4. kapitola

Výroková logika IV – prirodzená dedukcia

4.1 Prirodzená dedukcia

V kapitole 2.2 sme špecifikovali odvodzovanie formúl výrokovej logiky a logický dôkaz pomocou troch základných pravidiel (2.1-3) a desiatich axióm (2.5a-i). Musíme však zdôrazniť, že z troch pravidiel odvodzovania, len prvé pravidlo (2.1) *modus ponens* je dôležité. Ostatné dve substitučné pravidlá (2.2-3) sú dôsledkom skutočnosti, že z jednoduchých tautológií môžeme generovať zložitejšie tautológie tak, že premenné nahradíme ľubovoľnými formulami, alebo taktiež tak, že podformuly substituujeme ekvivalentnými formulami. Takto definovaný axiomatický systém obsahuje niekoľko málo pravidiel, ale desať axióm, ktoré môžeme pokladať za prvotné zákony - teorémy, z ktorých všetky ostatné sú už odvoditeľné pomocou pravidiel. Tento prístup k výstavbe výrokovej logiky je formálne jednoduchý, avšak pomerne vzdialený od prirodzeného každodenného uvažovania. Systém prirodzenej dedukcie bol navrhnutý nemeckým logikom Gentzenom v 30. rokoch minulého storočia [3] (pozri taktiež [1,2,4]), ktorý obsahuje relatívne mnoho (deväť) dedukčných pravidiel majú túto všeobecnú štruktúru

$$\begin{array}{|l} \left.\begin{array}{l} premisa_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ premisa_m \end{array}\right\}\Phi \\ \hline \quad dôsledok_1 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad dôsledok_n \end{array} \tag{4.1}$$

kde v hornej časti schémy sú umiestnené premisy (predpoklady) a v dolnej časti schémy sú umiestnené konzekventy (dôsledky). V súhlase s definíciou 2.3, odvodenie je postupnosť formúl. Deduktívne pravidlo je použité v odvodení ak sme schopní použiť všetky jeho premisy. Potom môžeme rozšíriť odvodenie o dôsledky daného pravidla.

V prirodzenej dedukcii premisy tvoria množinu $\Phi = \{prem_1, prem_2, ..., prem_m\}$, cieľom je odvodiť formulu φ, čo vyjadríme ako $\Phi \vdash \varphi$. V prirodzenej dedukcii sa využíva efektívne veta o dedukcii (pozri vetu 2.3), ktorá podstatne urýchľuje dôkazy uskutočnené pomocou prirodzenej dedukcie. Využitie tejto vety spočíva v tom, že množinu predpokladov ***T*** rozšírime o pomocný predpoklad α (hovoríme, že sme tento pomocný predpoklad ***aktivovali***), pomocou takto rozšírenej množiny $\Phi \cup \{\alpha\}$ dokážeme formulu φ, $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$, na záver deaktivujeme pomocný predpoklad α ta, že ho pomocou vety o dedukcii prenesieme na pravú stranu relácie logického vyplývania, $\Phi \vdash \alpha \Rightarrow \varphi$. Po ***deaktivácii*** predpokladu α, už v ***ďalších krokoch prirodzeného dôkazu pomocný predpoklad α sa už nesmie používať ako premisa dôkazu***. Budeme predpokladať, že prirodzená dedukcia obsahuje pravidlá (ktoré sú uvádzané ako priame dôsledky axióm Hilbertovho systému prezentovaného v kapitole 2.2 (pozri tabuľku 4.1).

1a. *Introdukčné pravidlo pre konjunkciu* (I∧)

$$\begin{array}{|l}\varphi\\ \psi\\ \hline \varphi\wedge\psi\end{array} \tag{4.2}$$

Ak sme schopní odvodiť súčasne formule φ a ψ, potom sme taktiež schopní odvodiť aj formulu $\varphi\wedge\psi$. Toto pravidlo je dôsledkom Hilbertovej axiómy $\mathbf{Ax}_5$, z ktorej dvojnásobným použitím modus ponens z predpokladov φ a ψ odvodíme dôsledok φ∧ψ.

1.b. *Eliminačné pravidlo pre konjunkciu* (E∧)

$$\begin{array}{|l}\varphi\wedge\psi\\ \hline \varphi\\ \psi\end{array} \tag{4.3}$$

Podľa tohto eliminačného pravidla, ak sme schopní odvodiť konjunkciu $\varphi\wedge\psi$, potom sme schopní odvodiť aj jej komponenty φ a ψ. Toto pravidlo je dôsledkom axióm $\mathbf{Ax}_{3\text{-}4}$, podľa ktorých z platnosti $\varphi\wedge\psi$ vyplýva platnosť jej zložiek φ a ψ.

