsymbol{T} = \{p, \neg q, p \Rightarrow q\}$,

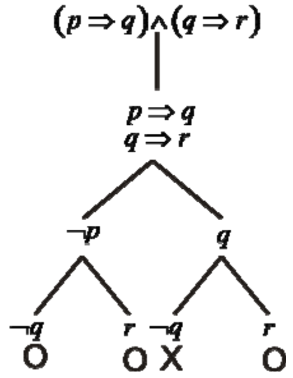


(d) $\boldsymbol{T} = \{p \wedge r, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r)\}$



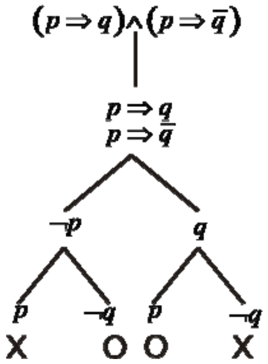
Cvičenie 3.5. Pomocou metódy sémantických tabiel riešte reláciu $\Phi \vDash ?$, kde $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ je množina (teória) formúl výrokovej logiky, cieľom úlohy je určiť takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ.

(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash ?$



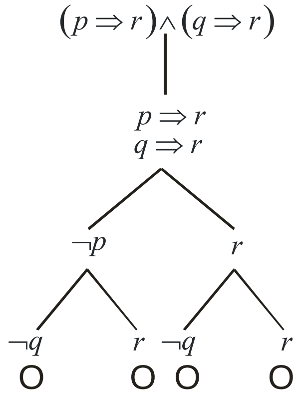
$$\varphi = \bar{p}\,\bar{q} + \bar{p}r + qr = \bar{p}(\underbrace{\bar{q} + r}_{1}) + (\underbrace{\bar{p} + q}_{1})r = p \Rightarrow r$$

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \vDash ?$



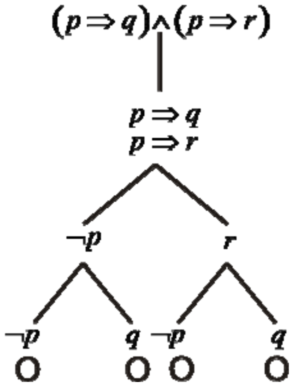
$$\varphi = \bar{p}\,\bar{q} + \bar{p}q = \bar{p}(\bar{q} + q) = \bar{p}$$

(c) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \vDash ?$



$$\varphi = \bar{p}\,\bar{q} + \bar{p}r + r\bar{q} + r = \overline{pq} + (\bar{p} + \bar{q} + 1)r = \neg(p + q) + r = p \vee q \Rightarrow r$$

(d) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash ?$



$\varphi = \overline{p} + \overline{p}q + \overline{p}r + qr = \overline{p}\left(1 + q + r\right) + qr = p \Rightarrow q \wedge r$

Cvičenie 3.6. Zostrojte rezolventy pre tieto disjunktívne klauzuly:
(a) $x \vee \neg y \vee z$ a $\neg x \vee z \vee \neg t$

$$C_r\left(x \vee \neg y \vee z, \neg x \vee z \vee \neg t\right) = \neg y \vee z \vee \neg t$$

(b) $a \vee b$ a $\neg b \vee c$

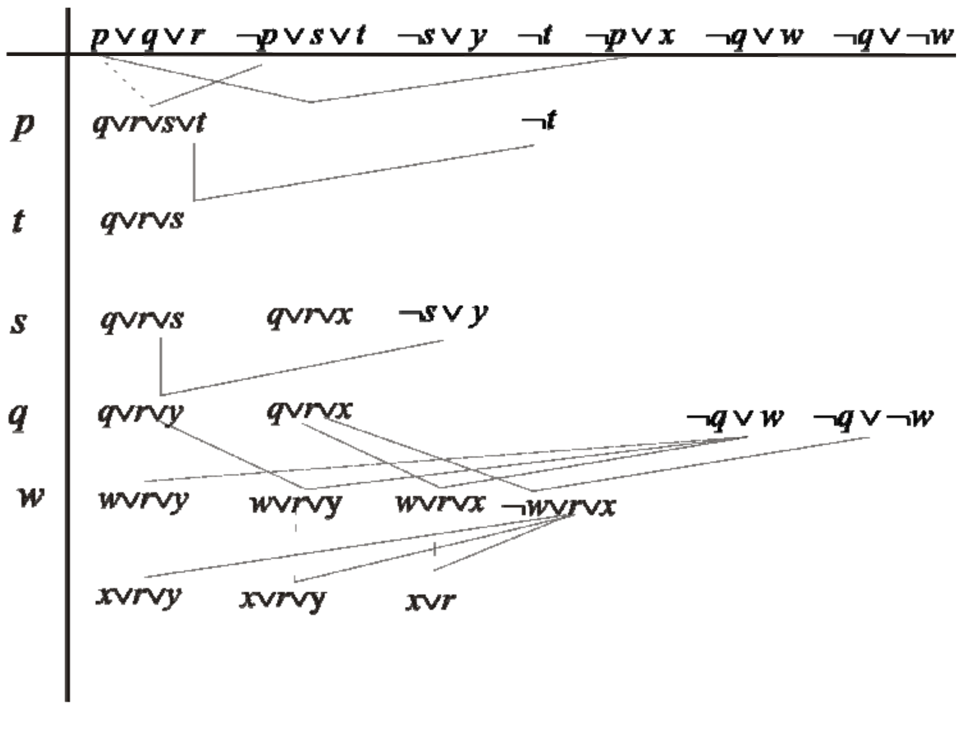
$$C_r\left(a \vee b, \neg b \vee c\right) = a \vee c$$

(c) $p \vee q \vee r \vee \neg s$ a $p \vee q \vee s \vee \neg t$

$$C_r\left(p \vee q \vee r \vee \neg s, p \vee q \vee s \vee \neg t\right) = p \vee q \vee r \vee \neg t$$

Cvičenie 3.7. Vytvorte množinu $R\left(T\right)$ pre $T = \left\{\neg a \vee b, \neg b \vee c, a \vee d, a \vee \neg c, a \vee \neg d\right\}$

Cvičenie 3.8. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či množina ***T*** má model:
(a) $\boldsymbol{T} = \left\{p \vee q \vee r, \neg p \vee s \vee t, \neg s \vee y, \neg t, \neg p \vee x, \neg q \vee w, \neg q \vee \neg w\right\}$



(b) $T = \{a, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg d \vee f, \neg d \vee b, \neg c \vee g, \neg f \vee g, \neg g\}$

(c) $T = \{x \vee y, \neg z \vee t, \neg x \vee t, \neg y \vee z, \neg t\}$

(d) $T = \{p \Rightarrow (r \vee s), \neg p \Rightarrow q, r \Rightarrow (t \wedge v), (t \wedge v) \Rightarrow s\}$

(e) $T = \{a \Rightarrow (b \wedge f), (a \wedge b) \Rightarrow c, c \Rightarrow (f \Rightarrow (\neg d \vee f)), a\}$

Cvičenie 3.10. Použitím rezolučnej metódy a sémantických tabiel rozhodnite či množina formúl T má model a či formula α je tautologickým dôsledkom T, $T \vDash \alpha$.

(a) $T = \{x \Rightarrow y, y \Rightarrow (z \vee \neg x), \neg t \Rightarrow (t \wedge \neg z), t \Rightarrow x\}$, $\alpha = z$

(b) $T = \{p, (p \wedge r) \Rightarrow s, (p \wedge q) \Rightarrow t, q \Rightarrow r, (s \vee t) \Rightarrow w\}$, $\alpha = w$

Cvičenie 3.11. Formalizujte tieto výroky. Použitím rezolučnej metódy rozhodnite či výrok pod čiarou je tautologický dôsledok výrokov nad čiarou.

(a)
Ak prší, potom nepôjdeme na prechádzku
Ak nepôjdeme na prechádzku, potom pôjdeme do kina
ak pôjdeme do kina a bude pršať, potom použijeme autobus
prší

---

pôjdeme do kina

Zavedieme tieto elementárne výroky:
p = prší,
q = pôjdeme na prechádzku,
r = pôjdeme do kina,
s = použijeme autobus

Zadanie príkladu môžeme preformulovať takto:
$(\boldsymbol{T} = \{p \Rightarrow \neg q, \neg q \Rightarrow r, r \wedge p \Rightarrow s, p\}) \vDash r$, alebo
$\varphi = (p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \Rightarrow r) \wedge (r \wedge p \Rightarrow s) \wedge p \Rightarrow r$. Pomocou rezolventy budeme dokazovať, že formula $\neg\varphi = (p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \Rightarrow r) \wedge (r \wedge p \Rightarrow s) \wedge (p) \wedge (\neg r)$ je kontradikcia. Ak sa nám to podarí dokázať, potom platí $\boldsymbol{T} \vDash r$ (výrok r je tautologickým dôsledkom $\boldsymbol{T}$). KNF tvar negácie $\neg\varphi$ je

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee s) \wedge (p) \wedge (\neg r)$$

	1	2	3	4	5					
	$\neg p \vee \neg q$	$q \vee r$	$\neg r \vee \neg p \vee s$	p	$\neg r$	6				
q	0	1				$\neg p \vee r$	7	8		
p			0	1		0	$\neg r \vee s$	r	9	10
r					0		0	1	$\square$	s

To znamená, že $\boldsymbol{T} \vDash r$.

