Matematická logika

3. prednáška

Výroková logika III
Sémantické tablá

Úvodné poznámky

Cieľom dnešnej prednášky sú dve moderné „sémantické metody“ verifikácie skutočnosti, či formula φ je tautológia alebo kontradikcia:

(1) ***Metóda sémantických tabiel*** (angl. semantic tableaux), ktorá je založená na systematickom postupe transformácie výrokovej formuly do tvaru DNF, ktorý má jednoduché podmienky pre kontradikčnosť alebo splniteľnosť.

(2) ***Metóda rezolúčneho princípu***, kde daná výroková formula je prepísaná do KNF, potom nad takto reprezentovanou formulou je aplikovaný systematický postup „***rezolventy***“, pomocou ktorého sa daná formula neustále zjednodušuje.

Základná terminológia z Boolovych funkcií

Východiskový elementárny pojem je ***výroková premenná***: p, q, r, ...
Literál je buď výroková premenná alebo jej negácia. Literály sú ***pozitívne*** (výroková premenná) alebo ***negatívne*** (negácia výrokovej premennej). Dva literály sú ***komplementárne*** ak majú tvar p a $\neg p$.

Konjunktívna (***disjunktívna***) ***klauzula*** je konjunkcia (disjunkcia) literálov.
Disjunktívna (konjunktívna) normálna forma (*DNF*) (***KNF***) je disjunkcia (konjunkcia) konjuktívnych klauzulí (disjunktívnych klauzulí).

Konjunktívna klauzula je kontradikcia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplementárne literály. Podobne, disjunktívna klauzula je tautológia vtedy a len vtedy ak obsahuje komplmentárne literály

$$\underbrace{x \wedge \neg x}_{0} \wedge y \wedge \neg z \wedge \ldots \equiv 0$$

$$\underbrace{x \vee \neg x}_{1} \vee y \vee \neg z \vee \ldots \equiv 1$$

Ku každej výrokovej formule φ existuje jej DNF a KNF formula, ktorá je s ňou ekvivalentná, $\varphi \equiv \varphi_{DNF}$ resp. $\varphi \equiv \varphi_{KNF}$.

Veta 3.1.

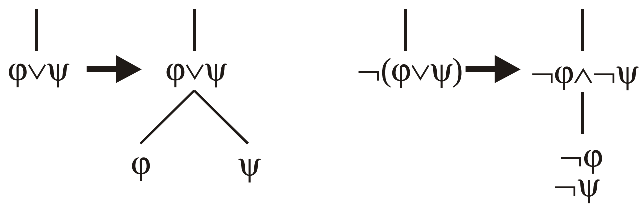
(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná DNF formula φ_{DNF} má všetky konjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.

(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak jej ekvivalentná KNF formula φ_{KNF} má všetky disjunktívne klauzuly také, že obsahujú dvojicu komplementárnych literálov.

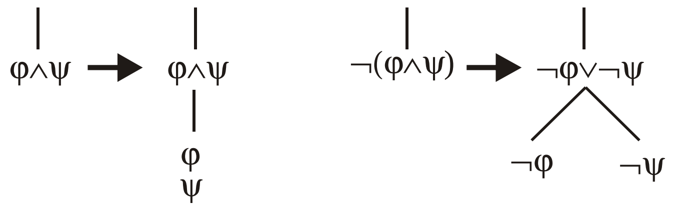
(3) Formula φ je ***splniteľná*** ak jej normálna forma (konjunktívna φ_{KNF} alebo disjunktívna φ_{DNF}) obsahuje aspoň jednu klauzulu, ktorá neobsahuje dvojicu komplementárnych literálov.

Príklad diagramamticej metódy transformácie formuly φ na DNF/KNF

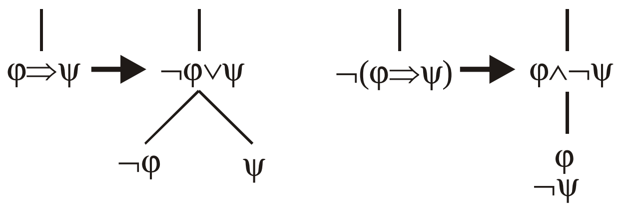
Tabuľka diagramamtických elementárnych operácií pre tvorbu DNF



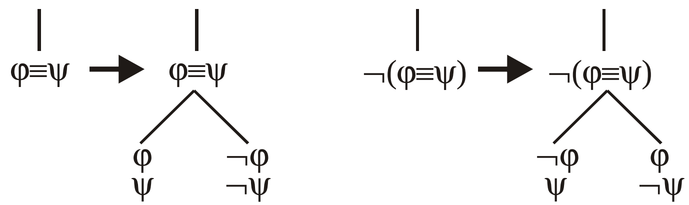
A (*disjunkcia*)