2a. *Introdukčné pravidlo pre disjunkciu* (I∨)

$$\begin{array}{|l}\varphi\\ \hline \varphi\vee\psi\end{array} \tag{4.4}$$

Ak sme schopni odvodiť formulu φ, potom sme schopní odvodiť aj jej disjunkciu s ***ľubovoľnou*** formulou ψ. Toto pravidlo je dôsledkom axióm $\mathbf{Ax}_{6\text{-}7}$, podľa ktorých z platnosti φ vyplýva taktiež platnosť $\varphi\vee\psi$, pričom ψ je ľubovolná formula. Toto introdukčné pravidlo pre disjunkciu je alternatívne interpretované tak, že formula ψ je aktivovaný dodatočný predpoklad celkového dôkazu, jej použitie pomocou pravidla (2.6) znamená deaktiváciu tohto dodatočného predpokladu (v ďalších častiach dôkazu sa už nevyužíva).

2b. *Eliminačné pravidlo pre disjunkciu* (E∨)

$$\begin{array}{|l}\varphi\vee\psi\\ \neg\varphi\\ \hline \quad\psi\end{array} \tag{4.5}$$

Podľa tohoto pravidla, ak sme schopní súčasne odvodiť disjunkciu $\varphi\vee\psi$ a $\neg\varphi$, potom jej druhá komponenta ψ je taktiež odvodené pravidlo. Toto pravidlo má základ v zákone výrokovej logiky $\neg\varphi\Rightarrow\left(\left(\varphi\vee\psi\right)\Rightarrow\psi\right)$, podľa ktorého dvojnásobným použitím pravidla modus ponens a z predpokladov $\neg\varphi$ a $\varphi\vee\psi$ vyplýva ψ (t.j. ak je pravdivá disjunkcia $\varphi\vee\psi$ a jej komponenta φ je nepravdivá, potom druhá komponenta ψ musí byť pravdivá). Toto pravidlo môže byť jednoducho odvodené axiómy $\mathbf{Ax}_8$ $\left(p\Rightarrow r\right)\Rightarrow\left(\left(q\Rightarrow r\right)\Rightarrow\left(\left(p\vee q\right)\Rightarrow r\right)\right)$ Hilbertovho axiomatického systému výrokovej logiky, ktorú po substitúciách p/φ, q/ψ a $r/0$ prepíšeme do tvaru $\left(\neg\varphi\right)\Rightarrow\left(\neg\psi\Rightarrow\neg\left(\varphi\vee\psi\right)\right)$, kde sme použili ekvivalenciu $\left(s\Rightarrow 0\right)\equiv\neg s$. Ak v poslednom výraze prehodíme komponenty implikácie dostaneme požadovaný zákon výrokovej logiky, ktorý tvorí základ eliminančného pravidla pre disjunkciu.

3a. *Introdukčné pravidlo pre implikácie* (I⇒)

$$\begin{array}{|c} \varphi \\ \hline \psi \Rightarrow \varphi \end{array} \qquad (4.6)$$

Ak sme schopní odvodiť formulu φ, potom pomocou ***ľubovolnej*** formule ψ sme taktiež schopní odvodiť aj implikáciu $\psi \Rightarrow \varphi$. Toto pravidlo vyplýva axiómy **Ax**$_1$. Podobne ako v introdukčnom pravidle (4.4) pre disjunkciu, aj introdukčné pravidlo pre implikáciu môže byť alternatívne interpretované tak, že ľubovoľná formula ψ je dodatočný aktivovaný predpoklad, jej použitie podľa pravidla (2.6) sa chápe ako deaktivácia pomocného predpokladu (vlastne sme použili vetu o dedukcii).

