3. kapitola

Výroková logika III – sémantické tablá

3.1 Úvodné poznámky

To, či nejaká formula φ výrokovej logiky je teorém, $\vdash \varphi$, (logický vyplýva z axióm výrokovej logiky), alebo či je tautológiou výrokovej logiky, $\models \varphi$, (pravdivá pre každú interpretáciu jej premenných) sú v dôsledku úplnosti a korektnosti výrokovej logiky ekvivalentné problémy (pozri vetu 2.5). To znamená, že problém, či nejaká formula je teorém, môžeme riešiť pomocou tabuľkovej metódy, ktorá nám po konečnom počte krokov poskytne jednoznačnú odpoveď na otázku, či formula je tautológia, kontradikcia, alebo splniteľná (žiaľ zložitosť tabuľkovej metódy rastie exponenciálne s počtom výrokových premenných formuly) .

Trochu zložitejší problém výrokovej logiky je otázka, či formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vdash \varphi$. Táto relácia je na základe vety o dedukcii 2.3 platnou vtedy, ak platí $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$. To znamená, že odvoditeľnosť φ z predpokladov $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je prevoditeľná na úlohu, v ktorej sa skúma, či formula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ logicky vyplýva z axióm výrokovej logiky. V tejto kapitole tento štandardný „axiomatický“ prístup bude nahradený nasledujúcimi dvoma podstatne efektívnejšími technikami:

(1) Metóda ***sémantických tabiel*** [1-8] (angl. semantic tableaux), ktorá je založená na systematickom postupe transformácie výrokovej formuly do tvaru DNF, ktorý má jednoduché podmienky pre kontradikčnosť alebo splniteľnosť.

(2) Metóda ***rezolúčneho princípu*** [4,9,10], kde daná výroková formula je prepísaná do KNF, potom nad takto reprezentovanou formulou je aplikovaný systematický postup „***rezolventy***“, pomocou ktorého sa daná formula neustále zjednodušuje. Ak sa nám podarí ukázať, že dochádza k úplnému vymiznutiu formuly (vzniká tzv. prázdny symbol $\square$), potom formula je tautológia. Tento postup je pomerne dobre formalizovateľný a tvorí jeden z teoretických základov jazyka Prolog pre logické programovanie.

K zjednodušeniu diskusie v tejto kapitole zavedieme rozšírenú terminológiu, ktorá z časti už bola použitá v 1. kapitole: ***Literál*** je buď výroková premenná alebo jej negácia. Literály sú ***pozitívne*** (výroková premenná) alebo ***negatívne*** (negácia výrokovej premennej). Dva literály sú ***komplementárne*** ak majú tvar p a $\neg p$. ***Konjunktívna*** (***disjunktívna***) ***klauzula*** je konjunkcia (disjunkcia) literálov. ***Disjunktívna (konjunktívna) normálna forma*** (***DNF***[1]) (***KNF***) je disjunkcia (konjunkcia) konjuktívnych klauzulí (disjunktívnych klauzulí). Nech $\mathcal{A} = \{x, y, u, z\}$ je množina výrokových premenných, formule x, y, u, z sú pozitívne literály, zatiaľ čo formule $\neg x, \neg y, \neg u, \neg z$ sú negatívne literály. Literály z a $\neg z$ sú

[1] Disjunktívna (konjunktívna) normálna forma bola už definovaná v 1. kapitole, definícia 1.6.

komplementárne. Formula $x \wedge y \wedge \neg y$ je konjunktívna klauzula, formula $x \vee u \vee \neg y \vee z$ je disjunktívna klauzula.

Konjunktívna klauzula je kontradikcia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplementárne literály. Podobne, disjunktívna klauzula je tautológia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplementárne literály

$$\underbrace{x \wedge \neg x}_{0} \wedge y \wedge \neg z \wedge ... \equiv 0$$

$$\underbrace{x \vee \neg x}_{1} \vee y \vee \neg z \vee ... \equiv 1$$

V 1. kapitole bol prezentovaný konštruktívny dôkaz toho, že ku každej Boolovej funkcii existuje úplná DNF alebo úplná KNF Boolova funkcia. V mnohých prípadoch, tento úplný tvar formuly je zbytočne zložitý, použitím jednoduchých vlastností konjunkcie a disjunkcie (napr. $p \wedge p \equiv p$ a $p \wedge 1 \equiv p$) môžeme formulu podstatne zjednodušiť do tvaru DNF alebo KNF. Môžeme teda konštatovať, že ku každej výrokovej formuly φ existuje[2] jej DNF a KNF formula, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi \equiv \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi \equiv \varphi_{KNF}$.