(b)
Peter alebo Pavol pôjde do Grécka
Ak Pavol pôjde do Grécka, potom taktiež pôjde aj Renáta a Simona nepôjde
Ak Tomáš pôjde do Grécka, potom pôjde taktiež aj Renáta

Ak Simona

pôjde do Grécka, potom taktiež pôjde aj Tomáš

Peter pôjde do Grécka

Zavedieme tieto elementárne výroky:
p = Peter pôjde do Grécka,
q = Pavol pôjde do Grécka,
r = Renata pôjde do Grécka,
s = Simona pôjde do Grécka,
u = Tomáš pôjde do Grécka
Zadanie príkladu môžeme preformulovať takto: $\underbrace{\{p \vee q, q \Rightarrow r \wedge \neg s, u \Rightarrow r, s \Rightarrow u\}}_{\boldsymbol{T}} \models p$

Budeme študovať formulu

$$(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r \wedge \neg s) \wedge (u \Rightarrow r) \wedge (s \Rightarrow u) \wedge (\neg p)$$

prepíšeme ju do KNF

$$(p \vee q) \wedge \underbrace{(\neg q \vee (r \wedge \neg s))}_{(\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg s)} \wedge (\neg u \vee r) \wedge (\neg s \vee u) \wedge (\neg p)$$

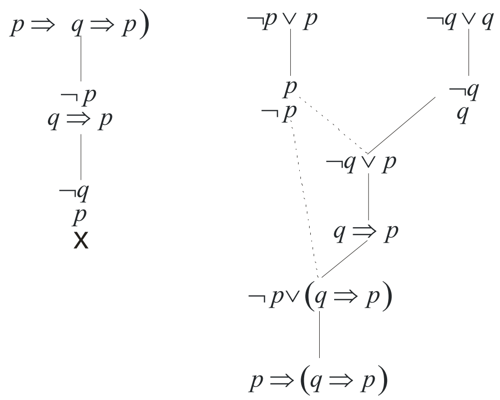
	1	2	3	4	5	6			
	$p \vee q$	$\neg q \vee r$	$\neg q \vee \neg s$	$\neg u \vee r$	$\neg s \vee u$	$\neg p$	7		
p	1					0	q	8	9
q		0	0				1	r	$\neg s$
r				1				1	
s					0				0

To znamená, že $\boldsymbol{T} \not\models p$.

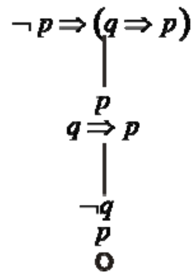
Riešenie príkladov z 4. kapitoly

Cvičenie 4.1. Pomocou metódy duálnych sémantických tabiel zistite, či formula je tautológia, splniteľná alebo kontradikcia, ak je tautológia vykonajte inverziou tabla dôkaz pomocou prirodzenej dedukcie.

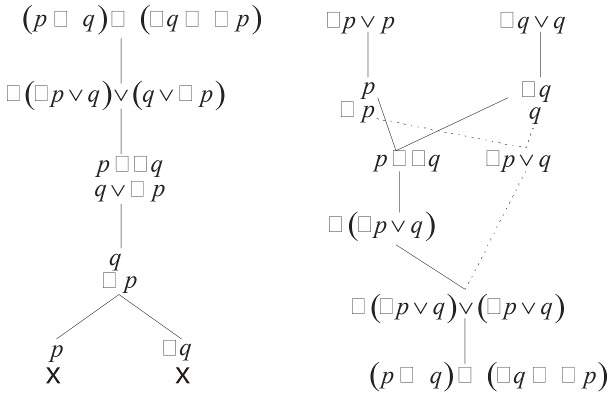
(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$



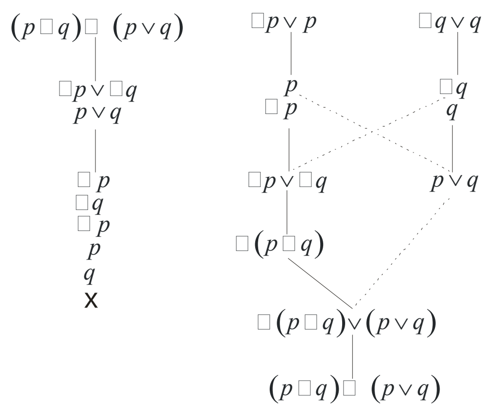
(b) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$



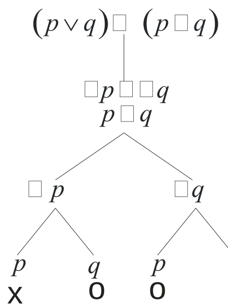
(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$



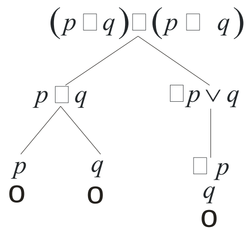
(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$



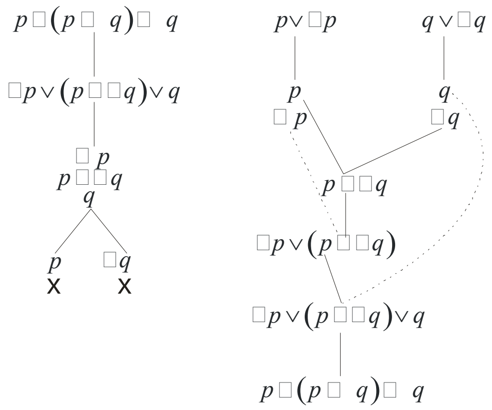
(e) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$



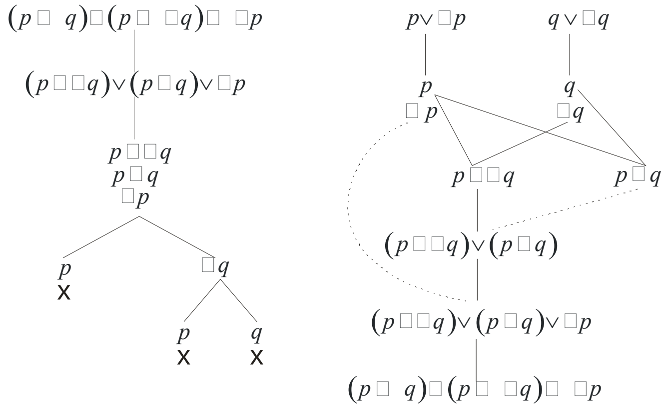
(f) $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q)$



(g) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$



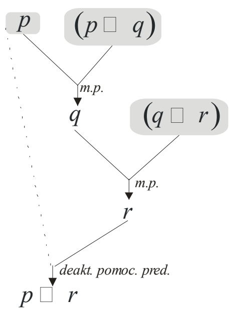
(h) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$



Cvičenie 4.2. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, či platia relácie logického vyplývania

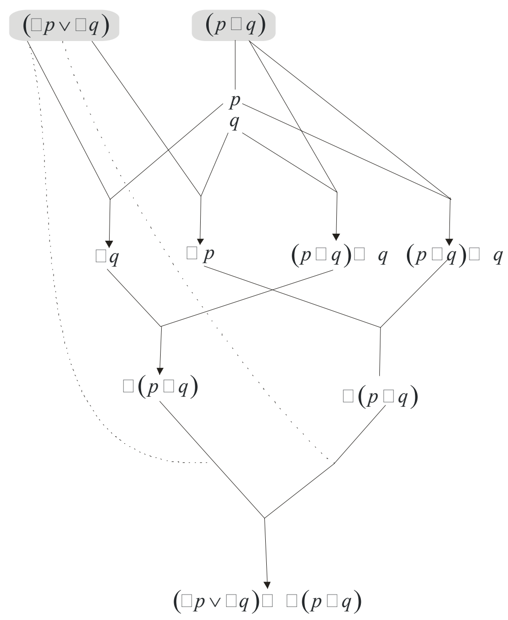
(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$

1	p	aktivácia pomocného predpokladu
2	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
3	$q \Rightarrow r$	2. predpoklad
4	q	modus ponens na 1. a 3.
5	r	modus ponens na 3. a 4.
6	$p \Rightarrow r$	deaktivácia pomocného predpokladu



(b) $\{\neg p \vee \neg q\} \vdash \neg(p \wedge q)$

1	$\neg p \vee \neg q$		aktivácia 1. pomocného predpokladu	
2	$p \wedge q$		aktivácia 2. pomocného predpokladu	
3	p	E$\wedge$ na 2.	q	E$\wedge$ na 2.
4	$\neg$q	E$\vee$ na 1. a 2..	$\neg p$	E$\vee$ na 2.
5	$p \wedge q \Rightarrow p$	deakt. 2. na 3.	$p \wedge q \Rightarrow q$	deakt. 2. na 3.
6	$\neg(p \wedge q)$		aplikácia modus tollens na 4. a 5.	
7	$\neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$		deakt. 1. na 6.	



Riešenie príkladov z 5. kapitoly

Cvičenie 5.1. Vety prepíšte pomocou jazyka predikátovej logiky, použite symboly uvedené v úlohách.