Tabuľka 4.1. Diagramatická interpretácia eliminačných a introdukčných pravidiel (aj s ich označením) pre všetky logické spojky.

spojka	eliminácia	Introdukcia
$\wedge$	$\varphi\wedge\psi \to \varphi,\ \psi$	$\varphi,\ \psi \to \varphi\wedge\psi$
$\vee$	$\varphi\vee\psi,\ \neg\varphi \to \psi$	$\varphi,\ \psi \to \varphi\vee\psi$
$\Rightarrow$	$\varphi\Rightarrow\psi,\ \varphi \to \psi$	$\neg\psi,\ \varphi \to \psi\Rightarrow\varphi$
$\neg$	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	$\varphi\Rightarrow\psi,\ \varphi\Rightarrow\neg\psi \to \neg\varphi$; $\varphi\Rightarrow\psi,\ \neg\psi \to \neg\varphi$

3b. *Eliminačné pravidlo pre implikáciu* (E⇒, v klasickej logike sa nazýva *pravidlo modus ponens – pravidlo odlúčenia*)

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \psi \end{array} \qquad (4.7)$$

Podľa tohto známeho pravidla, ak sme schopný odvodiť φ a $\varphi\Rightarrow\psi$, potom sme schopní odvodiť aj dôsledok implikácie ψ. Toto eliminačné pravidlo modus ponens je manifestáciou zákona výrokovej logiky $\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right) \Rightarrow q$.

4a. *Introdukčné pravidlo negácie* (I¬), budeme používať pre zjednodušenie našich úvah dve pravidlá

$$\begin{array}{|l} \varphi \Rightarrow \psi \\ \varphi \Rightarrow \neg\psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{|l} \neg\psi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \qquad (4.8)$$

Prvé pravidlo (v klasickej logike sa nazýva *reductio ad absurdum*) vyplýva bezprostredne z axiómy **Ax**$_9$, druhé pravidlo sa v klasickej logike nazýva *modus tollens*, ktoré vyplýva z pravidla modus ponens a zákona inverzie implikácie $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, ktorý je dokázateľný pomocou **Ax**$_9$ (pozri príklad 1.x).

4b. *Eliminačné pravidlo negácie* (E¬)

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} \tag{4.9}$$

Toto pravidlo bezprostredne vyplýva z axiómy **Ax**$_{10}$.

Tabuľka 4.2. Zoznam pravidiel zámeny.

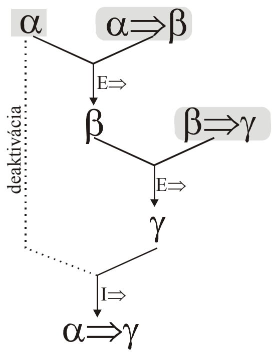
I	$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	komutatívnosť konjunkcie a disjunkcie
II	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$, $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$	asociatívnosť konjunkcie a disjunkcie
III	$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$ $\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$	idempotentnosť konjunkcie a disjunkcie
IV	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributívnosť medzi konjunkciou a disjunkciou
V	$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	de Morganove vzťahy
VI	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	transpozícia implikácie
VII	$(\varphi \equiv \psi) \equiv ((\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi))$	ekvivalencia a implikácie
VIII	$\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi$	exportácia implikácie
IX	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	disjunktívny tvar implikácie

Pre jednoduché použitie prirodzenej dedukcie je dôležité jej rozšírenie o tzv. pravidlá zámeny, pozri tab. 4.2. Použitie týchto pravidiel je odôvodnené tým, že sa jedná o logické zákony, ktoré môžu byť separátne odvodené pomocou schém usudzovania z tab. 4.1, ich použitie preto predstavuje podstatné skrátenie dôkazu, nemusí byť opakované v danom dôkaze.

Príklad 4.1. Nájdite odvodenie $\alpha \Rightarrow \gamma$ z množiny premís $\Phi = \{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\}$ (pozri obr. 4.1).

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(premisa z Φ)
2.	$\beta \Rightarrow \gamma$	(premisa z Φ)
3.	α	(aktivácia pomocného predpokladu)
4.	β	(E⇒ použité na 1 a 3)
5.	γ	(E⇒ použité na 2 a 4)
6.	$\alpha \Rightarrow \gamma$	(I⇒ použité na 3 a 5, deaktivácia predpokladu 3)

