2. kapitola

Výroková logika II – Logický a sémantický dôsledok, teória a model, korektnosť a úplnosť

2.1 Odvodzovanie formúl výrokovej logiky, logický dôsledok, syntaktický prístup

Logický dôsledok je presne špecifikovaný spôsob odvodzovania logických zákonov (tautológií), pričom sa vychádza z niekoľko málo vopred východiskových zákonov – axióm (tautológií), z ktorých pomocou presne špecifikovaného spôsobu dôkazu zostrojíme nové zákony (tautológie).

V prvom kroku uvedieme tri základné pravidlá pre konštrukciu logického dôsledku:

(1) ***Pravidlo modus ponens*** (pravidlo odlúčenia) . Ak formuly φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ sú pravdivé, potom je pravdivá aj formula ψ. Toto pravidlo sa niekedy zapisuje aj ako schéma

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi\\ \varphi \Rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \tag{2.1}$$

(2) ***Pravidlo substitúcie***. Nech φ je tautológia, ktorá obsahuje výrokové premenné $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Nech $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ je množina ľubovoľných formúl (ktorých počet je rovnaký ako počet premenných v φ). Nech formula ψ vznikne z φ tak, že každá premenná p_i je substituovaná formulou ψ_i, pre $i = 1, 2, ..., n$

$$\psi = \varphi\left(p_1/\psi_1, p_2/\psi_2, ..., p_n/\psi_n\right) \tag{2.2a}$$

Potom takto vytvorená formula ψ je opäť tautológiou.

(3) ***Pravidlo nahradenia ekvivalentých podformúl***. Nech φ je tautológia a nech ψ vznikne z φ substitúciou jej ľubovoľnej podformuly $\varphi' \subset \varphi$ formulou ψ', ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi' \equiv \psi'$

$$\psi = \varphi\left(\varphi'/\psi'\right) \tag{2.2b}$$

potom aj ψ je tautológia.

Ak by sme boli striktne dôslední, posledné dve pravidlá (2.1-2) môžeme považovať za nadbytočné, pretože formálny systém je definovaný nad „metasymbolmi“, kde napr. $\varphi \Rightarrow \psi$ reprezentuje nekonečne veľkú (ale spočítateľnú) množinu formúl – schém, kde komponenty implikácie φ a ψ môžu byť neatomické formule výrokovej logiky (napr. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$).

Príklad 2.1. Pravidlo substitúcie budeme ilustrovať tautológiou $\varphi(p,q) = \neg p \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$, vykonáme túto substitúciu premenných p/p a $q/(q \vee r)$, potom tautológia φ má tvar $\psi = \neg p \Rightarrow ((p \vee q \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$.

K ilustrácii pravidla nahradenia ekvivalentných podformúl uvažujme tautológiu $\left(\left(p \vee (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)\right)$. Každú jej disjunkciu nahradíme príslušnou implikáciou (využijeme tautológiu $(p \vee q) \equiv (\neg p \Rightarrow q)$), dostaneme

$$\left(\left(\neg p \Rightarrow (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)\right)\right)$$

na záver vykonáme substitúciu $p/\neg p$ vyberieme si podformulu $p \vee q$, nahradíme ju za ekvivalentnú formulu $\overline{p} \Rightarrow q$, týmto spôsobom zostrojíme konečnú tautológiu

$$\left(\left(p \Rightarrow (q \wedge r)\right) \Rightarrow \left((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\right)\right)$$

ktorú môžeme interpretovať tak, že implikácia zľava je distributívna vzhľadom ku konjunkcii.

Definícia 2.1.

(1) *Formula* φ *sa nazýva* ***bezprostredným logickým dôsledkom*** *množiny formúl* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ *vtedy a len vtedy, ak vznikne aplikáciou jedného z pravidiel logického dôkazu na formuly z* Φ.

(2) *Formula* φ *sa nazýva* ***logický dôsledok*** *množiny formúl* Φ *(čo označíme* $\Phi \vdash \varphi$ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi \in \Phi$ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *alebo je bezprostredným dôsledkom* Φ *rozšírenej o niektoré jej bezprostredné dôsledky.*

(3) *Konečná postupnosť formúl* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *sa nazýva* ***dôkaz*** *formuly* φ *z množiny* Φ *vtedy a len vtedy, ak* $\varphi = \varphi_p$ *a každá formula* φ_i *z tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z* Φ *alebo formúl* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Negáciou relácie $\Phi \vdash \varphi$ dostaneme novú reláciu $\Phi \nvdash \varphi =_{def} \neg(\Phi \vdash \varphi)$, ktorú čítame ako „nie je pravda, že formula φ logicky vyplýva z množiny Φ“ , čo môžeme zjednodušiť ako „formula φ logicky ***ne***vyplýva z množiny Φ“. K lepšiemu pochopeniu tejto definície uvedieme tento jednoduchý ilustračný príklad.

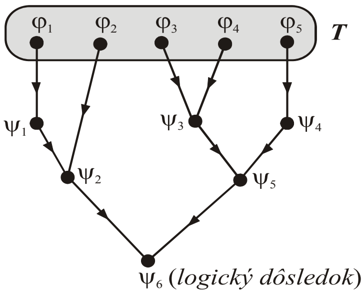
Príklad 2.2. Nech $\Phi = \{p \vee \neg p, p \Rightarrow (q \Rightarrow p)\}$. Na 2. formulu z Φ aplikujeme 2. pravidlo (substitúcie) tak, že premennú q nahradíme 1. formulou z Φ, t. j. vo formule $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ vykonáme substitúciu $p/(p \vee \neg p)$, dostaneme

$$(p \vee \neg p) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \vee \neg p))$$

Teraz použijeme 1. pravidlo (modus ponens) vzhľadom k 1. formule z Φ

$$\begin{array}{l} (p \vee \neg p) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \vee \neg p)) \\ \underline{p \vee \neg p \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ q \Rightarrow (p \vee \neg p) \end{array}$$

Môžeme teda povedať, že formula $\varphi = (q \Rightarrow (p \vee \neg p))$ je logickým dôsledkom množiny formúl Φ, t. j. $\Phi \vdash q \Rightarrow (p \vee \neg p)$.