B (*konjunkcia*)

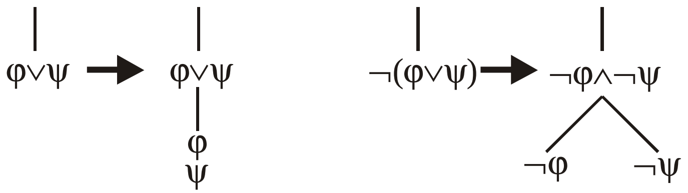


C (*implikácia*)

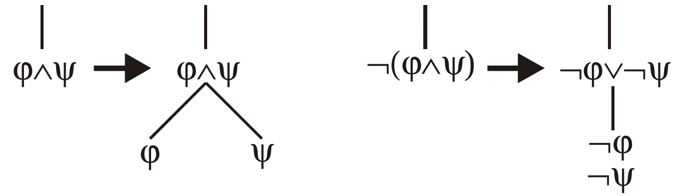


D (*ekvivalencia*)

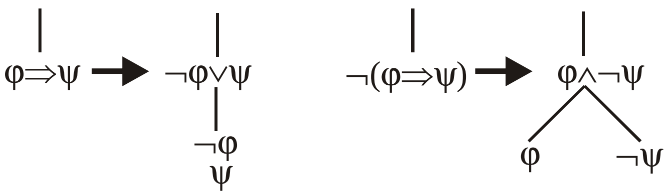
Tabuľka diagramamtických elementárnych operácií pre tvorbu KNF



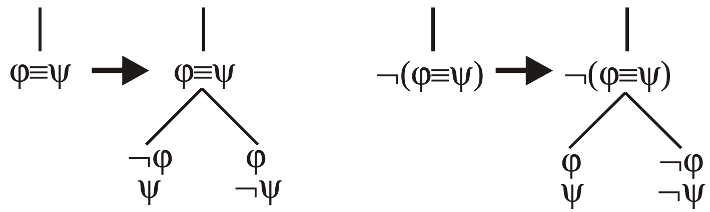
A (*disjunkcia*)



B (*konjunkcia*)



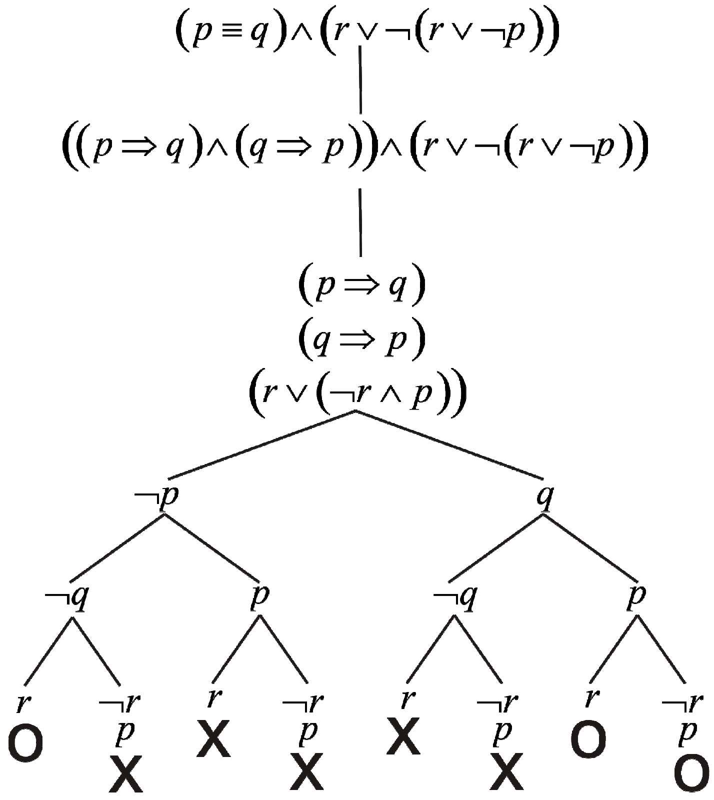
C (*implikácia*)



D (*ekvivalencia*)

.