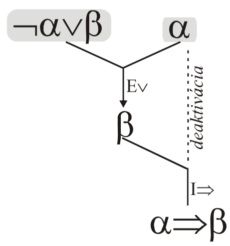
Použitie predpokladu α vyžaduje komentár. Jeho použitie môžeme chápať ako rozšírenie množiny premís Φ o ďalší predpoklad α, potom našou snahou je vlastne realizovať dôkaz $\Phi \cup \{\alpha\} \models \gamma$. Tento dôkaz sa dá ľahko uskutočniť dvojnásobným použitím pravidla modus ponens (1.18) (pozri obr. 1.7). Použitím vety (1.3) o dedukcii, pôvodný cieľ $\Phi \cup \{\alpha\} \models \gamma$ je možné prepísať do ekvivalentného tvaru $\Phi \models (\alpha \Rightarrow \gamma)$, kde premenná α už nevystupuje explicitne medzi premisami dôkazu. Gentzen navrhol také formálne riešenie tohto „problému“, že premenná α sa na začiatok dôkazu formálne umiestni medzi premisy (aktivuje sa), avšak na záver dôkazu sa musí inkorporovať (deaktivovať) pomocou introdukčného pravidla pre implikáciu (4.6) do požadovaného výsledku.



Obrázok 4.1. Diagramatické znázornenie dôkazu formuly v príklade 4.1. Premisy dôkazu sú v oválnych „vyšrafovaných“ oblastiach, zatiaľ čo štvorcová „vyšrafovaná“ oblasť obsahuje predpoklad α.

Príklad 4.2. Nájdite odvodenie $\alpha \Rightarrow \beta$ z množiny premís $\Phi = \{\neg\alpha \vee \beta\}$ (pozri obr. 4.2).

1.	α	(aktivácia pomocného predpokladu)
2.	$\neg\alpha \vee \beta$	(premisa z Φ)
3.	β	(E$\vee$ použité na 1 a 2)
4.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(I$\Rightarrow$ použité na 1 a 3, deaktivácia predpokladu 1)

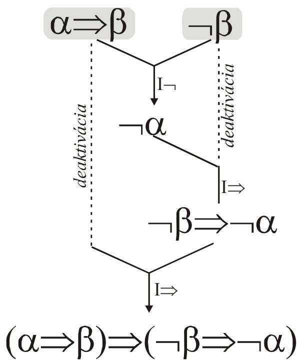


Obrázok 4.2. Diagramatická interpretácia riešenia príkladu 4.2.

Príklad 4.3. Nájdite dôkaz $\vdash(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha)$ (pozri obr. 4.3).

1.	$\alpha\Rightarrow\beta$	(aktivácia pomocného predpokladu)
2.	$\neg\beta$	(aktivácia pomocného predpokladu)
3.	$\neg\alpha$	(I$\neg$ použité pre 1 a 2)
4.	$\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha$	(I$\Rightarrow$ použité na 2 a 3, deaktivácia 2)
5.	$(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha)$	(I$\Rightarrow$ použité na 1 a 4, deaktivácia 1)

V tomto príklade množina premís Φ je dokonca prázdna, naším cieľom je teda dokázať $\vdash(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha)$. Zavedenie dvoch pomocných predpokladov pre odvodenie vyjadríme prostredníctvom relácie logického vyplývania $\{\neg\beta,\alpha\Rightarrow\beta\}\vdash\neg\alpha$. V prvom kroku pomocou modus tollens (negatívne pravidlo odlúčenia) z predpokladov odvodíme $\neg\alpha$, z ktorého v ďalšom druhom kroku odvodíme $\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha$, pričom sa deaktivuje predpoklad $\neg\beta$. V poslednom treťom kroku k implikácii z predchádzajúceho kroku pripojíme prvý predpoklad, čím dostaneme požadovanú formulu a súčasne deaktivujeme prvý predpoklad. Tento postup je znázornený na obr. 4.3.

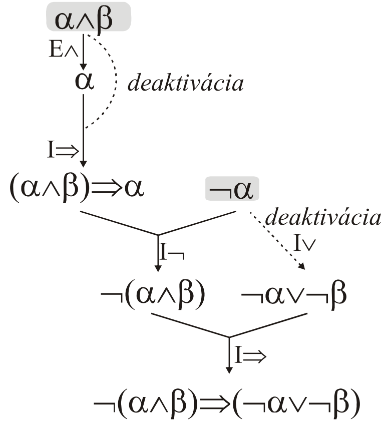


Obrázok 4.3. Diagramatická interpretácia riešenia príkladu 4.3.

Príklad 4.4. Nájdite dôkaz $\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ (pozri obr. 4.4).