Obrázok 2.1. Znázornenie postupnej tvorby logického dôsledku $\Phi \vdash \psi_6$, kde $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_5\}$

Termín „logický dôsledok" je ilustrovaný obr. 2.1, kde logický dôsledok ψ_6 môže byť rekuretne špecifikovaný takto

$$\psi_6 = O\Big(\big(O(\varphi_1), \varphi_2\big), O\big(O(\varphi_3, \varphi_4), O(\varphi_5)\big)\Big) \tag{2.3a}$$

kde O je unárny/binárny operátor reprezentujúci pravidlá (2.1-3). Postupnosť formúl reprezentuje logický dôkaz formuly ψ_6 z množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_5\}$

$$\psi_1 \to \psi_2 \to \psi_3 \to \psi_4 \to \psi_5 \to \boxed{\psi_6} \tag{2.3b}$$

kde výsledok ψ_6 je uvedený v rámčeku.

Definícia 2.2.

(1) Množina predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sa nazýva ***konzistentná*** vtedy a len vtedy, ak *existuje* taká formula ψ, že platí buď $\Phi \vdash \psi$ alebo (s vylúčením – exklúziou, $\oplus$) $\Phi \vdash \neg\psi$, čo formálne vyjadríme formulou

$$\big((\Phi \vdash \psi) \oplus (\Phi \vdash \neg\psi)\big) \equiv \left(\Phi \vdash \underbrace{\psi \oplus \neg\psi}_{1}\right)$$

(2) Negáciou vyššie uvedenej definície konzistentnosti dostaneme, že množina predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sa nazýva ***nekonzistentná*** vtedy a len vtedy, ak pre *každú* dvojicu formuly a jej negácie, ψ a $\neg\psi$, platí, že ich relácie logického vyplývania z predpokladov Φ sú logicky ekvivalentné, čo formálne vyjadríme formulou

$$(\Phi \vdash \psi) \equiv (\Phi \vdash \neg\psi) \equiv \left(\Phi \vdash \underbrace{\psi \equiv \neg\psi}_{0}\right).$$

Na základe značenia používaného v tejto definícii konzistentnú množinu (teóriu) označíme ako $\Phi \vdash 1$, a podobne, nekonzistentú množinu označíme $\Phi \vdash 0$. Pri konštrukcii druhej časti definície sme použili formulu $\neg(p \oplus q) \equiv (p \equiv q)$.

Pri odvodzovaní s výhodou môžeme využívať nielen pravidlá odvodzovania, ale aj formuly o ktorých vieme, že sú logické zákony (tautológie). Takýchto formúl je nekonečne mnoho, preto z nich vyberieme niekoľko málo, pričom našou snahou bude ukázať, že z takto vybraných je možné odvodiť všetky ostatné logické zákony (tautológie). Tieto základné formuly nazveme axiómy V našich nasledujúcich úvahách budeme využívať týchto desať axióm (Hilbertov systém axióm):

***Ax*₁**	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	(2.4a)
***Ax*₂**	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(2.4b)
***Ax*₃**	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	(2.4c)
***Ax*₄**	$(p \wedge q) \Rightarrow q$	(2.4d)
***Ax*₅**	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	(2.4e)
***Ax*₆**	$p \Rightarrow (p \vee q)$	(2.4f)
***Ax*₇**	$q \Rightarrow (p \vee q)$	(2.4f)
***Ax*₈**	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r))$	(2.4g)
***Ax*₉**	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	(2.4h)
***Ax*₁₀**	$\neg\neg p \Rightarrow p$	(2.4i)

Odvodzovanie z predpokladu Φ sa chápe ak odvodzovanie z rozšírenej množiny Φ o tieto axiómy, $\Phi \cup \{Ax_1, Ax_2, ..., Ax_{10}\}$. Potom budeme očakávať, že logické zákony sú všetky formuly, ktoré sú dokázateľné z prázdnej množiny predpokladov Φ.

Príklad 2.3. Dokážte $\vdash p \Rightarrow p$.

1. krok dôkazu. V Ax_1 vykonáme substitúciu $q/(p \Rightarrow p)$, dostaneme $p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.
2. krok dôkazu. V Ax_2 vykonáme substitúciu $q/(p \Rightarrow p)$ a r/p, dostaneme $(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$
3. krok dôkazu. Aplikujeme modus ponens na formuly z 2. a 1. kroku, dostaneme $(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
4. krok dôkazu. V Ax_1 vykonáme substitúciu q/p, dostaneme $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$
5. krok dôkazu. Aplikujeme modus ponens na formuly z 3. a 4. kroku, dostaneme $p \Rightarrow p$, čo bolo treba dokázať.

Príklad 2.4. Dokáže $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$.

1. $p \Rightarrow q$ (predpoklad)
2. $q \Rightarrow r$ (predpoklad)
3. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ (Ax_1, substitúcia $p/(q \Rightarrow r)$ a q/p)
4. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (aplikácia *mp* na 2. a 3.)
5. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ (Ax_2).
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (aplikácia *mp* na 4 a 5)
7. $p \Rightarrow r$ (aplikácia *mp* NA 1. A 6.)

Postupnosť formúl tvoriacich dôkaz $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$ obsahuje sedem formúl (dôkaz má sedem krokov) $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_7$, ktoré sú určené takto:

$\varphi_1 = p \Rightarrow q$, $\varphi_2 = q \Rightarrow r$, $\varphi_3 = (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$,

$\varphi_4 = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $\varphi_5 = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,

$\varphi_6 = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, $\varphi_7 = p \Rightarrow r$.