Veta 3.1.
(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná DNF formula φ_{DNF} má všetky konjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.
(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná KNF formula φ_{KNF} má všetky disjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.
(3) Formula φ je ***splniteľná*** ak jej normálna forma (konjunktívna φ_{KNF} alebo disjunktívna φ_{DNF}) obsahuje aspoň jednu klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad 3.1. DNF formula $\varphi_1 = (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_2 \wedge \neg p_4)$ nie je kontradikcia, je len splniteľná, prvý konjunktívny člen neobsahuje komplementárne literály. Pre interpretáciu $\tau = (p_1/0, p_2/0, p_3/1, p_4/1)$ pravdivostná hodnota formule φ_1 je špecifikovaná vzťahom $v_\tau(\varphi_1) = 1$. DNF formula $\varphi_2 = (\neg p_3 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_1)$ je kontradikcia, každý konjunktívny člen obsahuje dvojicu $p_i \wedge \neg p_i$, čiže sú kontradikcie, disjunkcia dvoch kontradikcií je taktiež kontradikcia.

Príklad 3.2. Transformácia formuly $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ do DNF tvaru spočíva v postupnosti krokov:

(a) Odstránime ekvivalenciu, $\varphi_1 = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$.
(b) Odstránime implikácie, $\varphi_2 = ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$.
(c) Odstránime negáciu disjunkcie, $\varphi_3 = ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge (r \vee (\neg r \wedge \neg\neg p))$.
(d) Použijeme distribučný zákon pre odstránenie konjunkcie v podformule špecifikovanej ľavou zátvorkou, $\varphi_4 = ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)) \wedge (r \vee (\neg r \wedge \neg\neg p))$.
(e) Podobne odstránime konjunkciu medzi prvou a druhou zátvorkou, dvojité negácie a prebytočné zátvorky

[2] Poznamenajme, že ku každej výrokovej formule existuje mnoho funkcií φ_{DNF} (φ_{KNF}), ktoré sú s pôvodnou funkciou ekvivaletné.

$$\varphi_5 = \varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge p \wedge r) \vee (q \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p \wedge r) \vee$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p) \vee (\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge p) \vee (q \wedge p \wedge \neg r \wedge p)$$

Výsledná formula φ_5 je DNF a je ekvivalentná s pôvodnou formulou φ. Z vety 3.1 vyplýva, že formula φ je splniteľná, prvá, štvrtá a ôsma zátvorka neobsahujú dvojicu premenná a jej negácia, čiže celková formula nie je kontradikciou. Existujú také interpretácie premenných $\tau_1 = (p/0, q/0, r/1)$, $\tau_2 = (p/1, q/1, r/1)$ a $\tau_3 = (p/1, q/1, r/0)$, pre ktoré je druhá, štvrtá resp. ôsma zátvorka pravdivá, čiže aj celá disjunktná forma musí byť pravdivá.

Funkciu φ_3 môžeme použiť pre tvorbu φ_{KNF}, roznásobením poslednej tretej zátvorky dostaneme

$$\varphi_3 = \big((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)\big) \wedge \big(r \vee (\neg r \wedge p)\big)$$
$$= \varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (r \vee \neg r) \wedge (r \vee p)$$

V prípade, ak by každá disjunktívna klauzula obsahovala dvojicu komplementárnych literálov, potom formula φ_{KNF} (a teda aj φ) je tautológia. Túto podmienku spĺňuje len tretia zátvorka – disjunktná klauzula, čiže formula φ nie je tautológia. Pomocou prvej, druhej a štvrtej zátvorky môžeme navrhnúť interpretácie, pre ktoré je formula nepravdivá, $\tau_1 = (p/1, q/0)$, $\tau_2 = (p/0, q/1)$ a $\tau_3 = (p/0, r/0)$.