Vykonajte transformáciu formule $\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p))$ do DNF tvaru



$$\varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee \underbrace{(q \wedge p \wedge r) \vee (q \wedge p \wedge \neg r)}_{rezolventa}$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p) \vee \cancel{(r \wedge \neg r)}$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

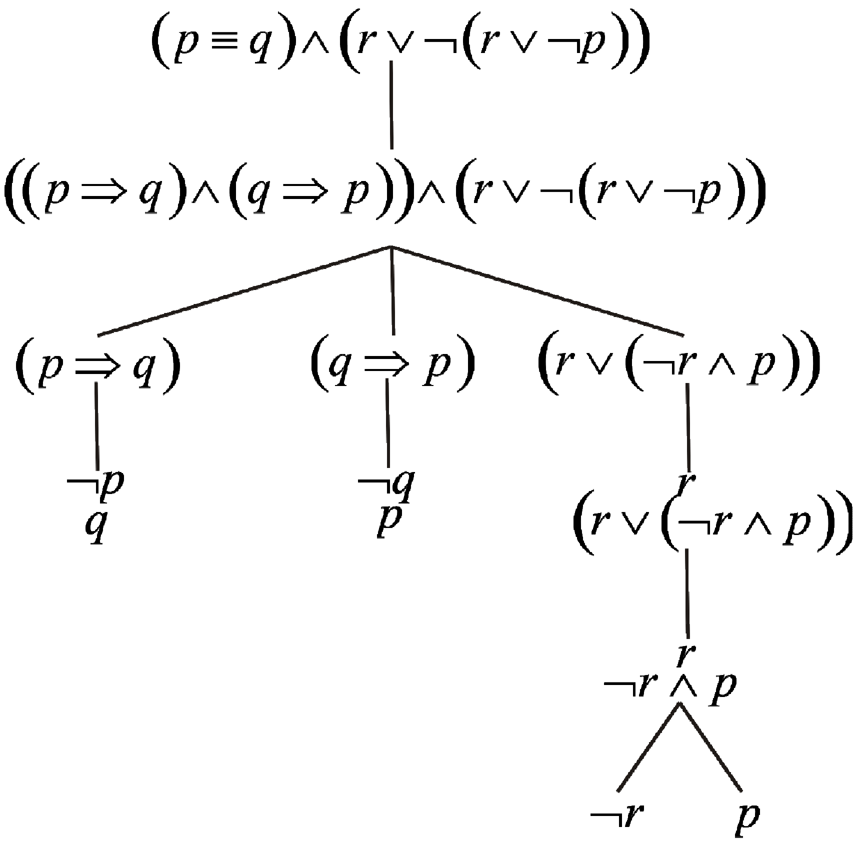
$$\varphi = (p \equiv q) \wedge \left(r \vee \neg (r \vee \neg p)\right) \equiv \varphi_{DNF} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

#	p	q	r	$p \equiv q$	$r \vee \neg p$	$\neg(r \vee \neg p)$	$r \vee \neg(r \vee \neg p)$	φ
1	0	0	0	1	1	0	0	**0**
2	0	0	1	1	1	0	1	**1**
3	0	1	0	0	1	0	0	**0**
4	0	1	1	0	1	0	1	**0**
5	1	0	0	0	0	1	1	**0**
6	1	0	1	0	1	0	1	**0**
7	1	1	0	1	0	1	1	**1**
8	1	1	1	1	1	0	1	**1**

$\tau_1 = (0,0,1)$

$\tau_2 = (1,1,\#)$

Sémantické tablo pre KNF tvar



$$\varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \cancel{(r \vee \neg r)} \wedge (r \vee p)$$
$$= (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (r \vee p)$$

$$\varphi = (p \equiv q) \wedge (r \vee \neg(r \vee \neg p)) \equiv \varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (r \vee p)$$

#	p	q	r	$p \equiv q$	$r \vee \neg p$	$\neg(r \vee \neg p)$	$r \vee \neg(r \vee \neg p)$	φ	
1	0	0	0	1	1	0	0	0	$\tau_1 = (1,1,1)$
2	0	0	1	1	1	0	1	1	
3	0	1	0	0	1	0	0	0	$\tau_2 = (1,0,1)$
4	0	1	1	0	1	0	1	0	$\tau_3 = (1,0,0)$
5	1	0	0	0	0	1	1	0	$\tau_4 = (0,1,1)$
6	1	0	1	0	1	0	1	0	$\tau_5 = (0,1,0)$
7	1	1	0	1	0	1	1	1	
8	1	1	1	1	1	0	1	1	