Posledný člen tejto postupnosti φ_7 je dokazovaná formula, prvých šesť členov buď patrí do predpokladov T odvodenia alebo sú to axiómy upravené vhodnou substitúciou alebo vznikli aplikáciou modus ponens na predchádzajúce formuly postupnosti.

Poznamenajme, že už tak jednoduchý dôkaz, akou je formula $\vdash p \Rightarrow p$, vyžaduje 5 krokov. Prácnosť dôkazov zložitejších formúl rýchle rastie čo sa týka počtu jednoduchých elementárnych krokov. Preto je veľmi dôležité vo výrokovej logike nájsť metódu, ktorá podstatne zjednodušuje štruktúru dôkazu. Toto zjednodušenie poskytuje veta o dedukcii, ktorá špecifikuje vzťah medzi dokázateľnosťou formuly ψ z predpokladov obsahujúcich pomocný predpoklad φ.

Veta 2.1. (o dedukcii).
(1) *Nech* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *je množina predpokladov (teória) a* φ, ψ *sú nejaké dve formuly, potom* $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *platí práve vtedy a len vtedy (vtt) ak* $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$

$$(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \equiv (\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi) \tag{2.5a}$$

(2) *Vlastnosť* $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \vdash \psi$ *platí vtedy a len vtedy, ak* $\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$

$$(\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \vdash \psi) \equiv (\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi) \tag{2.5b}$$

Formula (2.5a) znamená, že ak z rozšírených predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \cup \{\varphi\}$ vyplýva logický dôsledok ψ, potom táto vlastnosť je ekvivalentná tomu, že z pôvodných predpokladov $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ vyplýva logický dôsledok $\varphi \Rightarrow \psi$. Dôkaz tejto vlastnosti vykonáme v dvoch nezávislých krokoch:

(1) Predpokladajme, že platí $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, potom existuje (na základe definície 2.2) postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, kde $\alpha_p = \varphi \Rightarrow \psi$, ktorá reprezentuje dôkaz formuly $\varphi \Rightarrow \psi$ z predpokladov teórie Φ. Ak rozšírime teóriu Φ o dodatočný predpoklad φ, potom použitím modus ponens na formulu $\alpha_p = \varphi \Rightarrow \psi$ a dodatočný predpoklad φ dostaneme formulu ψ. Týmto sme dokázali, že predpoklad $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$ implikuje dôsledok $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, čo bolo potrebné dokázať.

(1´) Predpokladajme, že platí $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, potom existuje (na základe definície 2.2) postupnosť formúl $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$, kde $\beta_q = \psi$, ktorá reprezentuje dôkaz formuly ψ z predpokladov rozšírenej teórie $\Phi \cup \{\varphi\}$. Pre zjednodušenie nášho dôkazu predpokladajme, že posledná formula $\beta_q = \psi$ vznikla aplikáciou modus ponens na dodatočný predpoklad φ a predchádzajúcu (vzhľadom k β_q) formulu $\beta_i = \varphi \Rightarrow \psi$, kde $i < q$. Týmto sme dokázali, že predpoklad $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implikuje dôsledok $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, čo bolo potrebné dokázať. Spojením týchto dvoch častí dôkazu dostaneme, že relácia $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ je ekvivalentná relácii $\Phi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, čím sme zavŕšili dôkaz prvej časti vety o dedukcii.

(2) Druhú časť vety (2.5b) dokážeme n-násobným použitím 1. časti vety o dedukcii, dostaneme $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow ...(\varphi_n \Rightarrow \varphi))$, čo môžeme prepísať pomocou ekvivalentných úprav do tvaru $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) \vee \varphi$, ktorý je ekvivalentný s dokazovanou formulou $\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$. Pretože úpravy používali len ekvivalentné úpravy, dokázaná implikácia platí v oboch smeroch. Pre jednoduchosť študujme formulu $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$, postupným použitím troch známych ekvivalencií výrokovej logiky $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$, $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$ a $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, dostaneme postupnosť ekvivalentných formúl: $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$, $\vdash \varphi_1 \Rightarrow (\neg\varphi_2 \vee \varphi)$, $\vdash \neg\varphi_1 \vee (\neg\varphi_2 \vee \varphi)$, $\vdash (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \vee \varphi$, $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi$, $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi$, čo bolo potrebné dokázať.

Veta 2.2. Rôzne modifikácie vety o dedukcii sú tieto:

(a) $(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \wedge (\vdash \varphi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. v množine predpokladov Φ nie je potrebné uvádzať formuly, ktoré logicky vyplývajú z axióm (logické zákony).

(b) $(\Phi \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi)$, t. j. pridanie ďalších predpokladov nemôže zmeniť dokázateľnosť formuly.

(c) $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. dôsledok predpokladov nie je potrebné uvádzať medzi predpokladmi.

(d) $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\{\varphi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. dôsledok dôsledku množiny predpokladov je taktiež dôsledkom množiny predpokladov.

(e) $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\Phi \vdash \psi) \wedge (\{\varphi, \psi\} \vdash \alpha) \Rightarrow (\Phi \vdash \alpha)$, dôsledok dôsledkov množiny predpokladov je taktiež dôsledkom množiny predpokladov.

(f) Ak $(\Phi \vdash \varphi) \wedge (\Phi \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \varphi \wedge \psi)$, t. j. konjunkcia dôsledkov množiny predpokladov je taktiež dôsledkom množiny predpokladov.

(h) $(\Phi \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \alpha)) \equiv (\Phi \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \alpha))$, t. j. na poradí predpokladov nezáleží.

(i) $\Phi \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \alpha$ práve vtedy, ak súčasne $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ a $\Phi \cup \{\psi\} \vdash \alpha$. Veta o dôkaze pomocou analýzy jednotlivých prípadov.

(j) $(\Phi \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \alpha) \equiv (\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha) \vee (\Phi \cup \{\psi\} \vdash \alpha)$, t. j. ak súčasne $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ alebo $\Phi \cup \{\psi\} \vdash \alpha$.