(a) ***Niekto má hudobný sluch (H) a niekto ho nemá.***

$$\left(\exists x H\left(x\right)\right) \wedge \left(\exists x \neg H\left(x\right)\right)$$

(b) ***Niektoré dieťa (D) nemá rado čokoládu (C).***

$$\exists x \left(D\left(x\right) \wedge \neg C\left(x\right)\right)$$

(c) ***Nik, kto nezvládol zásady bezpečnosti práce (B), nemôže pracovať v laboratóriu (L).***

$$\forall x\left(\neg B\left(x\right) \Rightarrow \neg L\left(x\right)\right)$$

(d) ***Nie každý talentovaný maliar (M) vystavuje svoje práce v národnej galérii (G).***

$$\neg\forall x\left(M\left(x\right) \Rightarrow G\left(x\right)\right)$$

(e) ***Len študenti (S) si môžu kupovať studené večere (V).***

$$\left(\forall x\left(S\left(x\right) \Rightarrow V\left(x\right)\right)\right) \wedge \left(\forall x\left(\neg S\left(x\right) \Rightarrow \neg V\left(x\right)\right)\right)$$

(f) ***Nie každá osoba (O), ktorá absolvovala drahý kurz lietania (K), je dobrý pilot (P).***

$$\neg\forall x\left(O\left(x\right) \wedge K\left(x\right) \Rightarrow P\left(x\right)\right)$$

Cvičenie 5.2. Vety prepíšte pomocou symbolov predikátov a konštánt.

(a) ***Karol videl Shakespearovu hru Hamlet.***

Zavedieme ternárny predikát $P(x,y,z)$, ktorý má význam „indivíduum x videlo hru od y s názvom z“. Potom veta má tvar:

$$P(Karol,Shakespeare,Hamlet),$$

kde *Karol*, *Shakespeare*, *Hamlet* sú konštanty.

(b) ***Karol videl nejakú hru od Shakespeara.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade. Potom veta má tvar:

$$\exists x\ P(Karol,Shakespeare,x)$$

(c) ***Niekto videl Shakespearovu hru Hamlet.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\exists x\ P(x,Shakespeare,Hamlet)$$

(d) ***Niekto videl hru od Shakespeara.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\exists x\ \exists y\ P(x,Shakespeare,y)$$

(e) ***Nie každý videl hru od Shakespeara.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\neg\forall x\ \exists y\ P(x,Shakespeare,y)$$

(f) ***Karol videl nejakú hru.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\exists x\ \exists y\ P(Karol,x,y)$$

(g) ***Shakespeare nenapísal hru Pygmalion.***

Zavedieme binárny predikát $P(x,y)$, ktorý má význam „indivíduum x napísalo hru s názvom y. Potom veta má tvar:

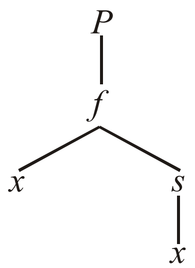
$$\neg P(Shakespeare,Pygmalion),$$

kde *Shakespeare* a *Pygmalion* sú konštanty.

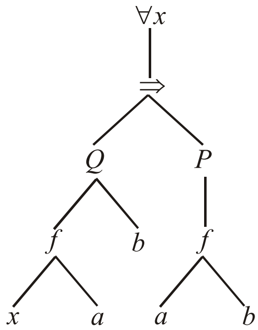
Cvičenie 5.3. Pre dané predikátové symboly P, Q a konštantné symboly a, b, pričom Q je binárny predikát a P je unárny predikát, rozhodnite, ktoré výrazy sú formuly predikátovej logiky a nakreslite ich syntaktický strom.
Pre dané predikátové symboly P, Q, funkcie f, s a konštantné symboly a, b, pričom Q a f sú binárne symboly a P, s sú unárne symboly, rozhodnite, ktoré symboly sú formuly predikátovej logiky. Ak je symbol formula, nakreslite jeho syntaktický strom.

(a) $Q\big(f(a),s(b)\big)$. Nie je formula, funkcia f je zle použitá.

(b) $P\Big(f\big(x,s(x)\big)\Big)$. Je formula.



(c) $\forall x\Big(Q\big(f(x,a),b\big)\Rightarrow P\big(f(a,b)\big)\Big)$. Je formula.

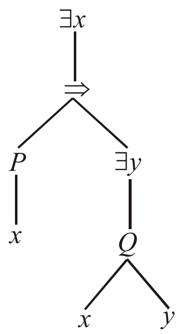


(d) $\Big(\forall x\ P\big(f(x,b)\big)\Rightarrow\big(\exists y\ Q\big(f(y),P(y)\big)\big)\Big)$. Nie je formula, funkcia f je zle použitá.

(e) $\Big(P(x)\wedge Q\big(f(x,y)\big)\Rightarrow\Big(\exists y\Big(P(y)\vee P\big(f(y)\big)\Big)\Big)\Big)$. Nie je formula, funkcia f je zle použitá.

(f) $\exists x\Big(P\big(Q(x,y)\big)\Rightarrow Q(a,b)\Big)$. Nie je formula, unárny predikát P obsahuje ako argument iný predikát Q, čo podľa definície nie je prípustné.

(g) $\exists x\Big(P(x)\Rightarrow\big(\exists y\ Q(x,y)\big)\Big)$. Je formula.



Cvičenie 5.4. Napíšte všetky podformuly z cvičenia 5.3.

(b) $\{P(f(x,s(x)))\}$

(c) $\{Q(f(x,a),b),P(f(a,b)),Q(f(x,a),b)\Rightarrow P(f(a,b))\}$

(g) $\{P(x),Q(x,y),\exists y\, Q(x,y),P(x)\Rightarrow(\exists y\, Q(x,y)),\exists x\, P(x)\Rightarrow(\exists y\, Q(x,y))\}$

Cvičenie 5.5. Označte všetky premenné, ktoré sú viazané a všetky premenné, ktoré sú voľné. Ak v danej formule sa vyskytujú také premenné, ktoré sú súčasne viazané a aj voľne, prepíšte formulu do takého tvaru, aby daná premenná buď bola viazaná alebo voľna. Ktoré formule sú otvorené formule a ktoré sú sentencie?

(a) $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$

x a y sú viazané premenné, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

(b) $Q(f(a,b),y)\Rightarrow(\exists y\, P(s(y)))$.

Formulu prepíšeme do tvaru $Q(f(a,b),y)\Rightarrow(\exists z\, P(s(z)))$

y je voľná premenná a z je viazaná premenná, formula nie je ani otvorená, ani sentencia.

(c) $Q(a,b)\vee(\forall x\, Q(a,x))$.

x je viazaná premenná, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

(d) $Q(x,y)\vee Q(y,x)$.

x a y sú voľné premenné, formula je otvorená.

(e) $Q(a,b)\wedge(\exists x\, \exists y\, Q(x,y))$.

x a y sú viazané premenné, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

(f) $(\forall x\, Q(a,x))\Rightarrow(\forall x\, \exists y\, Q(y,x))$.

x, a y sú viazané premenné, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

Cvičenie 5.6. Napíšte všetky podformuly z cvičenia 5.5.

(a) $\{Q(x,y),\exists y\, Q(x,y),\forall x\, \exists y\, Q(x,y)\}$

(b) $\{Q(f(a,b),y),P(s(z)),\exists z\, P(s(z)),Q(f(a,b),y)\Rightarrow(\exists z\, P(s(z)))\}$

(c) $\{Q(a,b),Q(a,x),\forall x\, Q(a,x),Q(a,b)\vee(\forall x\, Q(a,x))\}$

(d) $\{Q(x,y),Q(y,x),Q(x,y)\vee Q(y,x)\}$

(e) $\{Q(a,b),Q(x,y),\exists y\, Q(x,y),\exists x\, \exists y\, Q(x,y),Q(a,b)\wedge(\exists x\, \exists y\, Q(x,y))\}$

(f) $\{Q(a,x),\forall x\, Q(a,x),Q(y,z),\exists y\, Q(y,z),\forall z\, \exists y\, Q(y,z),(\forall x\, Q(a,x))\Rightarrow(\forall z\, \exists y\, Q(y,z))\}$

Cvičenie 5.7. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa rozmnožujú vajciami.

$\forall x(Vtak(x)\Rightarrow Mnoz\_vaj(x))$

$\exists x(Vtak(x)\wedge\neg Mnoz\_vaj(x))$

Existuje taký vták, ktorý sa nerozmnožuje vajciami.

(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.

$\forall x(sport(x)\Rightarrow fyz\_kond(x))$

$\exists x(sport(x)\wedge\neg fyz\_kond(x))$

Existuje taký športovec, ktorý nemá dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Študenti nie vždy veľa študujú.

$\exists x\left(stud(x)\Rightarrow\neg vela\_stud(x)\right)$

$\forall x\left(stud(x)\wedge vela\_stud(x)\right)$

Každý študent veľa študuje.
(d) Žiadne schody nevedú do neba.

$\forall x\left(schody(x)\Rightarrow\neg do\_neba(x)\right)$

$\exists x\left(schody(x)\wedge do\_neba(x)\right)$

Existujú také schody, ktoré vedú do neba.
(e) Každá sa pokúša vyštudovať na vysokej škole.

$\forall x\left(zena(x)\Rightarrow pokus\_stud\_univer(x)\right)$

$\exists x\left(zena(x)\wedge\neg pokus\_stud\_univer(x)\right)$

Existuje taká, ktorá sa nepokúša vyštudovať na vysokej škole.
(f) Každé nepárne číslo je prvočíslo.