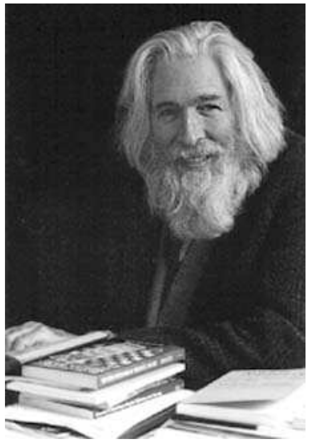
Súhrn: Pomocou diagramatickej metódy ľahko a prehladne vykonáme transformáciu formule φ do tvaru DNF alebo KNF

Metóda sémantických tabiel

Metóda sémantických tabiel bola naformulovaná ako dôležitý a efektívny prostriedok pre jednoduchú konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl nielen výrokovej logiky, ale hlavne neklasických logík, pre ktoré je táto technika vlastne jediným prístupom k získaniu pravdivostnej interpretácie.

(A) E. W. Beth

(B) J. Hintikka



(C) R. Smullyan

Tvorcovia techniky sémantických tabiel. (A) Belgický matematik a logik Evert Willem Beth (1908 –1964), ktorého práce podstatne ovplyvnili základy matematiky. (B) Fínsky filozof a logik Jaakko Hintikka (1929) patrí medzi významné osobnosti, ktoré sa zaslúžili o rozvoj modálnej logiky. (C) Americký matematik, filozof, logik a koncertný umelec Raymond Smullyan vytvoril modernú verziu sémantických tabiel.

Proces transformácie formuly φ do DNF/KNF tvaru môže byť reprezentovaný koreňovým stromom (nazývaný ***sémantické tablo***), ktorý už predpokladá, že z formuly boli odstránené ekvivalencie a implikácie. Aplikáciou vyššie uvedených pravidiel zostrojíme sémantické tablo (koreňový strom) pre transformáciu formuly do DNF/KNF tvaru. Tie vetve stromu, ktoré obsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´×´ a nazývajú sa ***uzavreté vetve***. Podobne, tie vetve, ktoré neobsahujú komplementárne literály sú označené symbolom ´ ´ a nazývajú sa ***otvorené vetve***. Ak sémantické tablo obsahuje len uzavreté vetve, potom sa nazýva ***uzavreté sémantické tablo***, v opačnom prípade, ak obsahuje aspoň jednu otvorenú vetvu, potom sa nazýva ***otvorené sémantické tablo***. Sémantické tablo priradené formule φ je označené $\mathcal{T}(\varphi)$.

V čom spočíva výhoda sémantického tabla pred formálnymi manipuláciami s formulou φ, ktoré ju transformujú do DNF tvaru?

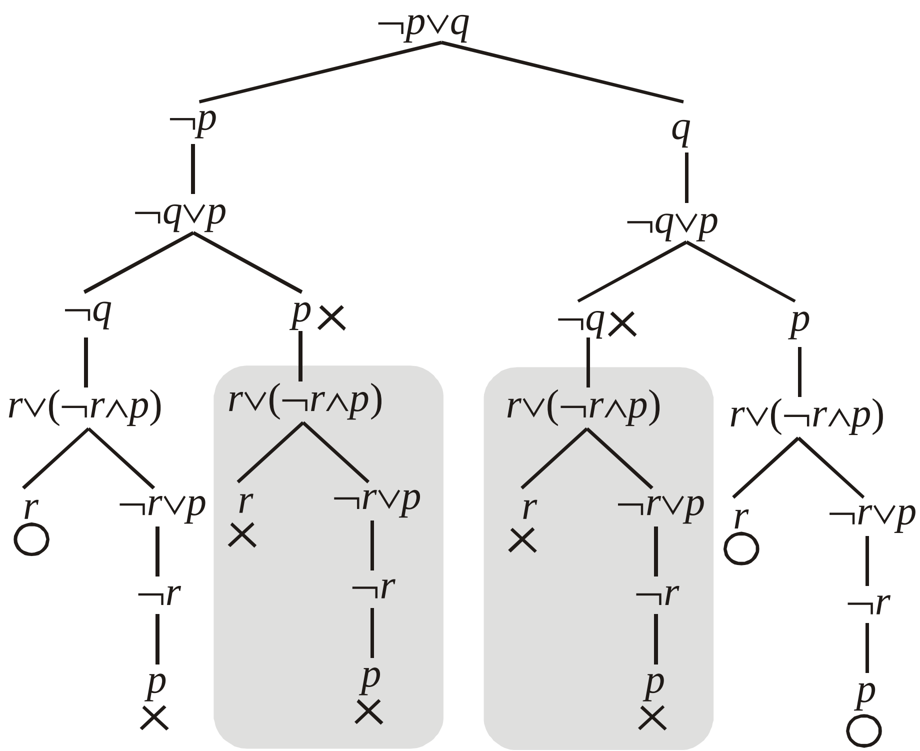
Aplikácia distribučných zákonov pri úprave formuly DNF tvaru je pomerne náročnou operáciou a preto je výhodné prenechať ju diagramatickej metódy konštrukcie sémantického tabla. Druhý, nemenej dôležitý aspekt konštrukcie je uzavretie tej vetvy, ktorá obsahuje komplementárne literály. Predlžovanie takejto vetve už neprináša žiadnu novú skutočnosť z pohľadu toho, či daná formula je kontradikciou alebo je splniteľná. Prípadne ďalšie výskyty dvojíc komplementárnych literálov už nemení nič na skutočnosti, že daný konjunkt v DNF je nepravdivý. Preto táto možnosť „okamžitého“ uzavretia vetvy pri konštrukcii sémantického tabla obvykle patrí medzi významné zjednodušenia jeho konštrukcie, celé veľké podstromy v sémantickom table môžu byť ignorované ako nevýznamné.