Príklad 3.3. Pretransformujte formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ a $\psi = \neg\varphi$ do DNF a KNF.

$$\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)$$
$$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$$

Použitím distribučných zákonov pre disjunkciu a konjunkciu získame tieto ekvivalentné formuly

$$\varphi_{DNF} = (\neg p) \vee (q) \vee (\neg q)$$
$$\varphi_{KNF} = \left(\underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee q\right) \wedge \left(\neg p \vee \underbrace{q \vee \neg q}_{1}\right) \equiv 1$$

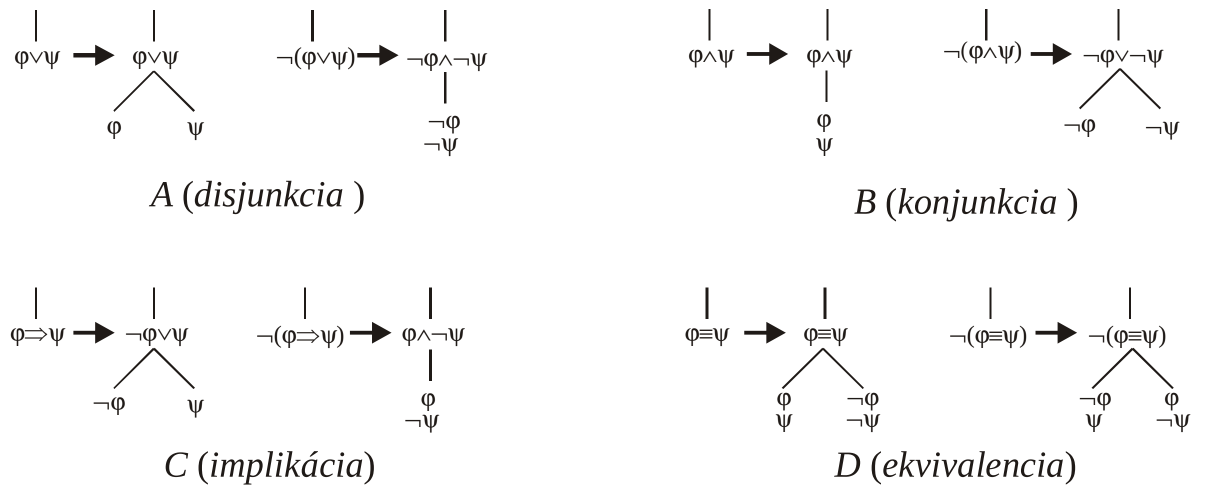
podobným spôsobom zostrojíme aj ekvivalentné funkcie pre ψ

$$\psi_{DNF} = \left(\underbrace{p \wedge \neg p}_{0} \wedge \neg q\right) \vee \left(p \wedge \underbrace{q \wedge \neg q}_{0}\right) \equiv 0$$
$$\psi_{KNF} = (p) \wedge (q) \wedge (\neg q)$$

Pre funkciu φ jej ekvivalentná funkcia φ_{KNF} obsahuje v každej disjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia φ je tautológia. Podobne, pre funkciu ψ jej ekvivalentná funkcia ψ_{DNF} obsahuje v každej konjunktívnej klauzule dvojicu komplementárnych literálov, čiže funkcia ψ je kontradikcia.

3.2 Metóda sémantických tabiel

Metóda sémantických tabiel bola naformulovaná v r. 1955 holandským logikom a matematikom Bethom [1,2], ako dôležitý a efektívny prostriedok pre jednoduchú konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl nielen výrokovej logiky, ale hlavne neklasických logík, pre ktoré je táto technika vlastne jediným prístupom k získaniu pravdivostnej interpretácie.



Obrázok 3.1. Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde sématickych tabiel. (A) Rozklad disjunkcie a jej negácie, (B) rozklad konjunkcie a jej negácie, (C) rozklad implikácie a jej negácie a (D) rozklad ekvivalencie a jej negácie.

Proces transformácie formuly z príkladu 3.2 do DNF tvaru môže byť reprezentovaný koreňovým stromom (nazývaný ***sémantické tablo***), ktorý už predpokladá, že z formuly boli odstránené ekvivalencie a implikácie. V ďalších krokoch postupujeme podľa pravidiel z obr. 3.1. Aplikáciou týchto pravidiel zostrojíme sémantické tablo (koreňový strom) pre transformáciu formuly do DNF, pozri obr. 3.2. Tie vetvy stromu, ktoré obsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´×´ a nazývajú sa ***uzavreté vetvy***. Podobne, tie vetvy, ktoré neobsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´ ´ a nazývajú sa ***otvorené vetvy***. Ak sémantické tablo obsahuje len uzavreté vetvy, potom sa nazýva ***uzavreté sémantické tablo***, v opačnom prípade, ak obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu, potom sa nazýva ***otvorené sémantické tablo***. Sémantické tablo priradené formuly φ je označené $\mathcal{T}(\varphi)$.