$\forall x\left(nepar\_cislo(x)\Rightarrow prvocislo(x)\right)$

$\exists x\left(nepar\_cislo(x)\wedge\neg prvocislo(x)\right)$

Existuje také nepárne číslo, ktoré nie je prvočíslo.
(g) Každý, kto navštívil Anglicko, hovorí po anglicky.

$\forall x\left(navst\_UK(x)\Rightarrow hovori\_angl(x)\right)$

$\exists x\left(navst\_UK(x)\wedge\neg hovori\_angl(x)\right)$

Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.
(h) Neexistuje dym bez ohňa.

$\neg\exists x\left(dym(x)\Rightarrow\neg ohen(x)\right)$

$\exists x\left(dym(x)\Rightarrow\neg ohen(x)\right)$

Existuje dym bez ohňa.

Cvičenie 5.8. Pomocou prirodzenej dedukcie a sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formúl:

(a) $\left(\forall x\,\varphi(x)\right)\Rightarrow\left(\exists y\,\varphi(y)\right)$

1.	$\forall x\,\varphi(x)$	(predpoklad 1.)
2.	$\varphi(t)$	(E$\forall$ na 1.)
3.	$\exists x\,\varphi(x)$	(I$\exists$ na 2.)
4.	$\exists y\,\varphi(y)$	(substitúcia *x*/*y* v 3.)
5.	$\left(\forall x\,\varphi(x)\right)\Rightarrow\left(\exists y\,\varphi(y)\right)$	(deaktivácia 1. na 4.)

(b) $\neg\left(\forall x\,\varphi(x)\right)\equiv\left(\exists x\,\neg\varphi(x)\right)$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\left(\forall x\,\varphi(x)\right)$	(predpoklad 1.)
2.	$\neg\exists x\neg\varphi(x)\Rightarrow\forall x\,\varphi(x)$	(tautológia, cvičenie 8.2h)
3.	$\neg\neg\exists x\neg\varphi(x)$	(I$\neg$ na 2. a 1.)
4.	$\exists x\,\neg\varphi(x)$	(E$\neg$ na 3.)
5.	$\neg\left(\forall x\,\varphi(x)\right)\Rightarrow\left(\exists x\,\neg\varphi(x)\right)$	(deaktivácia 1. na 4.)

$\Leftarrow$

1.	$\exists x\, \neg\varphi(x)$	(predpoklad 1.)
2.	$\forall x\, \varphi(x)$	(predpoklad 2.)
3.	$\neg\varphi(t)$	(E$\exists$ na 1.)
4.	$\varphi(t)$	(E$\forall$ na 2.)
5.	$\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \varphi(t)$	(deaktivácia 2. na 4.)
6.	$\neg\left(\forall x\, \varphi(x)\right)$	(I$\neg$ na 3. a 5.)
7.	$\left(\exists x\, \neg\varphi(x)\right) \Rightarrow \neg\left(\forall x\, \varphi(x)\right)$	(deaktivácia 1. na 6.)

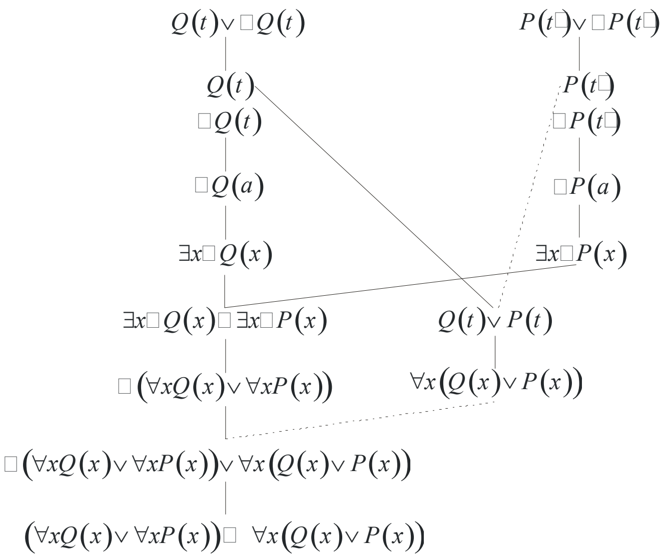
(c) $\neg\left(\exists x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \neg\varphi(x)\right)$

Po zavedení substitúcie $\varphi(x)/\neg\varphi(x)$ dostávame $\neg\left(\exists x\, \neg\varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \varphi(x)\right)$, a po znegovaní obidvoch strán výrazu (ide o negáciu implikácie jedným aj druhým smerom, formulu zákona kontrapozície $\vdash (p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ sme dokázali v cvičení 8.2b) dostávame po prevedení implikácií na ekvivalenciu formulu $\left(\exists x\, \neg\varphi(x)\right) \equiv \neg\left(\forall x\, \varphi(x)\right)$, ktorá je totožná s cvičením 8.4b, ktoré sme už vyriešili.

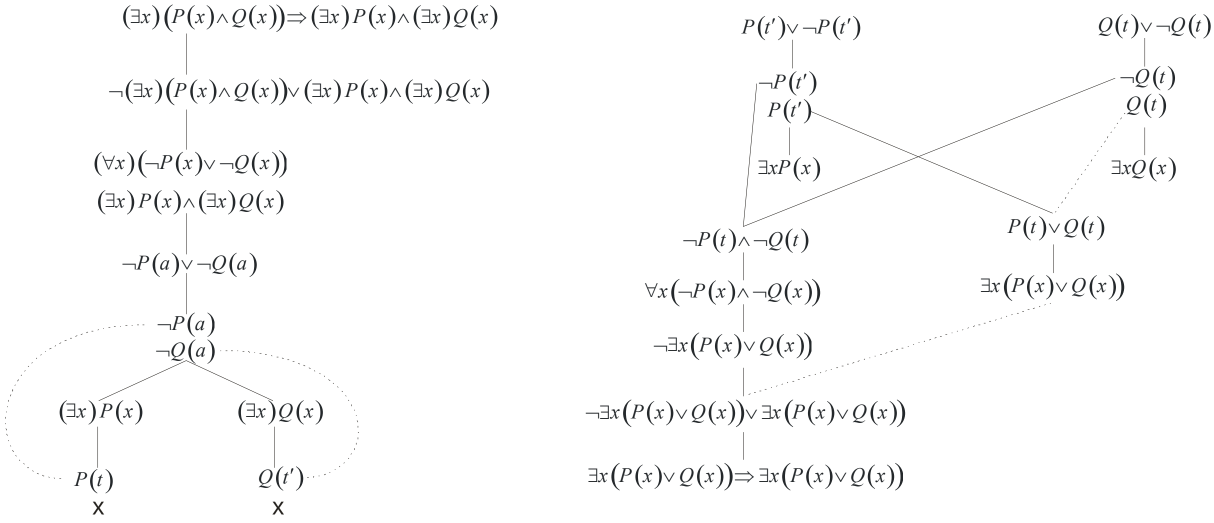
Cvičenie 5.9. Pomocou duálnych sémantických tabiel dokážte tautologickosť formúl a potom vykonajte pomocou inverzného table ich odvodenie pomocou prirodzenej dedukcie.

(a) $(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x) \Rightarrow (\forall x)\left(P(x) \vee Q(x)\right)$

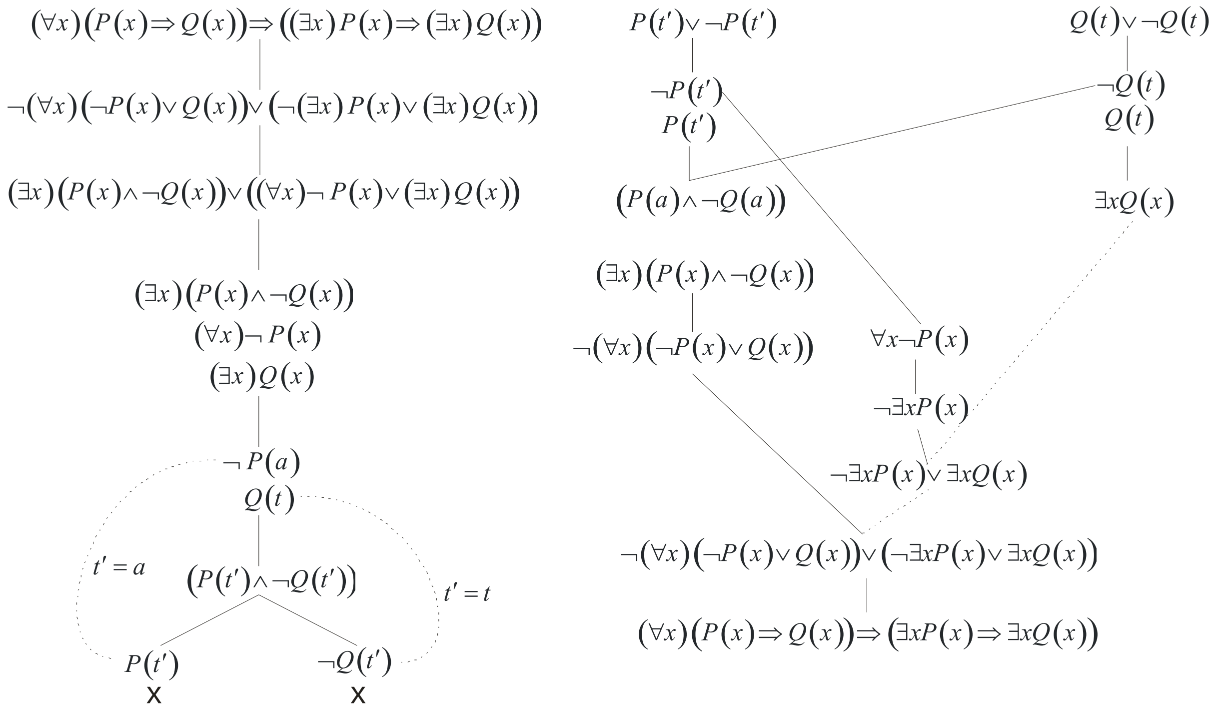
Dôkaz tautologičnosti tejto formuly bol už vykonaný v príklade 5.13, obr. 5.8, preto pristúpime priamo k dôkazu tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie založenom na duálnom sémantickom table.