1.	$\neg\alpha$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$\alpha\wedge\beta$	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	α	(E$\wedge$ na 2)
4.	$(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\alpha$	(I$\Rightarrow$ použité na 2 a 3, deaktivácia 2)
5.	$\neg(\alpha\wedge\beta)$	(E$\neg$ použité na 1 a 4)
6.	$\neg\alpha\vee\neg\beta$	(I$\vee$ použité na 1, deaktivácia 1, $\neg\beta$ je ľubovolná formula)
7.	$\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\vee\neg\beta)$	(I$\Rightarrow$ použité na 5 a 6).

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, množina premís Φ je prázdna, dokazujeme teda $\vdash\neg(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ tak, že aktivujeme dva pomocné predpoklady $\{\neg\alpha,\alpha\wedge\beta\}$. Z druhého pomocného predpokladu vyplýva $\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha$ (pozri riadky 3 a 4). Použitím modus tollens na túto formulu a prvý pomocný predpoklad, dostaneme $\neg(\alpha \wedge \beta)$ (pozri riadok 5). Množina predpokladov $\{\neg\alpha, \alpha \wedge \beta\}$ je však nekonzistentná, z druhého predpokladu pomocou (1.19) vyplýva platnosť α, čo je v spore s prvým predpokladom, preto musí platiť $\neg(\alpha \wedge \beta)$.



Obrázok 4.4. Diagramatická interpretácia riešenia príkladu 4.4.

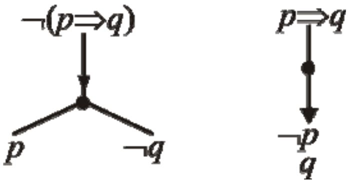
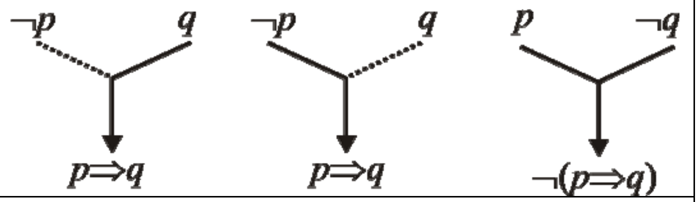
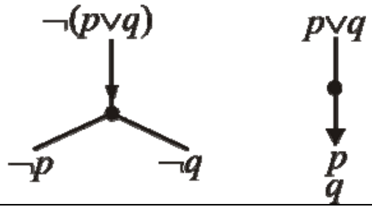
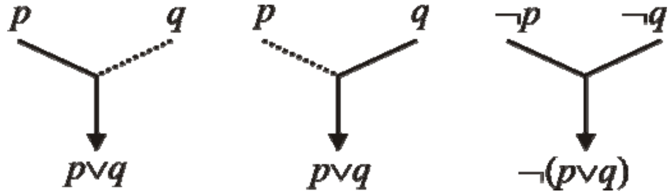
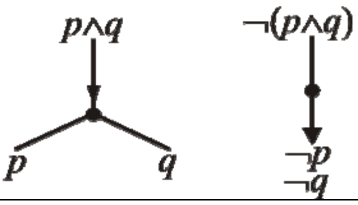
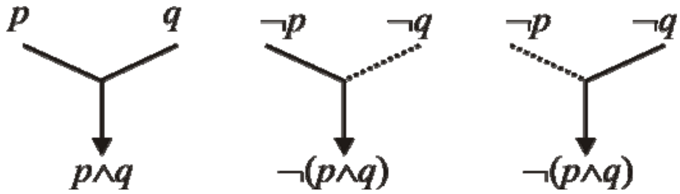
4.1 Vzťah medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami

Cieľom tejto podkapitoly je ukázať, že medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami existuje úzka súvislosť. Podľa vety 3.6 platí, že ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté, potom formula φ je tautológia. Ukážeme, že sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ v inverznom poradí môže slúžiť ako návod pre dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, pričom potrebné vstupné výrokové premenné a ich negácie sú tvorené pomocou triviálnych tautológií typu $\neg p \vee p \equiv p \Rightarrow p$. Prirodzenú dedukciu v tomto prípade budeme realizovať pomocou diagramov (pozri obr. 4.1-4), ktorých konštrukciu budeme interpretovať ako inverziu duálneho sémantického tabla. Použité schémy usudzovania pre tvorbu diagramatickej reprezentácia prirodzenej dedukcie sú uvedené v tab. 4.3). V tomto prípade sa používajú len tie najjednoduchšie schémy usudzovania, ktoré pomocou konjunkcie, disjunkcie a implikácie vytvárajú z dvoch aktuálnych podformúl φ a ψ dôkazu novú formulu $\varphi \clubsuit \psi$. Ako ilustračný príklad uvažujme pravidlo z tab. 4.3 pre prirodzenú dedukciu a implikáciu, predpoklady sú φ a $\neg\psi$, dôsledok je $\neg(\varphi \Rightarrow \psi)$, čo môžeme podľa (4.1) vyjadriť takto