Ilustračný príklad sémantického tabla je ukázaný na obr. 3.2, ktorý je zostrojený pre formulu $\varphi_3 = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$ z príkladu 3.2 ,ktorá bola už upravená tak, že neobsahuje ekvivalencie, implikácie a negáciu konjunkcie alebo disjunkcie. Zostrojené sémantické tablo je otvorené, z čoho priamo vyplýva, že formula φ_3 je splniteľná (a teda aj formula φ z príkladu 3.2 ,ktorá je s ňou ekvivalentná).

Na základe platnosti vety 3.1 môžeme formulovať vetu platnú pre sémantické tablá

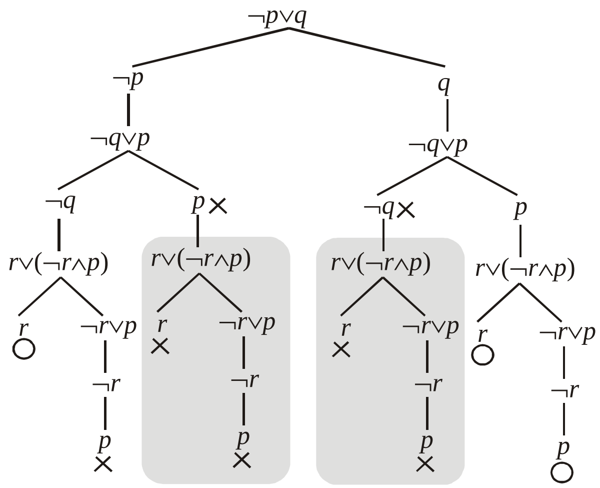
Veta 3.2.

(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ je uzavreté .

(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

(3) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ alebo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.

Druhá vlastnosť tejto vety úzko súvisí s prvou vlastnosťou. Keď chceme zistiť, či formula φ je tautológia, potom zostrojíme sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$, ak je toto tablo uzavreté, potom formula $\neg\varphi$ podľa prvej vlastnosti je kontradikcia, alebo formula φ je tautológia. Môžeme teda konštatovať, že v rámci techniky sémantických tabiel tautologičnosť formuly φ sa zistí ématak, že falzifikujeme tautologičnosť jej negácie $\neg\varphi$, ak je táto formula kontradikcia, potom pôvodná formula φ musí byť tautológiou.



Obrázok 3.2. Sémantické tablo pre formulu $\varphi_3 = \left(\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right)\right) \wedge \left(r \vee \left(\neg r \wedge \neg\neg p\right)\right)$ z príkladu 3.2, ktorá už neobsahuje ekvivalenciu, implikáciu a negáciu konjunkcie alebo disjunkcie. Metóda presne kopíruje transformáciu formuly do DNF (jednotlivé kroky tejto transformácie sú uvedené v príklade 3.2). Koncové vrcholy označené symbolom ´×´ znamenajú, že príslušná vetva stromu je uzavretá a nepravdivá (obsahuje komplementárne literály). Koncové vrcholy označené symbolom ´○´ znamená, že príslušná vetva je otvorená splniteľná. V tomto prípade existujú špecifikácie premenných $\tau_1 = \left(p/0, q/0, r/1\right)$, $\tau_2 = \left(p/1, q/1, r/1\right)$ a $\tau_3 = \left(p/1, q/1, r/0\right)$ pre ktoré je formula pravdivá.