(b) $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$



(c) $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\exists x)\,P(x)\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)\big)$



Cvičenie 5.10. Dokážte tautologičnosť týchto formúl:

(a) $(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv(\forall x)\,P(x)\wedge(\forall x)\,Q(x)$, táto formula plynie priamo z definície univerzálneho kvantifikátora (pre konjunkciu platí asociatívny a komutatívny zákon),

$$(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv\bigwedge_{x\in U}\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv\bigwedge_{x\in U}P(x)\wedge\bigwedge_{x\in U}Q(x)\equiv(\forall x)\,P(x)\wedge(\forall x)\,Q(x)$$

(b) $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\equiv(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$, dokáže sa úplne analogickým spôsobom ako predchádzajúca formula (konjunkcia sa nahradí disjunkciou).

(c) $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$

$$\neg\Big((\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\Big)$$

$$(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\wedge\neg\Big((\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\Big)$$

$$(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\wedge\Big((\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)\neg Q(x)\Big)$$

$$(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)$$
$$(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)\neg Q(x)$$

$$P(a)\wedge Q(a)$$
$$\neg P(t)\vee\neg Q(t')$$

$$P(a)$$
$$Q(a)$$

$t=a$ $\qquad$ $t'=a$

$\neg P(t)$ $\qquad$ $\neg Q(t')$

X $\qquad$ X

(d) $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)\,P(x)\Rightarrow(\forall x)\,Q(x)\big)$

$$\neg\Big((\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)\big)\Big)$$

$$\Big((\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Big)\wedge\neg\Big((\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)\Big)$$

$$\Big((\forall x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)\Big)\wedge\Big((\forall x)P(x)\wedge(\exists x)\neg Q(x)\Big)$$

$$(\forall x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)$$
$$(\forall x)P(x)$$
$$(\exists x)\neg Q(x)$$

$$\neg P(t)\vee Q(t)$$
$$P(t')$$
$$\neg Q(a)$$

$t=t'$ $\qquad$ $t'=a$

$\neg P(t)$ $\qquad$ $Q(t')$

X $\qquad$ X

Riešenie príkladov z 6. kapitoly

Cičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:
(a) $(\forall x\ \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\ \varphi(y))$

1.	$\forall x\ \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t)$	E$\forall$ na 1.
3.	$\varphi(a)$	substitúcia premennej $a = t$
4.	$\exists x\ \varphi(x)$	I$\exists$ na 3.
Ť.	$(\forall x\ \varphi(x)) \Rightarrow (\exists y\ \varphi(y))$	deaktivácia pomocného predpokladu

(b) $\neg(\forall x\ \varphi(x)) \equiv (\exists x\ \neg\varphi(x))$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\forall x\ \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$	I$\forall$.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus tollens na 1. a 2.
4.	$\neg\varphi(a)$	substitúcia premennej t = a
5.	$\exists x\neg\varphi(x)$	I$\exists$
6.	$\neg\forall x\ \varphi(x) \Rightarrow \exists x\neg\varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

$\Leftarrow$

1.	$\exists x\ \neg\varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\exists x\ \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\varphi(a)$	E$\exists$
3.	$\neg\varphi(a)$	modus ponens na 1. a 2.
4.	$\forall x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)$	E$\forall$
5.	$\neg\forall x\varphi(x)$	modus tollens na 3. a 4.
6.	$\exists x\ \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x\varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

(c) $\neg(\exists x\ \varphi(x)) \equiv (\forall x\ \neg\varphi(x))$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\exists x\ \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t) \Rightarrow \exists x\varphi(x)$	I$\exists$.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus tollens na 1. a 2.
4.	$\forall x\neg\varphi(x)$	I$\exists$
5.	$\neg\exists x\ \varphi(x) \Rightarrow \forall x\neg\ \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

$\Rightarrow$

1.	$\forall x\, \neg\varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\forall x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\varphi(t)$	E∀.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus polens na 1. a 2.
4.	$\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$	I∃
5.	$\neg\exists x\, \varphi(x)$	modus tollens na 3. a 4.
6.	$\forall x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\exists x\, \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

Poznámka: Formulu (c) možno aj priamo odvodiť z formuly (b) vhodnou substitúciou.

(d) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \varphi(t)$

Táto formula priamo vyplýva z definície univerzálneho kvantifikátora a z tautológie $p \wedge q \Rightarrow p$

(e) $\varphi(a) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$

Táto formula priamo vyplýva z definície existenčného kvantifikátora a z tautológe $p \wedge q \Rightarrow p$

Cvičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte distributívne zákony formuly kvantifikátorov (5.25)

Cvičenie 6.3. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý študent je maturant

Každý maturant nie je analfabet

?

$(\forall x)\left(stu(x) \Rightarrow mat(x)\right)$

$(\forall x)\left(mat(x) \Rightarrow \neg anal(x)\right)$

$stu(t) \Rightarrow mat(t)$

$mat(x) \Rightarrow \neg anal(t)$

$stu(t) \Rightarrow \neg anal(t)$

$(\forall x)\left(stu(x) \Rightarrow \neg anal(x)\right)$

Riešenie: každý študent nie je analfabet.

(b)

niektorí študenti sú kominári

niektorí kominári sú maturanti

?

(c)

Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

(d)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(e)
niektorí fyzici sú astronómovia
niektorí astrológovia sú astronómovia

?

Cvičenie 6.4. Použitím prirodzenej dedukcie riešenie sylogizmov z tabuľky 6.3.

Riešenie príkladov z 7. kapitoly

Cvičenie 7.1. Pomocou definičných vzťahov (7.8a-b) dokážte tautologičnosť ekvivalencií (7.6a-b)

(a) Dôkaz $w \vDash \neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$: Pre $w \vDash \Box\varphi$ platí (7.8a)

$$\neg\left(w \vDash \Box\varphi\right) = w \nvDash_{def} \Box\varphi = \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \nvDash \varphi\right) & \left(pre\, \Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 0 & \left(pre\, \Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases} = w \nvDash \Diamond\neg\varphi$$

(b) Dôkaz $\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$: Pre $w \nvDash \Diamond\varphi$ platí (7.8b)

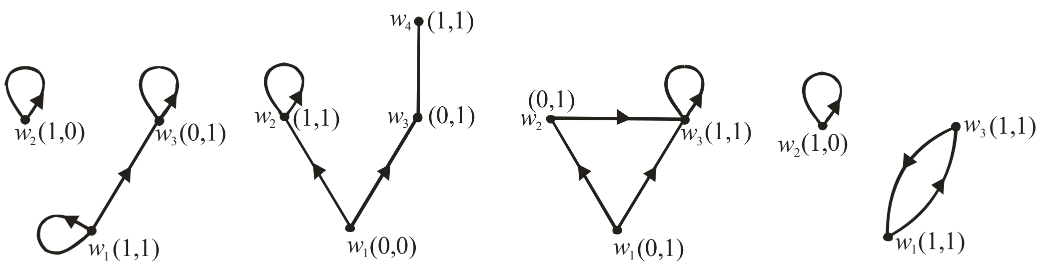
$$\neg\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) = w \nvDash \Diamond\varphi =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \nvDash \varphi\right) & \left(pre\, \Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 1 & \left(pre\, \Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases} = w \vDash \Box\neg\varphi$$

Cvičenie 7.2. Ukážte, že pre model M (8.7), kde pre každé $w \in W$, množiny dostupných svetov sú prázdne, $\Gamma(w) = \varnothing$, každá formula φ je nutná a nie je možná, t. j. pre ľubovoľnú formulu φ platí $\Box\varphi \equiv 1$ a $\Diamond\varphi \equiv 0$.
Návod: Modálne operátory nech sú definované pomocou relácií (7.6), pričom symboly konjunkcie a disjunkcie sú pre n komponent zovšeobecnené takto

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv 1 \wedge p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \equiv \begin{cases} p_1 \wedge \ldots \wedge p_n & \left(pre\, n \geq 1\right) \\ 1 & \left(pre\, n = 0\right) \end{cases}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv 0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_n \equiv \begin{cases} p_1 \vee \ldots \vee p_n & \left(pre\, n \geq 1\right) \\ 0 & \left(pre\, n = 0\right) \end{cases}$$

Cvičenie 7.3. Pre rôzne relácie špecifikované orientovaným grafom zostrojte pravdivostné hodnoty formúl: $\Box p$, $\Box q$, $\Diamond p$, $\Diamond q$, $\Box(p \wedge q)$,$\Box(p \vee q)$,$\Box(p \Rightarrow q)$, $\Diamond(p \wedge q)$,$\Diamond(p \vee q)$,$\Diamond(p \Rightarrow q)$.