Veta 3.2.

(1) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ je uzavreté .

(2) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

(3) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo $\mathcal{T}(\varphi)$ alebo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.



Koncové vrcholy označené symbolom ´×´ znamená, že príslušná vetva stromu je uzavretá a nepravdivá (obsahuje komplementárne literály). Koncové vrcholy označené symbolom ´○´ znamená, že príslušná vetva je otvorená splniteľná. V tomto prípade existujú špecifikácie premenných $\tau_1 = \left(p/0, q/0, r/1\right)$, $\tau_2 = \left(p/1, q/1, r/1\right)$ a $\tau_3 = \left(p/1, q/1, r/0\right)$pre ktoré je formula pravdivá.

Formula φ je logickým dôsledkom formuly z množiny formúl (predpokladov) $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ ako postupnosť formúl $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, kde $\alpha_m = \varphi$. Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$, t. j. skúmaním, či táto formula logický vyplýva z axiomatického systému. Pomocou sémantických tabiel je problém $\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ formulovateľný veľmi efektívne pomocou vety:

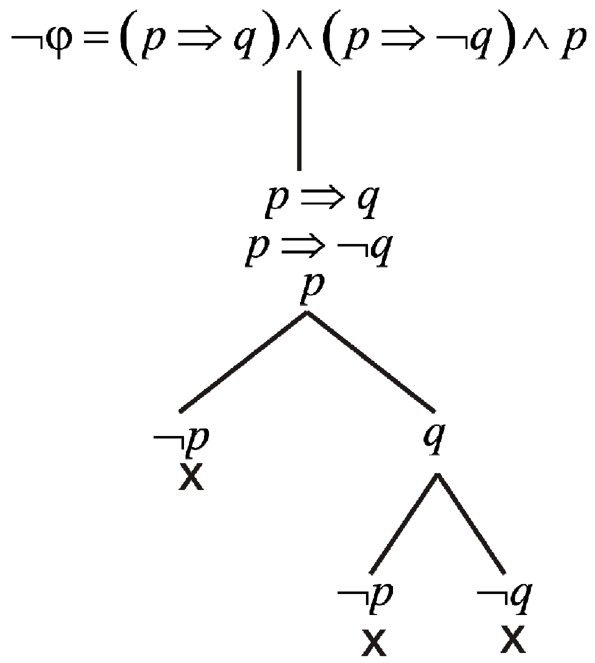
Veta 3.3. Formula φ je logickým dôsledkom množiny formúl $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, $\Phi \vdash \varphi$, vtedy a len vtedy, ak sémantické tablo, ktorého vrchol je priradený formule $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$, je uzavreté.

Príklad

Pomocou techniky sémantického tabla verifikujte logické vyplývanie (pravidlo reductio ad absurdum)

$$\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \vdash \neg p$$

Zostrojíme sémantické tablo pre formulu $\neg\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge p$



Konštrukcia sémantického vyplývania pomocou sémantických tabiel

Prvú úlohu, ktorú budeme riešiť v tomto aplikačnom odseku kapitoly, bude úloha zostrojiť pomocou sémantických tabiel množinu interpretácií pre teóriu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$