(k) $(\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi) \wedge (\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi) \Rightarrow (\Phi \vdash \psi)$, t. j. formula φ je neutrálna vzhľadom k formule ψ.

Doporučujeme čitateľovi, aby vykonal dôkaz týchto vlastností.

Veta o dedukcii 2.1 umožňuje podstatné skrátenie dôkazov formúl výrokovej logiky. Môžeme ju chápať ako nové (štvrté) pravidlo odvodzovania (pozri výrazy (2.1-3)). V čom spočíva výhodnosť tejto vety pri dôkaze formúl? Ak postupujeme len podľa pravidiel (2.1-3) musíme striktne dokázať každú formulu postupnosti $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ v príslušných predchádzajúcich krokoch dôkazu. Ak použijeme vetu o dedukcii ako nové pravidlo dôkazu, môžeme postulovať ad-hoc dve formuly φ a ψ, ak sa nám podarí dokázať $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, potom automaticky platí aj $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, t.j. implikácia $\varphi \Rightarrow \psi$ je logickým dôsledkom teórie (množiny predpokladov) Φ. Hovoríme, že formula φ je ***dodatočný predpoklad***, jej zavedenie do predpokladov nazývame ***aktivácia*** dodatočného predpokladu. Jej prenos do implikácie sa nazýva ***deaktivácia*** dodatočného predpokladu; po deaktivácii už formulu φ nemôžeme využívať v rámci daného dôkazu.

Príklad 2.5. Pomocou vety o indukcii dokážte formulu hypotetického sylogizmu $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

1. p	aktivácia 1. pomocného predpokladu
2. $p \Rightarrow q$	aktivácia 2. pomocného predpokladu
3. $q \Rightarrow r$	aktivácia 3. pomocného predpokladu
4. q	použitie pravidla "modus ponens" na 1 a 2
5. r	použitie pravidla "modus ponens" na 3 a 4
6. $p \Rightarrow r$	deaktivácia pomocného predpokladu 1
7. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	deaktivácia pomocného predpokladu 3
8. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	deaktivácia pomocného predpokladu 2, QED

Tento dôkaz môžeme taktiež prezentovať v zjednodušenom tvare $\{p \to q, q \to r\} \vdash (p \to r)$, k jej dôkazu predpoklady rozšírime o pomocný predpoklad $\{p\}$. Túto formulu logického vyplývania ľahko dokážeme použitím 2-krát pravidla modus ponens. Na záver dôkazu vykonáme deaktiváciu pomocného predpokladu $\{p\}$, čím dostaneme dokazovanú formulu logického vyplývania.

Príklad 2.7. Pomocou vety o indukcii dokážte formulu $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

1. $p \Rightarrow q$	aktivácia 1. pomocného predpokladu
2. $\neg q$	aktivácia 2. pomocného predpokladu
3. $\neg p$	použitie pravidla "modus tollens" na 1 a 2
4. $\neg q \Rightarrow \neg p$	deaktivácia pomocného predpokladu 2
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	deaktivácia pomocného predpokladu 1, QED

2.2 Sémantický dôsledok, sémantický prístup k odvodzovaniu formúl,

Aký je vzťah medzi axiomatickou metódou výstavby výrokovej logiky a sémantickým prístupom verifikácia formúl pomocou ich pravdivostných hodnôt? Dokážeme, že tieto dva prístupy sú ekvivalentné, každá formula, ktorá je odvoditeľná z daného súboru axióm použitým pravidiel odvodenia (hlavne *modus ponens*) je aj tautológia (pravdivá pre každú interpretáciu jej premenných) a naopak, každá tautológia je je aj odvoditeľná z axióm pomocou pravidiel odvodenia. Toto je unikátna vlastnosť formálneho systému, kde sa takto prekrýva syntax so sémantikou, kde nemôžeme striktne od seba oddeliť tieto dva prístupy. Táto vlastnosť má významný dopad na výrokovú logiku, to či nejaké formula je logickým zákonom (teoréma) môžeme jednoducho testovať napr. pomocou tabuľkovej metódy, nemusíme našu pozornosť neustále obracať na pomerne ťažkopádne techniky logického dôkazu.

Definícia 2.3.

(1) ***Teóriou*** T výrokovej logiky je ľubovoľná neprázdna množina formúl, $T=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$.

(2) Ak pre teóriu T existuje také interpretácia τ, pre ktorú sú všetky formule pravdivé, $val_\tau(\varphi_i)=1$, pre $i=1,2,...,n$, potom tieto interpretácie τ sa nazývajú **model teórie** a sú označené symbolom $[\![\Phi]\!]=\{\tau_1,\tau_2,...,\tau_a\}$.

(3) Teória T je **konzistentná**, ak má model ($[\![\Phi]\!]\neq\emptyset$), ak teória nemá model ($[\![\Phi]\!]=\emptyset$), potom sa nazýva **nekonzistentná**.

Príklad 2.8. Nech teória Φ obsahuje tri formuly

$$\Phi=\{\varphi_1=(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q),\varphi_2=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p),\varphi_3=(\neg p\wedge\neg q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\} \qquad (*)$$

chceme zistiť, či táto teória má model. Pomocou tabuľkovej metódy určíme pravdivostné hodnoty týchto formúl pre všetky možné interpretácie, pozri Tabuľku 2.1.

Tabuľka 2.1. Pravdivostné hodnoty formúl z teórie (∗).

p	q	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Z tabuľky 2.1 vyplýva, že existuje dve interpretácie premenných, $\tau_1=(p/0,q/0)$ a $\tau_2=(p/1,q/1)$, pre ktoré sú všetky formuly z Φ pravdivé, t.j. interpretácie τ_1 a τ_2 sú modely teórie Φ, $[\![\Phi]\!]=\{\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2\}$. Môžeme teda povedať, že teória Φ je konzistentná, čo vyplýva priamo zo skutočnosti, že má model.