V čom spočíva výhoda sémantického tabla pred formálnymi manipuláciami s formulou φ, ktoré ju transformujú do DNF tvaru? Aplikácia distribučných zákonov pri úprave formuly DNF tvaru je pomerne náročnou operáciou a preto je výhodné prenechať ju diagramatickej metóde konštrukcie sémantického tabla. Druhý, nemenej dôležitý aspekt konštrukcie, je uzavretie tej vetvy, ktorá obsahuje komplementárne literály. Predlžovanie takejto vetvy už neprináša žiadnu novú skutočnosť z pohľadu toho, či daná formula je kontradikciou alebo je splniteľná. Prípadne ďalšie výskyty dvojíc komplementárnych literálov už nemenia nič na skutočnosti, že daný konjunkt v DNF je nepravdivý. Preto táto možnosť „okamžitého“ uzavretia vetvy pri konštrukcii sémantického tabla obvykle patrí medzi významné zjednodušenia jeho konštrukcie, celé veľké podstromy v sémantickom table môžu byť ignorované ako nevýznamné.

V 2. kapitole bola podaná definícia logického dôsledku formuly φ z množiny formúl (predpokladov) $\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\right\}$ ako postupnosť formúl $\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\right)$, kde $\alpha_m = \varphi$. Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$, t. j. skúmaním, či táto formula logický vyplýva z axiomatického systému uvedeného v 2. kapitole. Pomocou sémantických tabiel je problém $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ formulovateľný veľmi efektívne pomocou vety:

Veta 3.3. Formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\right\}$, $\Phi \vdash \varphi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo, ktorého vrchol je priradený formule $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$, je uzavreté.

Táto veta je priamym dôsledkom skutočnosti, že metóda sémantického tabla je vlastne špecifický spôsob prepisu formuly do DNF pomocou operácií, ktoré sú ekvivalencie (napr. De Morganove relácie, distributívne vzťahy medzi disjunkciou a konjunkciou a pod.). Čiže môžeme konštatovať, že pre danú formulu φ je prepis na φ_{DNF} je čisto syntaktický prístup, ktorý nepoužíva žiadne sémantické interpretácie.

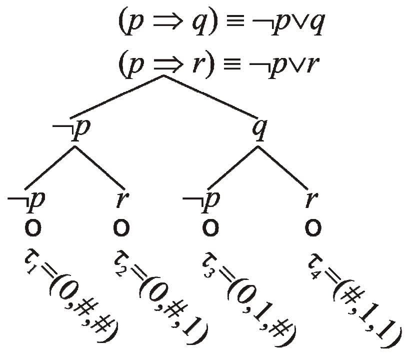
3.2.1 Konštrukcia sémantického vyplývania pomocou sémantických tabiel

Prvú úlohu, ktorú budeme riešiť v tomto aplikačnom odseku kapitoly, bude úloha zostrojiť pomocou sémantických tabiel množinu interpretácií pre teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$$

Danú úlohu rieši nasledujúca veta

Veta 3.4.
Interpretácie z množiny $[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$ sú určené pomocou otvorených vetví sémantického tabla $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. Každej otvorenej vetve môžeme priradiť interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$, pre ktorú sú všetky literály na danej vetve pravdivé.



Obrázok 3.3. Sémantické tablo $\mathcal{T}((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r))$ pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, v tomto prípade každá vetva je otvorená, čiže môžeme k nej priradiť interpretáciu $\boldsymbol{\tau}_i$, pre i = 1, 2, 3, 4.

Príklad 3.4. Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu modelov $[\![\Phi]\!]$. Podľa vety 3.4 zostrojíme sémantické tablo pre konjunkciu formúl z teórie Φ, ktoré je znázornené na obr. 3.3.

Teória Φ má štyri interpretácie, pre ktorú sú všetky formuly pravdivé

$$\boldsymbol{\tau}_1 = (0,\#,\#),\ \boldsymbol{\tau}_2 = (0,\#,1),\ \boldsymbol{\tau}_3 = (0,1,\#),\ \boldsymbol{\tau}_4 = (\#,1,1)$$

kde symbol ´#´ znamená ľubovoľný znak 0/1. Ľahko sa presvedčíme, že pre takto špecifikované interpretácie, obidve formuly z teórie Φ sú pravdivé.