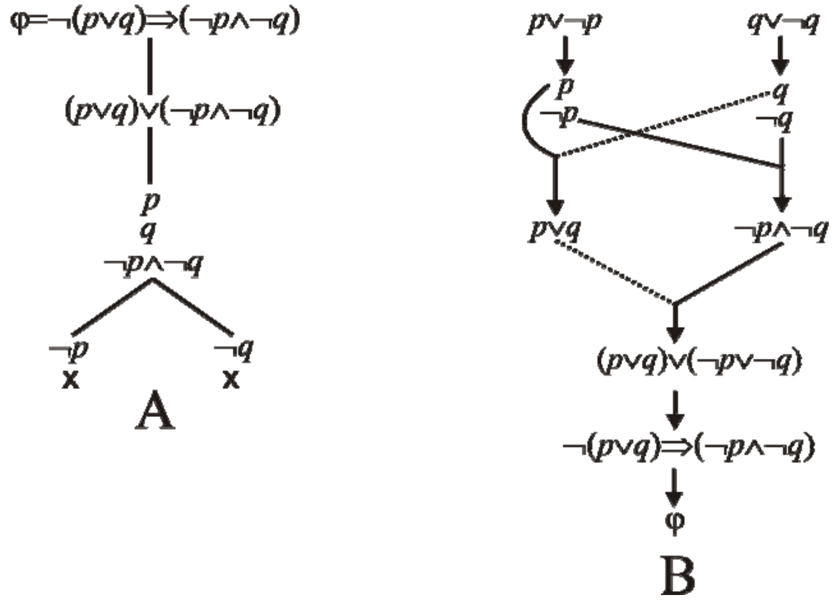
$$\begin{array}{|l}\varphi \\ \neg\psi \\ \hline \neg(\varphi \Rightarrow \psi)\end{array}$$

Ľahko sa presvedčíme, že formula $\varphi \wedge \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ je tautológia, čiže schéma usudzovania je korektná. Takýmto jednoduchým spôsobom môžeme preveriť všetky pravidlá z tab. 4.3. pre prirodzenú dedukciu.

Tabuľka 4.3. Elementárne schémy usudzovanie pre duálne sémantické tablá a dôkazu pomocou prirodzenej dedukcie založenej na sémantickom table

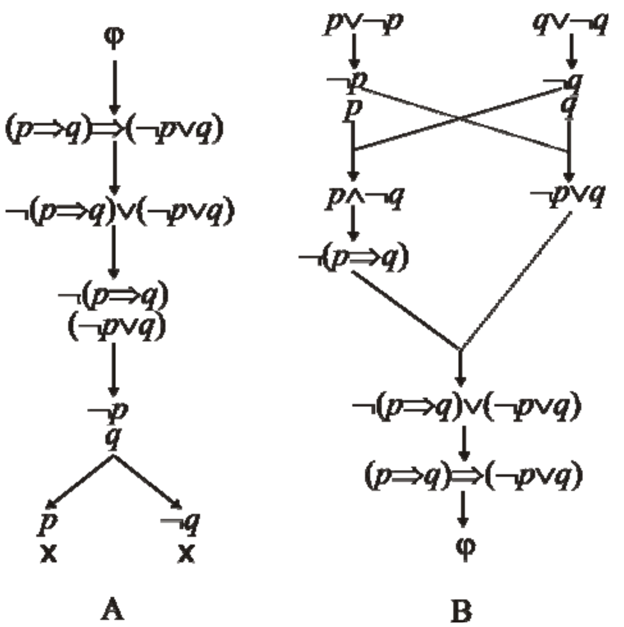
logická spojka	sémantické tablá	prirodzená dedukcia
negácia		
implikácia		
disjunkcia		
konjunkcia		

Príklad 4.5. Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = \neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ pomocou duálneho sémantického tabla a potom vykonajte dôkaz tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie založenej na duálnom table. Sémantické tablo $\tilde{T}(\varphi)$ je znázornené na obr. 4.5. Pretože tablo je uzavreté, formula φ je tautológia. Inverziou (čítaním zdola nahor) môžeme zostrojiť dôkaz formuly φ len pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 4.3 (pozri obr. 4.6).