Definícia 2.4. *Formula φ sa nazýva* ***sémantický dôsledok teórie*** Φ *(čo označíme $\Phi\vDash\varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie Φ je aj modelom formuly φ (t.j. formula φ je v $[\![\Phi]\!]$ pravdivá)*

$$(\Phi\vDash\varphi)=_{def}\left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau}\in[\![\Phi]\!]\right)\left(val_\tau(\varphi)=1\right) \qquad (2.6)$$

Majme teóriu $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$, potom pre každú interpretácia τ, ktorá je modelom teórie Φ platí, že pravdivostné hodnoty všetkých formúl sú 1, $val_\tau(\varphi_i)=1$. Nech φ je sémantickým dôsledkom teórie Φ, potom pre každý model – interpretáciu τ platí: $val_\tau(\varphi)=val_\tau(\varphi_i)=1$, pre $i=1,2,...,n$.

Príklad 2.9. Nech teória Φ je definovaná rovnako ako v príklade 2.1, má dva modely určené interpretáciami premenných $\tau_1=(p/0,q/0)$ a $\tau_2=(p/1,q/1)$. Uvažujem formulu φ v tvare $p\wedge q$, potom táto formula nie je sémantickým dôsledkom teórie Φ, pretože len pre model τ_2 je formula pravdivá, $val_{\tau_2}(\varphi)=1$, pre model τ_1 už nie je pravdivá, $val_{\tau_1}(\varphi)=0$. Uvažujme iný tvar formuly $\varphi = p \equiv q$, pre túto formulu platí $val_{\tau_1}(\varphi) = val_{\tau_2}(\varphi) = 1$, to znamená, že táto formula $\varphi = p \equiv q$ je sémantickým dôsledkom danej teórie (*)

$$\{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q), (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} \vDash (p \equiv q)$$

Nech $\Phi = \varnothing$ je prázdna teória (neobsahuje žiadnu formulu), formálne môžeme teda povedať, že ľubovoľná interpretácia τ je modelom tejto teórie. Ak formula φ je tautológia (pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi) = 1$), potom $\varnothing \vDash \varphi$, alebo jednoduchšie $\vDash \varphi$. Toto označenie tautológie sme už bolo použité v definícii 1.4.

Veta 2.2. *Nech Φ je teória a φ, ψ sú formuly. Ak súčasne platí $\Phi \vDash \varphi \Rightarrow \psi$ a $\Phi \vDash \varphi$, potom $\Phi \vDash \psi$.*

Z predpokladov vety vyplýva, že existuje taký model τ teórie Φ, že formuly $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ sú pravdivé, $val_\tau(\varphi \Rightarrow \psi) = val_\tau(\varphi) = 1$, potom z vlastností implikácie vyplýva (pozri tabuľku 1.1), že platí aj $val_\tau(\psi) = 1$. To znamená, že formula ψ je sémantickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \vDash \psi$, čo bolo potrebné dokázať.

Veta 2.3. *Nech formula φ je sémantickým dôsledkom teórie $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vDash \varphi$, potom formula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ je tautológia.*

Ak existuje taká interpretácia τ, že $val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi) = 0$, potom musí súčasne platiť $val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = 1$ a $val_\tau(\varphi) = 0$, čo je však v protiklade s predpokladom vety, QED.

Predpokladajme, že teória Φ je nekonzistentná, t.j. nemá model, potom pre každú interpretáciu premenných τ platí $val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = 0$. To znamená, že pre ľubovoľnú interpretáciu τ je výrok $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ pravdivý, čiže táto formula je tautológia, tým sme dokázali, že *pre nekonzistentnú teóriu Φ každá formula φ je jej logickým dôsledkom*.
.

Príklad 2.10. Nech $\Phi = \{p \wedge \neg p\}$ je teória obsahujúca jednu formulu - kontradikcia, ktorá je pre každú pravdivostnú hodnotu premennej p je nepravdivá, $val_{p=0,1}(p \wedge \neg p) = 0$, potom však formula $(p \wedge \neg p) \Rightarrow \varphi$ je tautológiou, čiže platí $\{p \wedge \neg p\} \vDash \varphi$.

2.3 Konštrukcia sémantického dôsledku pomocou modelu teórie

Nech $[\![\Phi]\!]$ je model teórie $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, ktorý obsahuje a interpretácií premenných

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$$

Tento model môžeme zostrojiť pomocou tabuľkovej metódy, ktorá je aplikovaná separátne pre každú formulu z teórie Φ. Predpokladajme, že poznáme množinu $[\![\Phi]\!]$, potom môžeme upriamiť našu pozornosť na konštrukciu formuly φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$, t. j. je sémantickým dôsledkom teórie Φ. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a) \in [\![\Phi]\!]$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & (ak\ \tau_i = 1) \\ \neg p_i & (ak\ \tau_i = 0) \\ 1 & (ak\ \tau_i = \#) \end{cases} \tag{2.7}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (1.11-13))

$$\psi_\tau(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)} \tag{2.8}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi(p_1, p_2, ..., p_n) = \bigvee_{\tau \in [\![\Phi]\!]} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)} \tag{2.9}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$

$$(\textit{pre každé } \tau \in [\![\Phi]\!])(val_\tau(\varphi) = 1) \tag{2.10}$$

Týmto sme dokázali, že formula (2.9) je sémamtickým dôsledkom logický dôsledok teórie Φ, t. j. $\Phi \vDash \varphi$.

Veta 2.4.
Ak teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je konzistentná, t. j. $[\![\Phi]\!] \neq \emptyset$, potom môžeme zostrojiť pomocou (12) takú formulu φ, ktorá je sémantickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \vDash \varphi$.

Pomocou tejto vety môžeme zostrojiť „minimálny tvar“ formuly φ, ktorá sémantický vyplýva z teórie Φ. Táto formula môže byť rozšírená do tvaru formuly φ_{ext}, ktorá taktiež sémantický vyplýva z teórie Φ

$$\varphi_{ext} = \varphi \vee \chi \tag{2.11}$$

kde χ je ľubovoľná formula. Ľahko sa presvedčíme o tom, že aj rozšírená formula φ_{ext} pre ľubovoľné χ. Pre každé $\tau \in [\![\Phi]\!]$ a pre každú formulu $\varphi_i \in \Phi$ platí $val_\tau(\varphi_i) = val_\tau(\varphi) = val_\tau(\varphi_{ext})$.