Ak poznáme množinu modelov $[\![\Phi]\!]$, potom môžeme upriamiť našu pozornosť na konštrukciu funkcie φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$, t. j. je tautologickým dôsledkom teórie Φ. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a) \in [\![\Phi]\!]$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & (ak\ \tau_i = 1) \\ \neg p_i & (ak\ \tau_i = 0) \\ 1 & (ak\ \tau_i = \#) \end{cases} \tag{3.1}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (2.6))

$$\psi_\tau(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)} \tag{3.2}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi(p_1, p_2, ..., p_n) = \bigvee_{\tau \in [\![\Phi]\!]} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)} \tag{3.3}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$

$$(\forall \boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!])(val_{\boldsymbol{\tau}}(\varphi) = 1) \tag{3.4}$$

Týmto sme dokázali, že funkcia (3.3) je tautologický dôsledok teórie Φ, t. j. $\Phi \vDash \varphi$.

Veta 3.5.
Ak teória $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ je konzistetná (má model, $[\![\Phi]\!] \neq \emptyset$), potom môžeme zostrojiť pomocou (3.3) takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ, $\Phi \vDash \varphi$.

Príklad 3.5. Budeme pokračovať v ďalšom riešení príkladu 3.4. Pomocou formuly (3.3) a interpretácií $\boldsymbol{\tau}_i$, pre i = 1, 2, 3, 4, ktoré boli zostrojené v príklade 3.4 zostrojíme formulu

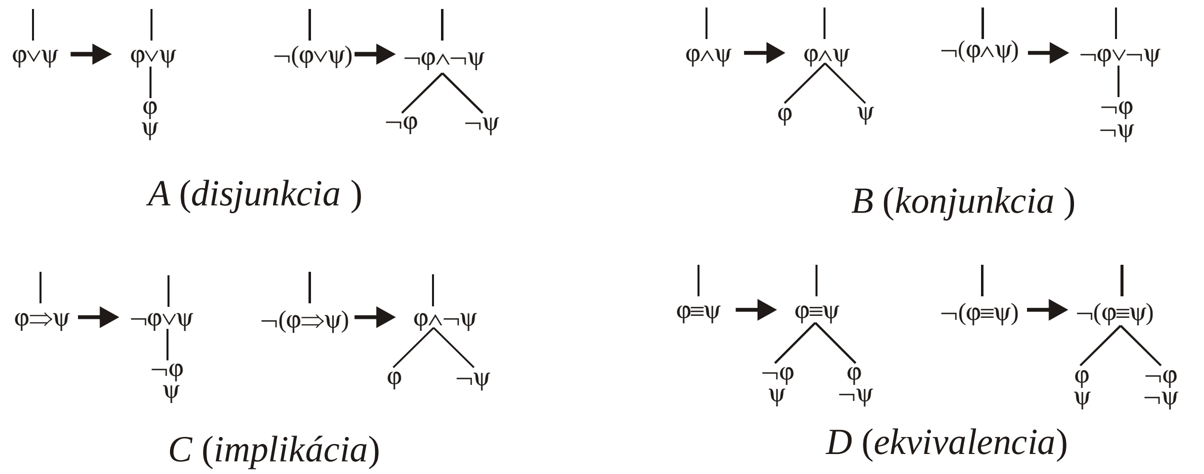
$$\begin{aligned} \varphi(p,q,r) &= (\neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r) \\ &= (\neg p) \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r) \\ &= (\neg p) \vee (q \wedge r) = (p \Rightarrow q \wedge r) \end{aligned}$$

Táto formula tautologicky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow q \wedge r)$$

3.2.2 Metóda duálnych sémantických tabiel

Ukážeme, že metóda sémantických tabiel môže byť formulovaná aj alternatívne tak, že vedie ku konštrukcii formuly v KNF; tento prístup budeme nazývať ***duálne sémantické tablá***. Nech φ je formula výrokovej logiky, potom duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je špecifikované pravidlami z obr. 3.5, ktorý vznikol z obr. 3.4 tak, že módy predlžovania z tohto obrázku sú zamenené medzi disjunkciou a konjunkciou. Každá vetva duálneho sémantického tabla reprezentuje jednu disjunktívnu klauzulu z φ_{KNF} , ak dáme do vzájomnej disjunkcie postupnosť literálov, ktoré sa vyskytujú v danej vetve zostrojíme jednu z množných disjunktívnych klauzúl. Podobne ako pre normálne sémantické tablá, ak daná vetva duálneho tabla obsahuje dvojicu komplementárnych klauzúl, potom táto vetva sa nazýva ***uzavretá***, v opačnom prípade sa nazýva ***otvorená***; poznamenajme, že uzavreté a otvorené vetvy tabla budú označené symbolmi ´×´ resp. ´ ´. Ak všetky vetvy duálneho sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ sú uzavreté, potom duálne sémantické tablo sa nazýva ***uzavreté***, v tomto prípade každá disjunktívna klauzula obsahuje dvojicu komplementárnych literálov, čiže je pravdivá, potom je pravdivá aj celková konjunkcia klauzúl v φ_{KNF}. Opakom uzavretého sémantického duálneho tabla je ***otvorené*** duálne sémantické tablo, ktoré obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu. Na základe platnosti vety 3.1 môžeme formulovať vetu platnú pre duálne sémantické tablá (ktorá je „duálna“ k vete 3.2).