(a) (b) (c) (d)

Cvičenie 7.4. Pomocou sémantického tabla falzifikujte tautologičnosť formúl, pomocou otvorených ciest navrhnite takú pravdivostnú interpretáciu premenných p a q, aby výsledná pravdivostná hodnota vo svete w_1 bola nepravda.

(a) $w \nvDash (\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,

(b) $w \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond q$,

(c) $w \nvDash (\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q) \Rightarrow \Diamond\Box(p \wedge q)$.

Cvičenie 7.5. Pomocou všeobecnej diskusie dokážte, že formula je tautológia (t. j. je pravdivá v každom svete, $(\forall w \in W)(w \vDash \varphi)$).

(a) $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$

(b) $\varphi = (\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$

(c) $\varphi = (\Diamond(p \vee q) \Rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q))$

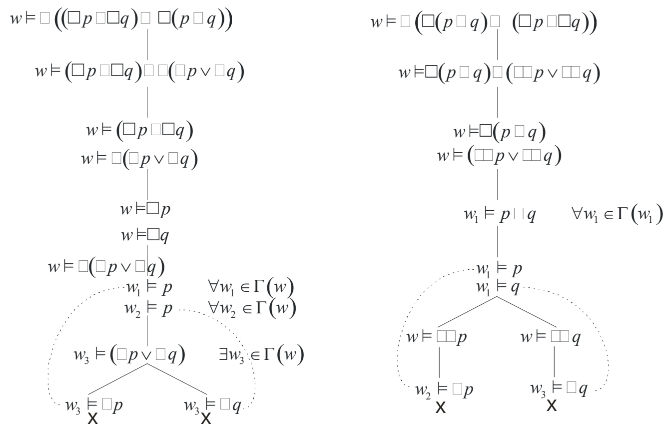
Návod: Nech formula $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$ je pravdivá v aktuálnom svete $w \in W$, potom (1) podformula $\varphi_1 = \Box(p \Rightarrow q)$ je nepravdivá alebo (2) podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá. Uvažujme možnosť (1), to potom znamená, že v dostupnom okolí $\Gamma(w)$ aktuálneho sveta w existuje aspoň jeden dostupný svet w' v ktorom je podformula $\varphi_{11} = p \Rightarrow q$ nepravdivá, čiže v tomto dostupnom svete platí, že premenná p je pravdivá a premenná q je nepravdivá. V možnosti (2) je podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá v aktuálnom svete w, potom v tom istom svete podformula $\varphi_{21} = \Box p$ je nepravdivá alebo podformula $\varphi_{22} = \Box q$ je pravdivá. Potom v okolí $\Gamma(w)$ existuje aspoň jeden svet w'' v ktorom je premenná p nepravdivá a v každom svete w''' z tohto okolia je premenná q je pravdivá (pozri tabuľku, kde druhý a tretí riadok špecifikujú výsledky diskusie o pravdivostných hodnotách premenných).

	w	w'	w''	w'''
p	#	1	0	#
q	#	0	#	1
$P \Rightarrow q$	#	0	1	1
$\Box(p \Rightarrow q)$	0	#	#	#
$\Box p$	0	#	#	#
$\Box q$	0	#	#	#
$\Box p \Rightarrow \Box q$	1	#	#	#
φ	1	#	#	#

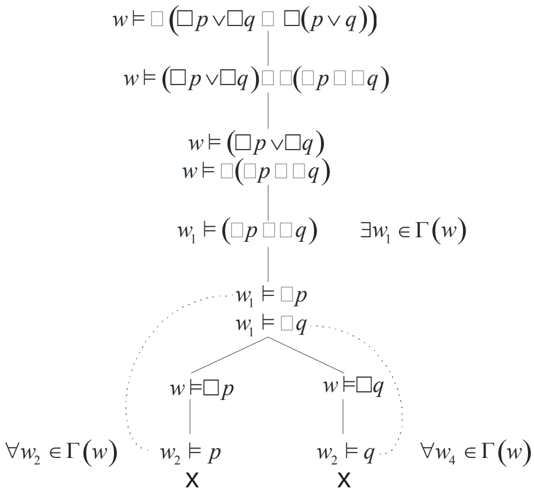
Znak # reprezentuje ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu. Týmto sme dokázali, že v ľubovoľnom svete w je formula $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$ pravdivá, čiže je tautológia.

Cvičenie 7.6. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly sú tautológie

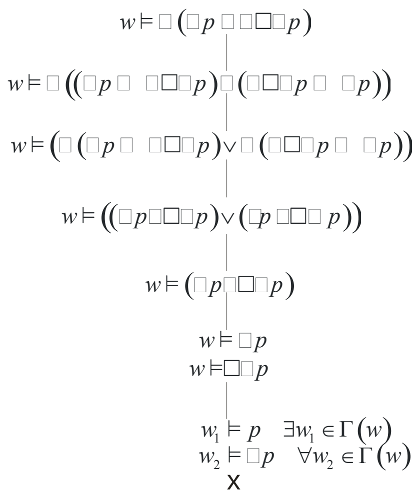
(a) $(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$,



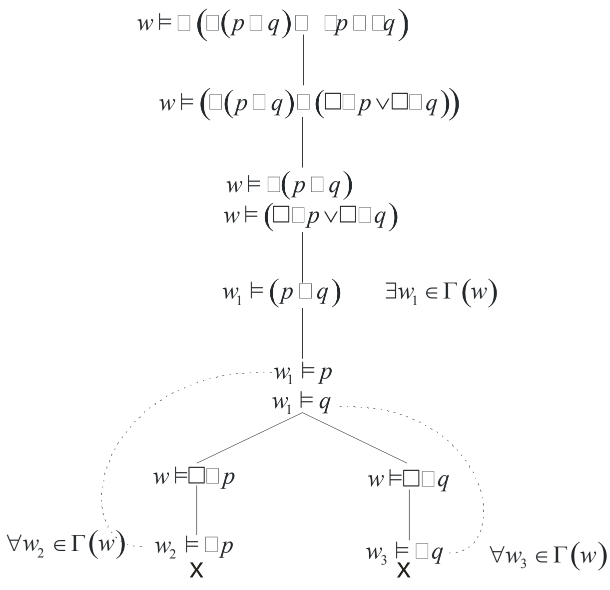
(b) $\Box p \vee \Box q \Rightarrow \Box(p \vee q)$,



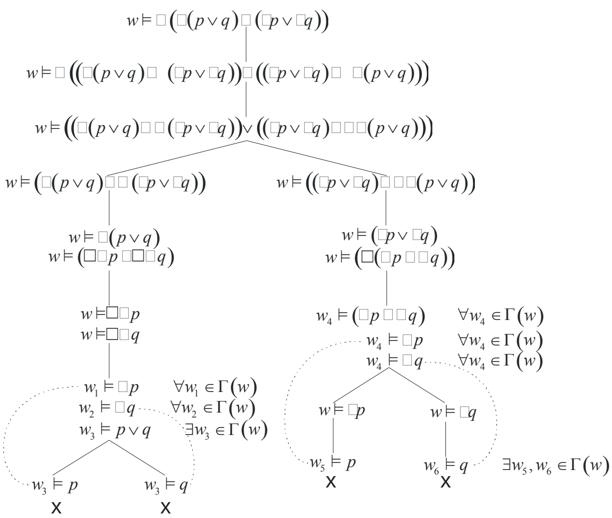
(c) $\Diamond p \equiv \neg \Box \neg p$,



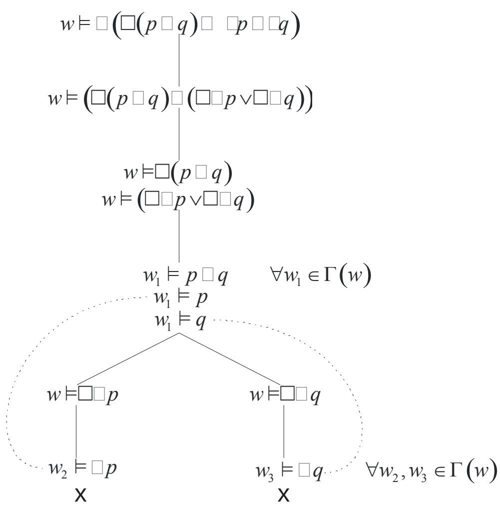
(d) $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,



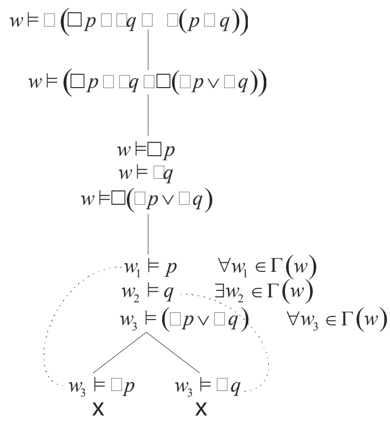
(e) $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$,



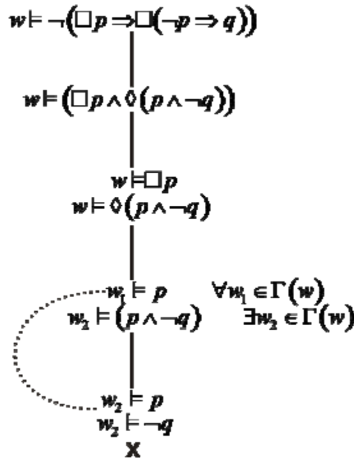
(f) $\Box(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,



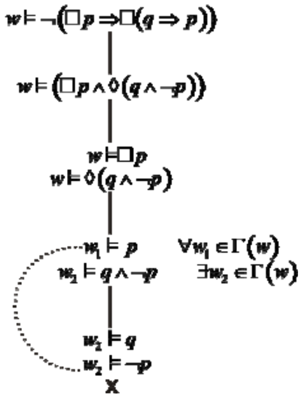
(g) $\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,



(h) $\Box p \Rightarrow \Box(\neg p \Rightarrow q)$,



(i) $\Box p \Rightarrow \Box(q \Rightarrow p)$,



Cvičenie 7.7. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly nie sú tautológie, pomocou otvorenej vetvy tabla zostrojte protipríklad, ktorý falzifikuje tautologickosť formuly.