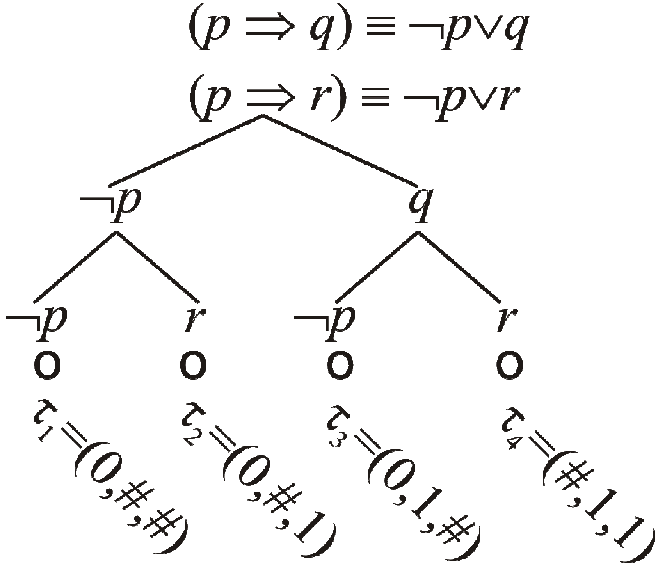
$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$$

Danú úlohu rieši nasledujúca veta

Veta 3.4.
Interpretácie z množiny $[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a\}$ sú určené pomocou otvorených vetví sémantického tabla $\mathcal{T}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. Každej otvorenej vetve môžeme priradiť interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$, pre ktorú sú všetky literály na danej vetve pravdivé

Príklad

Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu modelov $[\![\Phi]\!]$.



Sémantické tablo $\mathcal{T}\left((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\right)$pre teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$, v tomto prípade každá vetva je otvorená, čiže môžeme k nej priradiť interpretáciu $\boldsymbol{\tau}_i$, pre i = 1, 2, 3, 4.

$$\boldsymbol{\tau}_1 = (0,\#,\#),\ \boldsymbol{\tau}_2 = (0,\#,1),\ \boldsymbol{\tau}_3 = (0,1,\#),\ \boldsymbol{\tau}_4 = (\#,1,1)$$

Ak poznáme množinu modelov $[\![\Phi]\!]$, potom môžeme zostrojiť funkcie φ, ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$, t. j. je tautologickým dôsledkom teórie Φ. Definujme premenné pre danú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a) \in [\![\Phi]\!]$

$$p_i^{(\tau_i)} = \begin{cases} p_i & (ak\ \tau_i = 1) \\ \neg p_i & (ak\ \tau_i = 0) \\ 1 & (ak\ \tau_i = \#) \end{cases}$$

Potom môžeme definovať konjunktívnu klauzulu (pozri (2.6))

$$\psi_\tau(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)}$$

Pomocou tejto klauzuly definujme výslednú funkciu

$$\varphi(p_1, p_2, ..., p_n) = \bigvee_{\tau \in [\![\Phi]\!]} p_1^{(\tau)} \wedge p_2^{(\tau)} \wedge ... \wedge p_n^{(\tau)}$$

ktorá je pravdivá pre každú interpretáciu $\boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!]$

$$(\forall \boldsymbol{\tau} \in [\![\Phi]\!])(val_{\boldsymbol{\tau}}(\varphi) = 1)$$

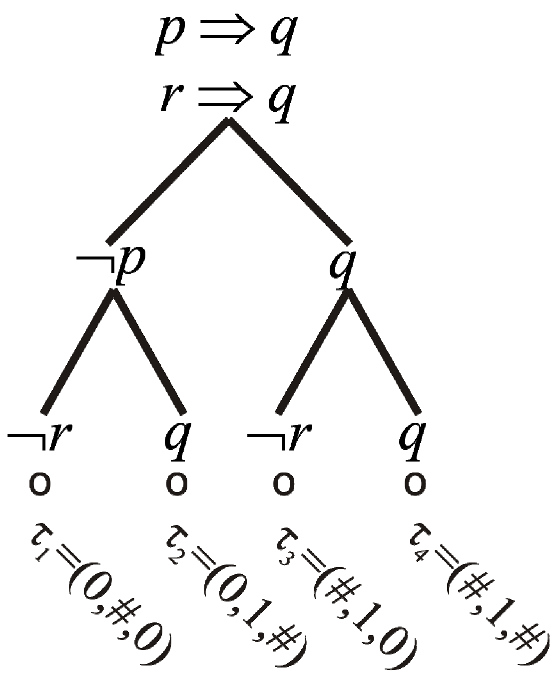
$$
\begin{aligned}
\varphi(p,q,r) &= (\neg p) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r) \\
&= (\neg p) \wedge \underbrace{(1 \vee r \vee q)}_{1} \vee (q \wedge r) \\
&= (\neg p) \vee (q \wedge r) = (p \Rightarrow q \wedge r)
\end{aligned}
$$

Táto formula tautologicky vyplýva z predpokladov obsiahnutých v teórii $\Phi = \{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\}$

$$
\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vDash (p \Rightarrow q \wedge r)
$$

Príklad

Uvažujme teóriu $\Phi = \{p \Rightarrow q, r \Rightarrow q\}$, našim cieľom bude zostrojiť množinu modelov $[\![\Phi]\!]$.