Príklad 2.11. Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, pomocou tabuľkovej metódy jednoducho zistíme, že daná teória Φ ma štyri interpretácie, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé

$$\tau_1 = (0,\#,\#),\ \tau_2 = (0,\#,1),\ \tau_3 = (0,1,\#),\ \tau_4 = (\#,1,1)$$

kde symbol ′#′ znamená ľubovoľný znak 0/1. Ľahko sa presvedčíme, že pre takto špecifikované interpretácie, formuly z teórie Φ sú pravdivé. Pomocou formuly (2.9) a interpretácií τ_i, pre i = 1, 2, 3, 4, ktoré boli zostrojené v príklade 9 zostrojíme formulu

$$\begin{aligned} \varphi(p,q,r) &= (\neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r) \\ &= (\neg p) \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r) \\ &= (\neg p) \vee (q \wedge r) = (p \Rightarrow q \wedge r) \end{aligned}$$

Táto formula $p \Rightarrow q \wedge r$ sémanticky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow q \wedge r)$$

Príklad 2.12. Majme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá sémanticky vyplýva z tejto teórie, $\Phi \vDash \varphi$. Použitím tabuľkovej metódy zistíme, že táto teória má model, ktorý obsahuje tri interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (00\#), \tau_2 = (0\#1), \tau_3 = (\#11)\}$$

Jednotlivým interpretáciám priradíme na základe (2.9) tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg q$$

$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge r$$

$$\varphi_{\tau_1} = q \wedge r\,.$$

Použitím (14) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv \left(\neg p \wedge \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{\varphi_2} \right) \vee \left(\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\varphi_1} \wedge r \right) = (\neg p \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge r)$$

Pretože požadujeme pri definícii sémantického vyplývania, aby formuly φ_1, φ_2 boli pravdivé pre každé $\tau \in [\![\Phi]\!]$, potom formulu φ môžeme zjednodušiť

$$\varphi = (\neg p \wedge 1) \vee (1 \wedge r) \equiv p \Rightarrow r$$

Týmto sme dokázali, že z teórie Φ tautologický vyplýva $p \Rightarrow r$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow r)$$

Príklad 2.13. Majme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá sémanticky vyplýva z tejto teórie, $\Phi \vDash \varphi$. Použitím tabuľkovej metódy zistíme, že táto teória má model, ktorý obsahuje štyri interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (0\#0), \tau_2 = (01\#), \tau_3 = (\#10), \tau_4 = (\#1\#)\}$$

Jednotlivým interpretáciám priradíme na základe (2.9) tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg r$$

$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge q$$

$$\varphi_{\tau_3} = q \wedge \neg r$$

$$\varphi_{\tau_4} = q$$

Použitím (14) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (q) \equiv q \wedge \left(\underbrace{1 \vee \neg r \vee \neg p}_{1} \right) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

$$\equiv q \vee \neg(p \vee r) \equiv (p \vee r) \Rightarrow q$$

Týmto sme dokázali, že z teórie Φ tautologický vyplýva $p \vee r \Rightarrow q$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\} \vDash p \vee r \Rightarrow q$$

Príklad 2.14. Majme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\}$, našou úlohou bude nájsť takú formulu φ, ktorá sémanticky vyplýva z tejto teórie, $\Phi \vDash \varphi$. Použitím tabuľkovej metódy zistíme, že táto teória má model, ktorý obsahuje dve interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (00), \tau_2 = (01)\}$$

Jednotlivým interpretáciam priradíme tieto konjunktívne klauzuly

$$\varphi_{\tau_1} = \neg p \wedge \neg q$$
$$\varphi_{\tau_2} = \neg p \wedge q$$

Použitím (14) dostaneme

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \equiv \neg p \wedge \Big(\underbrace{\neg r \vee r}_{1} \Big) \equiv \neg p$$

Týmto sme dokázali, že z teórie Φ tautologický vyplýva $\neg p$, čiže

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \vDash \neg p$$

2.4 Všeobecné vlastnosti výrokovej logiky

V kapitole 1.3 bolo jasne ukázané, že výroková logika je **rozhodnuteľná,** existuje algoritmus (napr. tabuľková metóda), pomocou ktorého jednoznačne rozhodneme, či daná výroková formula je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná.

Formálny systém výrokovej logiky je **korektný**, ak každá dokázaná formula z axióm je tautológia ($(\vdash \varphi) \Rightarrow (\vDash \varphi)$). Rozhodnutie o tom, či výroková logika je korektná, sa redukuje na rozhodnutie o tom, či pravidlá odvodzovania (t. j. modus ponens) sú korektné a či axiomatický systém (2.5) je tvorený formulami, ktoré sú tautológie. Jednoduchou diskusiou pravidiel odvodzovania (2.1-3) je možné dokázať ich korektnosť, taktiež použitím tabuľkovej metódy môžeme dokázať, že axiómy (2.5) sú tautológie, z týchto dvoch skutočností vyplýva, že výroková logika je korektná.