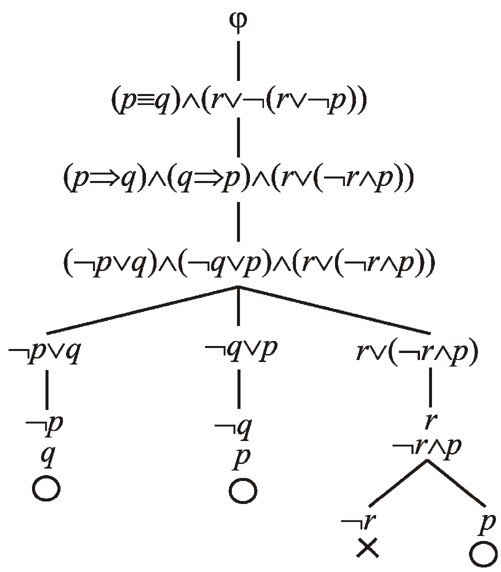
Obrázok 3.4. Základné módy tvorby binárneho stromu v metóde duálnych sémantických tabiel, kde jednotlivé módy tvorby stromu sú získané z obr. 3.1 zámenou módov medzi konjunkciou a disjunkciou. (A) Rozklad disjunkcie a jej negácie, (B) rozklad konjunkcie a jej negácie, (C) rozklad implikácie a jej negácie a (D) rozklad ekvivalencie.

Veta 3.6.

(1) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté.

(2) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

(2) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ alebo $\tilde{\mathcal{T}}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.



Obrázok 3.4. Znázornenie duálneho sémantického tabla formuly $\varphi = (p \equiv q) \wedge \big(r \vee \neg(r \vee \neg p)\big)$. Každá vetva reprezentuje jednu disjunktívnu klauzulu z $\varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \cancel{(r \vee \neg r)} \wedge (r \vee p)$, pričom sme ponechali len tie disjunktívne klauzuly, ktoré sú reprezentované otvorenými vetvami.

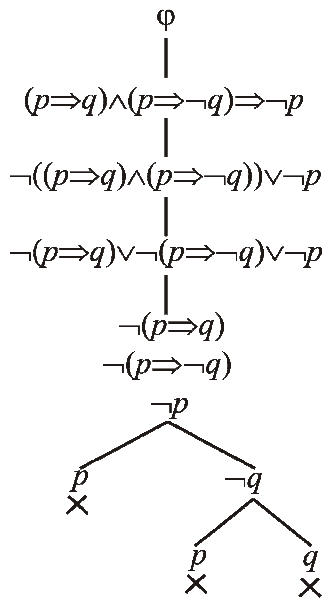
Študujme formulu $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$, jej KNF bola zostrojená v príklade 3.2: $\varphi \equiv \varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (r \vee p)$. Z tohto tvaru formuly φ vyplýva, že je nepravdivá pre interpretácie $\boldsymbol{\tau}_1 = (1,0,\#)$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (0,1,\#)$ a $\boldsymbol{\tau}_3 = (0,\#,0)$. Duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ priradené formule φ je znázornené na obr. 3.6.

Vyššie uvedené tri interpretácie môžeme ľahko zostrojiť pomocou otvorených ciest duálneho sémantického tabla zobrazeného na obr. 3.4. Pre danú otvorenú cestu urobíme zoznam literálov, ktoré sa na nej vyskytujú. Potom *i*-tá komponenta interpretácie $\boldsymbol{\tau}$ je určená

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{cases} 1 & (l_i = \neg x_i) \\ 0 & (l_i = x_i) \\ \# & (l_i \textit{ sa nevyskytuje v ceste}) \end{cases}$$

Pomocou takto získaných interpretácií môžeme zostrojiť model, ktorý nám falzifikuje predpoklad tautologičnosti formuly φ.