Obrázok 4.5. (A) Sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ pre formulu $\varphi = \neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ má všetky vetvy uzavreté, t. j. formula φ je tautológia. (B) Prirodzená dedukcia pre danú formulu na základe duálneho sémantického tabla pre dôkaz, že daná formula je tautológia (pozri diagram A). Prirodzená dedukcia je zahájená tvorbou literálov z elementárnych tautológií $p \vee \neg p$ a $q \vee \neg q$. Prirodzená dedukcia je založená na inverznom postupe tvorby sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$, pomocou elementárnych schém uvedených v tab. 4.3.

Príklad 4.6. Podobne ako v predchádzajúcom príklade, zostrojte pomocou prirodzenej dedukcie založenej na duálnom sémantickom table tautológiu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$. Duálne sémantické tablo je znázornené na obr. 4.6, diagram A. Pomocou tohto sémantického tabla zostrojíme dôkaz formuly metódou prirodzenej dedukcie, pričom jej jednotlivé elementárne kroky sú určené pomocou sémantického tabla (pozri obr. 4.6, diagram B).



Obrázok 4.6. (A) Duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ pre formulu $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$, tablo je uzavreté, preto formula je tautológia. (B) Dôkaz formuly $\varphi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá bola navrhnutá pomocou sémantického tabla z diagramu A.

Na základe týchto dvoch ilustračných príkladov môžeme konštatovať, že metóda duálnych sémantických tabiel je silne previazaná s prirodzenou dedukciou. Obrazne môžeme povedať, že tieto dve metódy sú navzájom v „inverznom“ vzťahu. V prvom kroku pre formulu φ pomocou duálneho sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ zistíme, či táto formula je tautológia. Ako áno (sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté), potom inverzným „čítaním“ tabla zdola nahor môžeme postupne zostrojiť graf prirodzenej dedukcie pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 4.3, ktorého výsledkom je formula φ. Skutočnosť, že na základe sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ sme schopní zostrojiť dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá je založená len na použití elementárnych vytvárajúcich módoch, patrí medzi hlavné výsledky metódy sémantických tabiel, kde zdanlivo dve diametrálne odlišné prístupy (sémantické tablá a prirodzená dedukcia) sú prepojené do jedeného univerzálneho postupu schopného verifikovať tautologičnosť formúl a taktiež aj ich konštrukciu pomocou prirodzenej dedukcie. Tento prístup k prirodzenej dedukcii môžeme taktiež chápať ako konštruktívny dôkaz úplnosti, t. j. ak formula φ je tautológia, potom aj logicky vyplýva (existuje jej dôkaz) z daného systému axióm výrokovej logiky.

Veta 4.1.
Ak formula φ má uzavreté duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$, t. j. je tautológia, potom „inverziou“ tohto tabla zostrojíme dôkaz formuly $\vdash \varphi$ pomocou prirodzenej dedukcie.

Cvičenia

Cvičenie 4.1. Pomocou metódy duálnych sémantických tabiel zistite, či formula je tautológia, splniteľná alebo kontradikcia, ak je tautológia vykonajte inverziou tabla dôkaz pomocou prirodzenej dedukcie.
(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
(b) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
(d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
(e) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
(f) $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q)$
(g) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
(h) $\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$
(i) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$
(j) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \vee q))$
(k) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$

Cvičenie 4.2. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte, či platia relácie logického vyplývania
(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow r)$
(b) $\{\neg p \vee \neg q\} \vdash \neg(p \wedge r)$

(c) $\{p \Rightarrow \neg q, p \wedge \neg q, p \Rightarrow p \vee q\} \vdash p$

Cvičenie 4.3. Pomocou metódy sémantických tabiel riešte reláciu $\Phi \vDash ?$, kde $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ je množina (teória) formúl výrokovej logiky, cieľom úlohy je určiť takú formulu φ, ktorá je tautologickým dôsledkom teórie Φ.

(a) $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vDash ?$

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q\} \vDash ?$

(c) $\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \vDash ?$

Literatúra

[1] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[2] Prawitz, D.: *Natural Deduction*. Almquist & Wiksell, Stockholm, 19??.

[3] Szabo, M. E.: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland Publishing, Amsterdam, 1969.

[4] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.