Výroková logika je **úplná** ak každá tautológia je logickým dôsledkom axióm ($(\vDash \varphi) \Rightarrow (\vdash \varphi)$). Dôkaz tejto vlastnosti je založený na Churchovej vete. Pre väčšiu prehľadnosť našich úvah zavedieme túto terminológiu: nech φ je formula, ktorá má premenné $x_1, x_2, ..., x_n$ a nech $\boldsymbol{\tau}$ je interpretácia týchto premenných, potom (pozri (1.11))

$$x^{(\tau)} = \begin{cases} x & (ak\ val_\tau(x) = 1) \\ \neg x & (ak\ val_\tau(x) = 0) \end{cases} \tag{2.12a}$$

$$\varphi^{(\tau)} = \begin{cases} \varphi & (ak\ val_\tau(\varphi) = 1) \\ \neg \varphi & (ak\ val_\tau(\varphi) = 0) \end{cases} \tag{2.12b}$$

Pomocou vzťahu (2.7) každá formula výrokovej logiky môže byť špecifikovaná pomocou DNF formuly,

$$\left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n \right)\left(x_1^{(\tau)} \wedge x_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge x_n^{(\tau)} \Rightarrow \varphi^{(\tau)} \right) \tag{2.13a}$$

Tento vzťah môžeme ľahko prepísať do relácie logického vyplývania. Zostrojíme postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, kde jednotlivé komponenty sú rekurentne definované takto:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1^{(\tau)} \\ \alpha_2 &= \alpha_1 \wedge x_2^{(\tau)} \\ &..................... \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} \wedge x_n^{(\tau)} \end{aligned} \tag{2.13b}$$

Táto postupnosť formúl je založená na pravidle $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$, ktoré priamo vyplýva z axiómy $\boldsymbol{Ax}_5$ (pozri (2.4e)). To znamená, že existuje postupnosť formúl $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, kde α_i využíva predchádzajúce formuly $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}$, pričom posledná formula

$\alpha_n = \alpha_{n-1} \wedge x_n^{(\tau)} = \varphi^{(\tau)}$, čo je podmienkou logického vyplývania. Tento výsledok je známy ako Churchova veta:

Veta 2.5. (Churchova veta). Nech φ je formula, ktorá obsahuje *n* výrokových premenných $x_1, x_2, ...x_n$ a nech **τ** je interpretácia týchto premenných, potom

$$\left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n\right)\left(\left\{x_1^{(\tau)}, x_2^{(\tau)}, ..., x_n^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi^{(\tau)}\right) \tag{2.14}$$

Predpokladajme, že formula φ je ***tautológia***, t.j. pre každú interpretáciu τ platí $val_\tau(\varphi) = 1$ a teda aj $\varphi^{(\tau)} = \varphi$, potom na základe Churchovej vety platí implikácia

$$(\models \varphi) \Rightarrow \left(pre\ každé\ \boldsymbol{\tau} \in \{0,1\}^n\right)\left(\left\{x_1^{(\tau)}, x_2^{(\tau)}, ..., x_n^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi\right) \tag{2.15}$$

Uvažujme také dve interpretácie τ a τ′, ktoré sa líšia len posledným členom, potom dokazovaná veta má tieto dve alternatívne formy

$$\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}, x_n\right\} \vdash \varphi \tag{2.16a}$$

$$\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}, \neg x_n\right\} \vdash \varphi \tag{2.16b}$$

Použitím vety 2.1 o dedukcii dostaneme

$$\left(\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \cup \{x_n\} \vdash \varphi\right) \Rightarrow \left(\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \vdash x_n \Rightarrow \varphi\right) \tag{2.16a}$$

$$\left(\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \cup \{\neg x_n\} \vdash \varphi\right) \Rightarrow \left(\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \vdash \neg x_n \Rightarrow \varphi\right) \tag{2.16b}$$

Použitím vety o neutrálnosti vety o dedukcii (pozri vetu 2.1, položku *k*), tieto dve relácie logického vyplývania sú zjednodušené do jednej relácie

$$\left\{x_1^{(\tau)}, ..., x_{n-1}^{(\tau)}\right\} \vdash \varphi \tag{2.17}$$

Tento postup neustále opakujeme, až do získania výsledku $(\models \varphi) \Rightarrow (\vdash \varphi)$, QED. Postova veta 2.6 ***o úplnosti*** patrí medzi základné teoretické výsledky výrokovej logiky.

Veta 2.6. (Postova veta). Pre formulu φ vzťah $(\vdash \varphi) \equiv (\models \varphi)$, t.j. formuly, ktoré sú logickým dôsledkom axióm výrokovej logiky sú aj tautológie a naopak.

(1) Korektnosť výrokovej logiky bola diskutovaná už v úvodnej časti tejto podkapitoly, ako dôsledok skutočností, že axiómy výrokovej logiky sú tautológie (o čom sa môžeme jednoducho presvedčiť pomocou tabuľkovej metódy) a toho, že pravidlá odvodzovania zachovávajú tautologičnosť (napr. použitím pravidla modus ponens z dvoch tautológií dostaneme dôsledok, ktorý je taktiež tautológia).

(2) Obrátime teraz našu pozornosť na dôkaz úplnosti výrokovej logiky. Na jej základe sme oprávnení dokázateľnosť nejakej formuly preverovať tým, že dokážeme jej tautologičnosť, ktorá je definovaná prostredníctvom sémantického pojmu pravdivostného ohodnotenia, napr. pomocou tabuľkovej metódy. Syntaktický pojem dokázateľnosti splýva so sémantickým pojmom tautologičnosti, čo je jedinečná vlastnosť výrokovej logiky a ojedinelá vlastnosť formálnych systémov, kde obvykle existuje zreteľná demarkačná čiara medzi syntaxom a sémantikou daného systému. Na záver môžeme teda konštatovať, že výroková logika je

- **korektná** (ak každá dokázaná formula z axióm je tautológia),
- **nerozporná** (ak zo systému axióm súčasne logicky nevyplývajú formuly φ a

$\neg\varphi$),

- **úplná** (ak každá tautológia je dokázateľná z axióm.) a
- **rozhodnuteľná** (existuje jednoduchý algoritmus, pomocou ktorého sme schopný rozhodnúť či pre dané pravdivostné hodnoty premenných je formula pravdivá alebo nie).