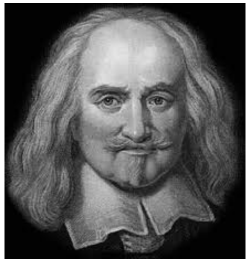


Model $[\![\Phi]\!]$ obsahuje tieto interpretácie

$$[\![\Phi]\!] = \{\tau_1 = (0,\#,0), \tau_2 = (0,1,\#), \tau_3 = (\#,1,0), \tau_4 = (\#,1,\#)\}$$

Potom funkcia φ, ktorá tautologicky vyplýva z modelu $[\![\Phi]\!] \vDash \varphi$ má tvar

$$\begin{aligned}\varphi &= (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (q) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg r) \vee \underbrace{(\neg p \vee \neg r \vee 1)}_{1} \wedge q \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg r) \vee q \equiv \neg(p \vee r) \vee q \\ &\equiv p \vee r \Rightarrow q\end{aligned}$$



Poznámka: Použitie techniky konštrukcie tautologického vyplývania $[\![\Phi]\!] \vDash \varphi$ pomocou sémantického tabla možno charakterizovať ako špeciálny druh výpočtu - kalkulu. Pre anglického filozofa T. Hobbesa[1] myslenie už bolo len špeciálny druh výpočtu. Táto hypotéza, ktorá v 17. storočí znela veľmi neobvykle ba až exoticky, až v súčasnosti bola plne akceptovaná a realizovaná pomocou umelej inteligencie a kognitívnej vedy, kde má postavenie centrálnej paradigmy.

---

[1] Hobbesovi pripadalo riešenie Aristetolových sylogizmov ako špeciálny druh výpočtu, preto aj myslenie, vo všeobecnosti, považoval za špecifický výpočet.

Duálne sémantické tablo

Metóda sémantických tabiel môže byť formulovaná aj alternatívne tak, že vedie ku konštrukcii formuly v KNF; tento prístup budeme nazývať ***duálne sémantické tablo***. Nech φ je formula výrokovej logiky, potom duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je špecifikované modifikovanými pravidlami, kde postavenie disjunkcie a konjunkcie je vzájomne vymenené. Každá vetva duálneho sémantického tabla reprezentuje jednu disjunktívnu klauzulu z φ_{KNF} , ak dáme do vzájomnej disjunkcie postupnosť literálov ktorá sa vyskytuje v danej vetve zostrojíme jednu z množných disjunktívnych klauzúl. Podobne ako pre normálne sémantické tablá, ak daná vetva duálneho tabla obsahuje dvojicu komplementárnych klauzúl, potom táto vetva sa nazýva ***uzavretá***, v opačnom prípade sa nazýva ***otvorená***; poznamenajme, že uzavreté a otvorené vetve tabla budú označené symbolmi ´×´ resp. ´ ´.

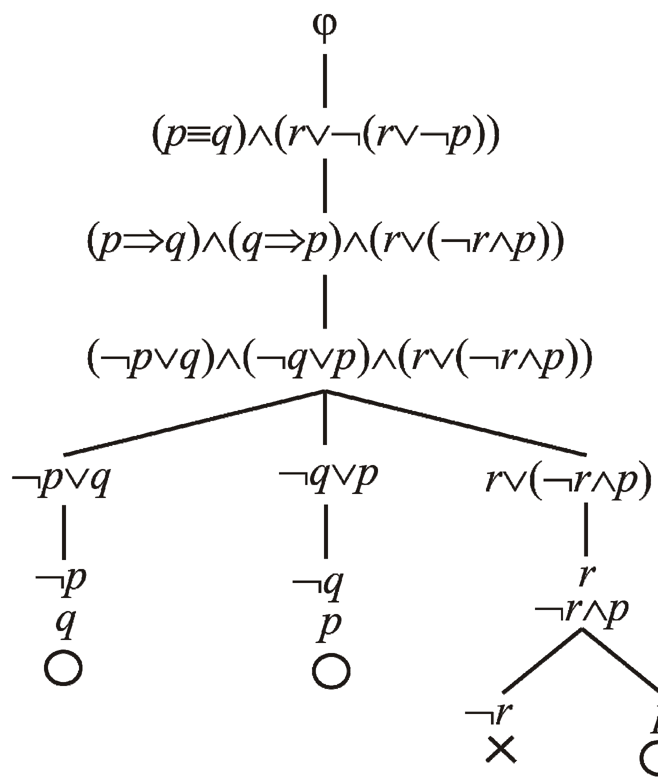
.