(a) $\square(p \vee q) \Rightarrow \square p \vee \square q$,

$$w \vDash \square\left(\square(p \vee q) \square\ \square p \vee \square q\right)$$

$$w \vDash \left(\square(p \vee q) \square \left(\square\square p \square \square\square q\right)\right)$$

$$w \vDash \square(p \vee q)$$
$$w \vDash \square\square p$$
$$w \vDash \square\square q$$

$$w_1 \vDash (p \vee q) \qquad \forall w_1 \in \Gamma(w)$$
$$w_2 \vDash \square p \qquad \exists w_2 \in \Gamma(w)$$
$$w_3 \vDash \square q \qquad \exists w_3 \in \Gamma(w)$$

$$w_1 = w_2 \qquad w_1 \square w_3$$

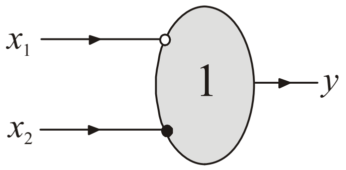
$$w_1 \vDash p \qquad\qquad w_1 \vDash q$$
$$\text{x} \qquad\qquad\qquad \text{o}$$

(b) $(\square p \wedge \square \neg q) \Rightarrow \square(p \Rightarrow q)$,

Riešenie príkladov z 8. kapitoly

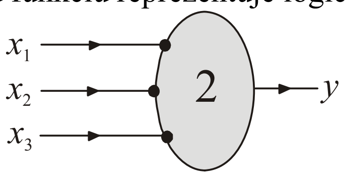
Cvičenie 8.1. Dokážte, že logické neuróny znázornené na obr. 8.2 simulujú uvedené Boolove funkcie.

Cvičenie 8.2. Zistite akú výrokovú spojku (Boolovu funkciu) reprezentuje logický neurón

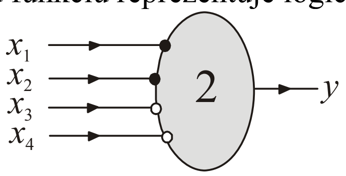


Cvičenie 8.3 Zostrojte neurónovú sieť ekvivalencie pomocou jej disjunktívnej normálnej formy, $(p \equiv q)_{NDF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

Cvičenie 8.4. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.5. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.6. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu troch binárnych číslic

$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \hline \beta_1\,\beta_2 \end{array}$$

Cvičenie 8.7. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu $\varphi(p,q,r) = (p \equiv q) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$

Cvičenie 8.8. Zostrojte 3-vrstvovú doprednú neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu špecifikovanú tabuľkou

#	*p*	*q*	*r*	*f*
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

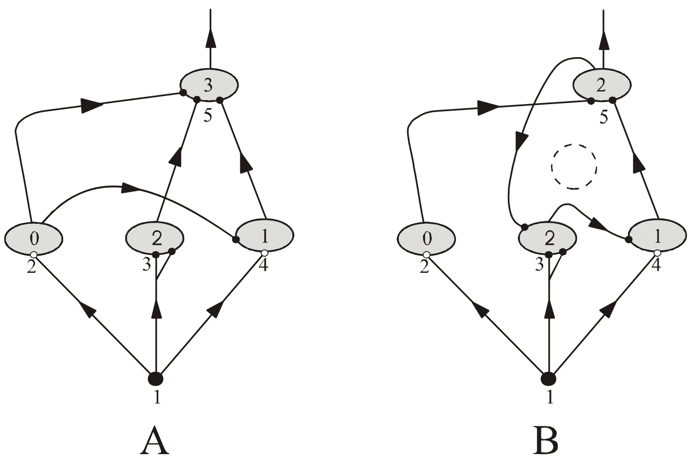
Cvičenie 8.9. Zostrojte tabuľku všetkých možných binaárnych Boolovych funkcií tvaru $y = f(x_1, x_2)$ a zistite ktoré z nich sú lineárne separovateľné a ktoré nie sú lineárne separovateľné.

Cvičenie 8.10. Nech Boolova funkcia je špecifikovaná tabuľkou

#	p	q	r	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Zostrojte neurón tretieho rádu, ktorý simuluje túto Boolovu funkciu.

Cvičenie 8.8. Pre časové elementy $1 \le t \le 10$ zostrojte tabuľku aktivít jednotlivých neurónov znázornených na obrázku, pričom v čase $t = 1$ aktivity sú zadané takto: $x^{(1)} = (1,0,0,1)$.

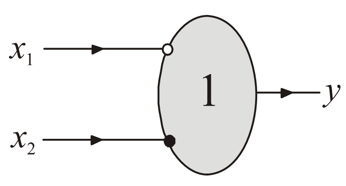


Cvičenie 8.9. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu a súčinu troch binárnych číslic

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \times \alpha_3 = \beta_1\beta_2$$

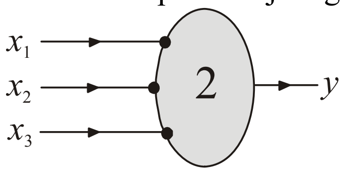
Cvičenie 8.10. Dokážte, že logické neuróny znázornené na obr. 8.10 simulujú uvedené Boolove funkcie.

Cvičenie 8.11. Zistite akú výrokovú spojku (Boolovu funkciu) reprezentuje logický neurón

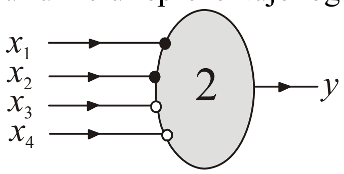


Cvičenie 8.12 Zostrojte neurónovú sieť ekvivalencie pomocou jej disjunktívnej normálnej formy, $(p \equiv q)_{NDF} = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.

Cvičenie 8.13. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Cvičenie 8.14. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón



Úloha 8.15. Zostrojte neurónovú sieť, ktorá simuluje Boolovu funkciu. $(\beta_1, \beta_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ definovanú pomocou súčtu troch binárnych číslic

$$\begin{array}{r} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \hline \beta_1\,\beta_2 \end{array}$$

Riešenie príkladov z 9. kapitoly

Cvičenie 9.1. Aká je hodnota Boolovej premennej, ktorá je určená podmienkou
(a) $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$),
(b) $x + x = \mathbf{0}$ (pre $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$),
(c) $x \cdot \mathbf{1} = x$ (pre každé $\boldsymbol{x}$),
c(d) $x + \overline{x} = \mathbf{1}$ (pre každé $\boldsymbol{x}$),
(e) $x \cdot \overline{x} = \mathbf{0}$ (pre každé $\boldsymbol{x}$).

Cvičenie 9.2. Zostrojte tabuľku funkčných hodnôt Boolovej funkcie
(a) $f(x,y,z) = \overline{x}y$,

#	x	y	z	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

(b) $f(x,y,z) = x + yz$,

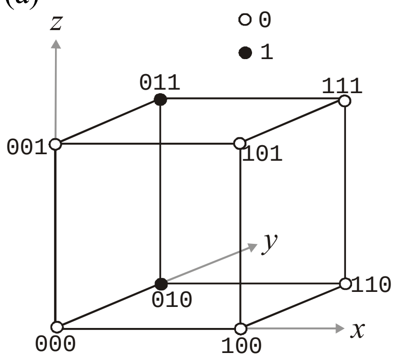
#	x	y	z	f
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

(c) $f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$,

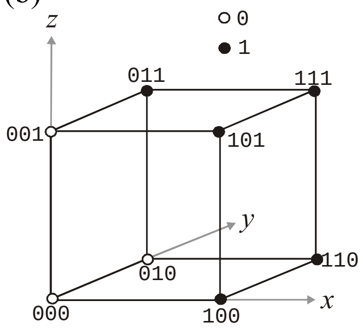
#	x	y	z	$x\overline{y}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	f
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0
5	1	0	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1
7	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	0

Cvičenie 9.3. Znázornite Boolove funkcie $f(x,y,z)$ z cvičenia 9.2 na 3-rozmernej kocke tak, že hodnoty 1 (0) budú reprezentované na kocke čiernym (bielym) bodom.