Na záver tejto kapitoly pristúpime k rekapitulácii pojmu "***konzistentnosť***", ktorý bol pôvodne špecifikovaný dvoma diametrálne odlišnými prístupmi. Pomocou definície 2.1 bol tento pojem špecifikovaný v rámci syntaktického prístupu, zatiaľ čo pomocou definície 2.2 bol tento pojem špecifikovaný pomocou sémantického prístupu. Použitím Postovej vety 2.6 ukážeme, že tieto prístupy sú identické a ľahko navzájom pretransformovateľné medzi sebou, jeden na druhý.

Nech $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je v rámci syntaktického prístupu množina predpokladov, zatiaľ čo, v rámci sémantického prístupu sa nazýva sa nazýva teória. Aby sme zabezpečili ekvivalentnosť týchto dvoch prístupov k formulácii pojmu „konzistentnosť“ dokážeme nasledujúcu vetu

Veta 2.7. Množina predpokladov (alebo teória) $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ je konzistentná vtedy a len vtedy, ak platí

$$\left(\left(\textit{existuje formula } \varphi\right)\left(\left(\Phi\vdash\varphi\right)\oplus\left(\Phi\nvdash\neg\varphi\right)\right)\right)\equiv\left([\![\Phi]\!]\neq\emptyset\right)$$

Dôkaz ($\Rightarrow$). Predpokladajme, že existuje taká formula φ, že platí $\left(\Phi\vdash\varphi\right)$ a neplatí $\left(\Phi\vdash\neg\varphi\right)$. Pomocou Postovej vety 2.6 prepíšeme tieto podmienky do tvaru $\left(\Phi\models\varphi\right)$ a $\left(\Phi\not\models\varphi\right)$, t. j. φ je sémantický dôsledok Φ a teda jej model musí byť neprázdny, $[\![\Phi]\!]\neq\emptyset$, QED.

Dôkaz ($\Leftarrow$). Predpokladajme, že $[\![\Phi]\!]\neq\emptyset$, formula φ je potom zostrojená na sémantickej úrovni podľa formuly (2.9), t. j. platí $\Phi\models\varphi$. Pomocou Postovej vety 2. 6 táto podmienka môže byť prepísaná do tvaru $\Phi\vdash\varphi$, QED.

Cvičenia

Cvičenie 2.1. Nájdite model pre tieto formuly

(a) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$

(b) $\left((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\right)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

(c) $\psi=(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$

(d) $\psi=(p\wedge q)\Rightarrow(p\wedge\neg q)$

(e) $p\Rightarrow(q\Rightarrow\neg p)$

(f) $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\Rightarrow(q\vee r)$.

Cvičenie 2.2. Dokážte, že pre teóriu Φ a pre formulu φ platí $\Phi\vdash\varphi$

(a) $\Phi=\{p,p\Rightarrow q,q\Rightarrow r\}$, $\varphi=r$,

(b) $\Phi=\{p\Rightarrow(q\Rightarrow r),q\}$, $\varphi=p\Rightarrow r$,

(c) $\Phi=\{p,\neg p\}$, $\varphi=q$,

Cvičenie 2.3. Zostrojte pre danú teóriu Φ formulu φ, ktorá je jej sémantickým dôsledkom

(a) $\Phi = \{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow q\}$,

(b) $\Phi = \{p \Rightarrow q \vee r, q\}$,

(c) $\Phi = \{p \Rightarrow q \wedge r, q\}$

(d) $\Phi = \{p \wedge q \Rightarrow r, p\}$,

(e) $\Phi = \{p \vee q \Rightarrow r, p\}$.

Cvičenie 2.4. Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

(1) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (2) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (3) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (4) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

(5) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (6) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (7) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (8) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

(9) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (10) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (11) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (12) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

(13) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ p \\ \hline ? \end{array}$, (14) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ q \\ \hline ? \end{array}$, (15) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg p \\ \hline ? \end{array}$, (16) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \\ \hline ? \end{array}$,

Cvičenie 2.5. Doplňte výsledok u týchto schém usudzovania

(1) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$, (2) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$, (3) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow q \\ \hline ? \end{array}$, (4) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ q \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$, (5) $\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline ? \end{array}$

Cvičenie 2.6. Overte správnosť/nesprávnosť dôsledkov, v prípade nesprávneho dôsledku upravte predpoklady tak, aby dôsledok bol správny:

(a)
ak motor nebeží, potom je motor chybný alebo nejde prúd
ak je motor chybný, potom sa musí zavolať opravár
prúd ide

---

ak nebeží motor, potom sa musí zavolať opravár

(b)
Je doma alebo je v kaviarni
ak je doma, potom vás očakáva

Ak vás neočakáva, potom je v kaviarni

(c)
nie je pravda, že študent vie po nemecký a anglický
študent nevie po anglicky

študent nevie po nemecky

(d)
ak študujem, získam dobré postavenie
ak neštudujem, potom si užívam

---

buď si užívam alebo dosiahnem dobré postavenie

Cvičenie 2.7. Aké sú dôsledky týchto predpokladov:

(a)
Karol pocestuje vlakom alebo autobusom
Ak pocestuje Karol autobusom alebo autom, potom pricestuje neskoro
Karol nepricestoval neskoro

?

(b)
Karol pocestuje vlakom alebo lietadlom
ak pocestuje lietadlom, potom navštívi priateľov
nenavštívilo priateľov

?

(c)
ak pocestujem do zahraničia, potom si zoberiem dovolenku
ak si zoberiem dovolenku, potom som necestoval do zahraničia

?

(d)
nie som občanom štátu XY
ak by som sa narodil v AB, potom by som bol občanom XY

?

(e)
som absolventom univerzity v PQ
ak by som bol sociológom, potom nemôžem byť absolventom univerzity v PQ

?

(f)
som učiteľom a taktiež som aj informatikom
ak je niekto informatikom, potom má vysoké IQ

?

(g)
Jano je informatikom
ak je Jano informatikom alebo matematikom, potom studoval v CD

?

Literatúra

[1] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[2] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Algebra a diskrétna matematika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008.

[3] Peregrin, J: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[4] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[5] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[6] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.