Príklad 3.6. Pomocou duálneho sémantického tabla dokážte, že formula $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ je tautológia, pozri obr. 3.5.



Obrázok 3.5. Znázornenie duálneho sémantického tabla formuly (nazývanej *reductio ad absurdum*) $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$, jej duálny tvar je $\tilde{\varphi} = (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \Rightarrow \neg p$. Ak duálne sémantické tablo je uzavreté, potom formula φ je tautológia.

Cvičenia

Cvičenie 3.1. Pomocou metódy sémantických tabiel a konjugovaných sémantických tabiel dokážte, že formuly sú tautológie

(a) $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,

(b) $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))$,

(c) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$.

Cvičenie 3.2. Pomocou metódy sémantických tabiel dokážte, že množina formúl $\boldsymbol{T} = \{ p \Rightarrow q, p \wedge q, p \Rightarrow p \vee q \}$ je neprotirečivá (t.j. existuje aspoň jedna špecifikácia premenných $\tau_1 = (p/?, q/?)$, pre ktorú sú všetky formuly z $\boldsymbol{T}$ pravdivé).

Cvičenie 3.3. Pomocou sémantických tabiel a konjugovaných sémantických tabiel zistite, či formuly sú tautológie, splniteľné alebo kontradikcie

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$,

(b) $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$,

(c) $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow \neg p$.

Cvičenie 3.4. Pomocou sémantických tabiel dokážte konzistentnosť alebo nekonzistentnosť teórií

(a) $\boldsymbol{T} = \{ s_1, s_2, s_1 \Rightarrow d_1, s_2 \Rightarrow d_1 \wedge d_2 \}$,

(b) $\boldsymbol{T} = \{ s_1, s_2, s_1 \Rightarrow d_1, s_2 \Rightarrow \neg d_1 \wedge d_2 \}$,

(c) $\boldsymbol{T} = \{ p, \neg q, p \Rightarrow q \}$,

(d) $\boldsymbol{T} = \{ p \wedge r, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r) \}$

Cvičenie 3.5. Pomocou metódy sémantických tabiel riešte reláciu $\Phi \vDash ?$, kde $\Phi = \{ \varphi_1, ..., \varphi_n \}$ je množina (teória) formúl výrokovej logiky, cieľom úlohy je určiť takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ.

(a) $\{ p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \} \vDash ?$

(b) $\{ p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q \} \vDash ?$

(c) $\{ p \Rightarrow r, q \Rightarrow r \} \vDash ?$

(d) $\{ p \Rightarrow q, p \Rightarrow r \} \vDash ?$

Cvičenie 3.11. Formalizujte tieto výroky. Použitím sémantických tabiel rozhodnite či výrok pod čiarou je sémantický dôsledok výrokov nad čiarou.

(a)
Ak prší, potom nepôjdeme na prechádzku
Ak nepôjdeme na prechádzku, potom pôjdeme do kina
ak pôjdeme do kina a bude pršať, potom použijeme autobus
prší

---

pôjdeme do kina

(b)
Peter alebo Pavol pôjde do Grécka
Ak Pavol pôjde do Grécka, potom taktiež pôjde aj Renáta a Simona nepôjde
Ak Tomáš pôjde do Grécka, potom pôjde taktiež aj Renáta
Ak Simona pôjde do Grécka, potom taktiež pôjde aj Tomáš

Peter pôjde do Grécka

Literatúra

[1] Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam 1959.

[2] Beth, E. W: Semantic Entailment and Formal Derivability. *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. **18** (1955) 309-342.

[3] D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hahnle, R., Posegga, J. (eds.): *Handbook of Tableau Methods*. Springer, Berlin 1999.

[4] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2006.

[5] Kvasnička V., Pospíchal, J.: Technika sémantických tabiel v logike. In *Umelá inteligencia a kognitívna veda*, II. Dieľ. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2010.

[6] Peregrin, J.: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[7] Priest, G.: *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[8] Smullyan, R. M.: *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin 1968 (slovenský preklad *Logika prvého rádu*. ALFA, Bratislava 1979).

[9] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha, 2001.

[10] Švejdar, V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.