Veta

(1) Formula φ je ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté.

(2) Formula φ je ***kontradikcia*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\neg\varphi)$ je uzavreté.

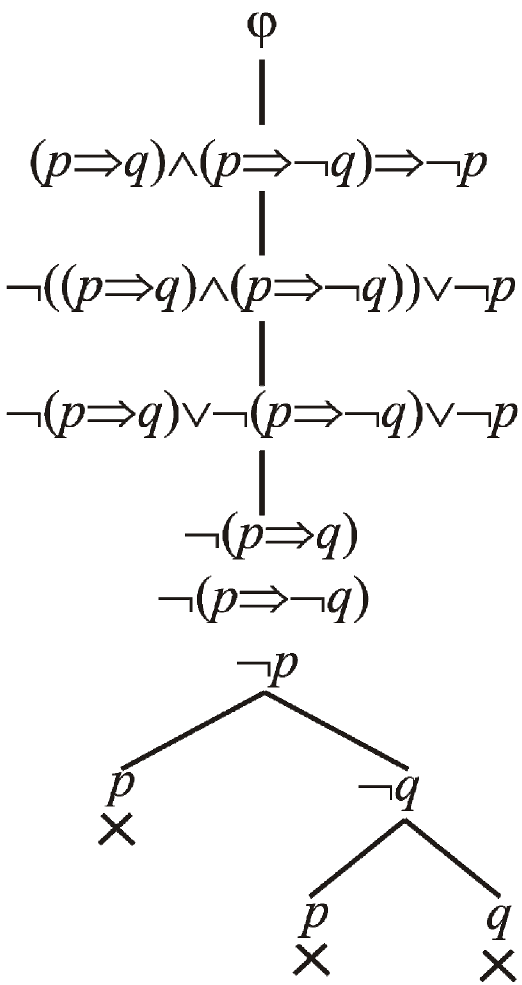
(2) Formula φ je ***splniteľná*** vtedy a len vtedy, ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ alebo $\tilde{\mathcal{T}}(\neg\varphi)$ obsahuje aspoň jednu uzavretú vetvu a jednu otvorenú vetvu.



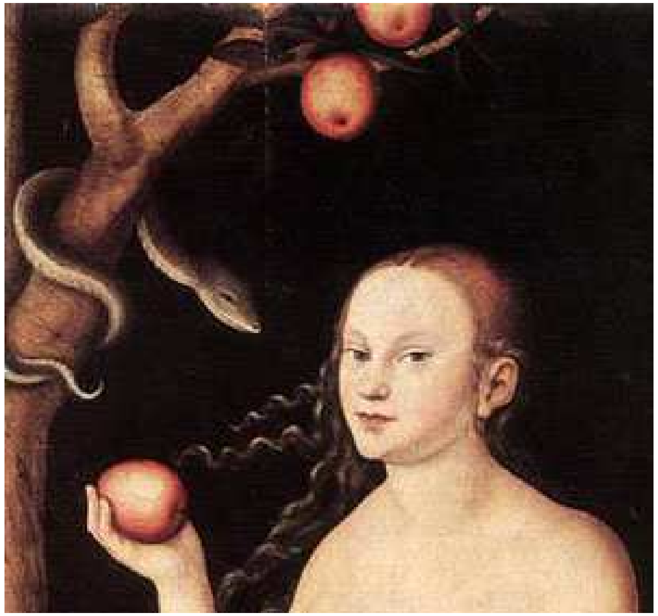
Znázornenie duálneho sémantického tabla formuly $\varphi = (p \equiv q) \wedge \big(r \vee \neg(r \vee \neg p)\big)$. Každá vetva reprezentuje jednu disjunktívnu klauzulu z $\varphi_{KNF} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \cancel{(r \vee \neg r)} \wedge (r \vee p)$, pričom sme ponechali len tie disjunktívne klauzuly, ktoré sú reprezentované otvorenými vetvami.

Príklad

Pomocou duálneho sémantického tabla dokážte, že formula $\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ je tautológia.



Nová verzia podania jablka



The End