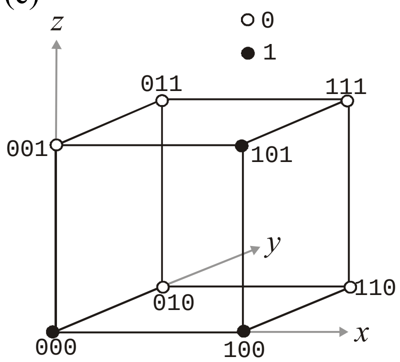
(a)



(b)



(c)



Cvičenie 9.4. Pre ktoré hodnoty x a y platí $xy = x + y$.

(a) Prípad 0 = 0, potom $x = y = 0$,
(b) Prípad 1 = 1, potom $x = y = 1$.

Cvičenie 9.5. Zostrojte tabuľku všetkých možných binárnych Boolových funkcií z tabuľky 1.8 a identifikujte v nej Boolove binárne operácie pomocou súčinu, súčtu a negácie.

$f_1 = 0$	$f_2 = xy$	$f_3 = x\overline{y}$	$f_4 = x\overline{y} + xy$
$f_5 = \overline{x}y$	$f_6 = \overline{x}y + xy$	$f_7 = \overline{x}y + x\overline{y}$	$f_8 = \overline{x}y + x\overline{y} + xy$
$f_9 = \overline{x}\,\overline{y}$	$f_{10} = \overline{x}\,\overline{y} + xy$	$f_{11} = \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y}$	$f_{12} = \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y} + xy$
$f_{13} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y$	$f_{14} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y + xy$	$f_{15} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y + x\overline{y}$	$f_{16} = 1$

Cvičenie 9.6. Riešte nasledujúce rovnice s exkluzívnou disjunkciou
(a) $x \oplus \mathbf{0} = x$,
(b) $x \oplus \mathbf{1} = \overline{x}$,
(c) $x \oplus x = 0$,
(d) $x \oplus \overline{x} = 1$.

Cvičenie 9.7. Dokážte, že platia rovnosti
(a) $x \oplus y = (x+y)\left(\overline{xy}\right)$,

$$x \oplus y = (x+y)\left(\overline{xy}\right) = (x+y)(\overline{x}+\overline{y}) = \cancel{x\overline{x}} + x\overline{y} + \overline{x}y + \cancel{y\overline{y}}$$

$$= \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

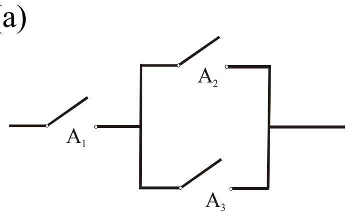
(b) $x \oplus y = \overline{x}y + x\overline{y}$,
Dokáže sa pomocou predošlého riešenia (a).

Cvičenie 9.8. Zostrojte duálne výrazy k týmto Boolovym funkciam
(a) $x + y$, $(\overline{x}\,\overline{y})$
(b) $\overline{x}\,\overline{y}$, $(x+y)$
(c) $xyz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $\left((\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})(xyz)\right)$.

Cvičenie 9.9. Zostrojte Boolovu funkciu $f(x,y,z)$ vo forme sumy produktov klauzúl k premenným x, y a z, ktorá má hodnotu **1** vtedy a len vtedy, ak
(a) $x = y = \mathbf{0}, z = \mathbf{1}$, $(\overline{x}\,\overline{y}z)$
(b) $x = \mathbf{0}, y = \mathbf{1}, z = \mathbf{0}$, $(\overline{x}\,y\,\overline{z})$
(c) $y = z = \mathbf{1}$, $(xyz + \overline{x}yz)$.

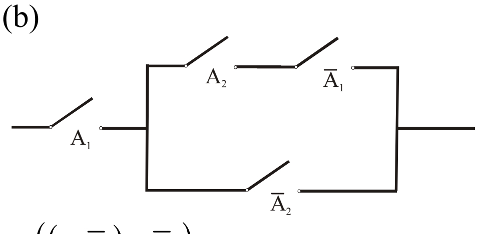
Cvičenie 9.10. Zostrojte spínacie funkcie pre spínacie obvody

(a)



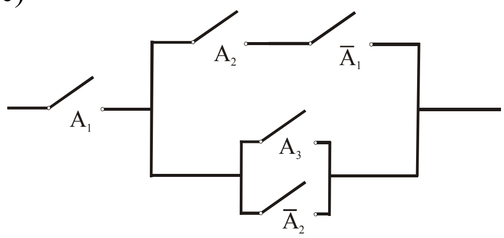
$x_1(x_2 + x_3)$

(b)



$x_1\left((x_2\overline{x}_1) + \overline{x}_2\right)$

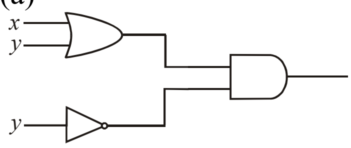
(c)



$x_1\left(x_2\overline{x}_1+\left(x_3+\overline{x}_2\right)\right)$

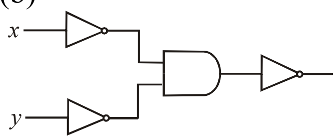
Cvičenie 9.11. Zostrojte tabuľku výstupov logických obvodov

(a)



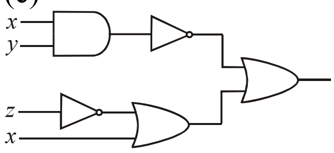
$\left(x\vee y\right)\wedge\neg y$

(b)



$\neg\left(\neg x\wedge\neg y\right)$

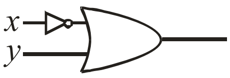
(c)



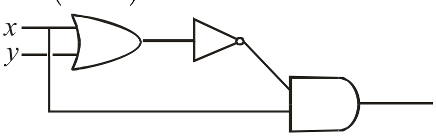
$\left(\neg\left(x\wedge y\right)\right)\vee\left(x\vee\neg z\right)$

Cvičenie 9.12. Zostrojte logické obvody, ktoré simulujú Boolove funkcie

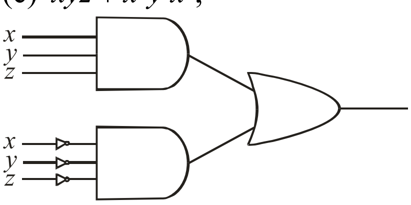
(a) $\overline{x}+y$,



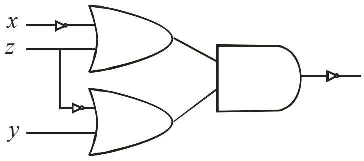
(b) $\left(\overline{x+y}\right)x$,



(c) $xyz+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{x}$,

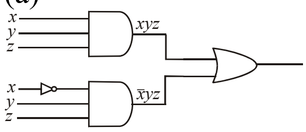


(d) $\overline{(\overline{x}+z)(y+\overline{z})}$.



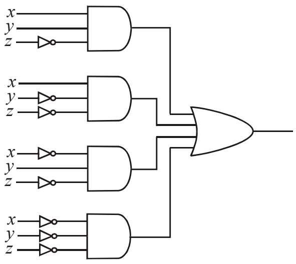
Cvičenie 9.13. Zjednodušte logické obvody

(a)



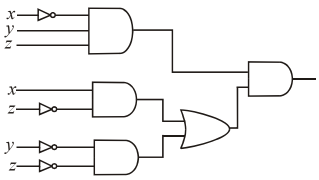
$xyz+\overline{x}yz=(x+\overline{x})yz=yz$

(b)



$xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}=x(y+\overline{y})\overline{z}+\overline{x}(y+\overline{y})\overline{z}=x\overline{z}+\overline{x}\,\overline{z}=(x+\overline{x})\overline{z}=\overline{z}$

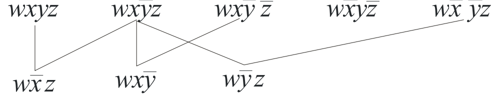
(c)



$(\overline{x}yz)(x\overline{z}+\overline{y}\,\overline{z})=\underbrace{\overline{x}yzx\overline{z}}_{0}+\underbrace{\overline{x}yz\overline{y}\,\overline{z}}_{0}=0$

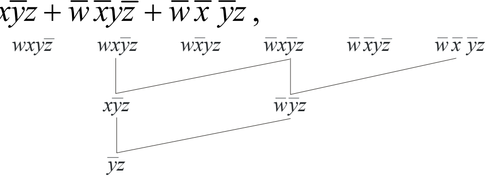
Cvičenie 9.14. Pomocou Quinovej a McCluskeyho metódy nájdite optimálne výrazy k Boolovým funkciám

(a) $wxyz+wx\overline{y}z+wx\overline{y}\,\overline{z}+w\overline{x}y\overline{z}+w\overline{x}\,\overline{y}z$,



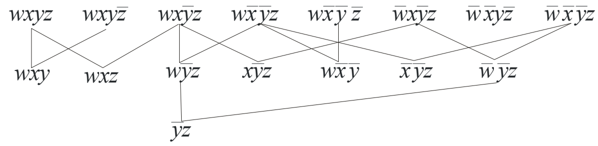
$f=w\overline{x}z+wx\overline{y}+w\overline{y}z+w\overline{x}y\overline{z}$

(b) $wxy\overline{z}+wx\overline{y}z+w\overline{x}yz+\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$,



$f=\overline{y}z+wxy\overline{z}+w\overline{x}yz+\overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$

(c) $wxyz + wxy\overline{z} + wx\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z$.



$f = wxy + \overline{y}z + w\overline{x}\,\overline{y} + \overline{w}\,\overline{x}y\overline{z}$