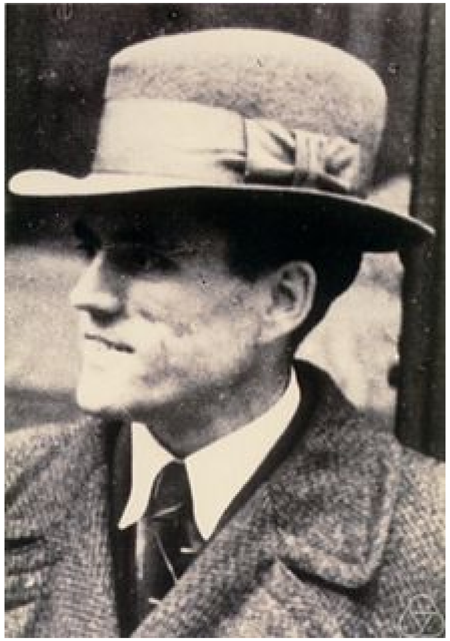
4. prednáška

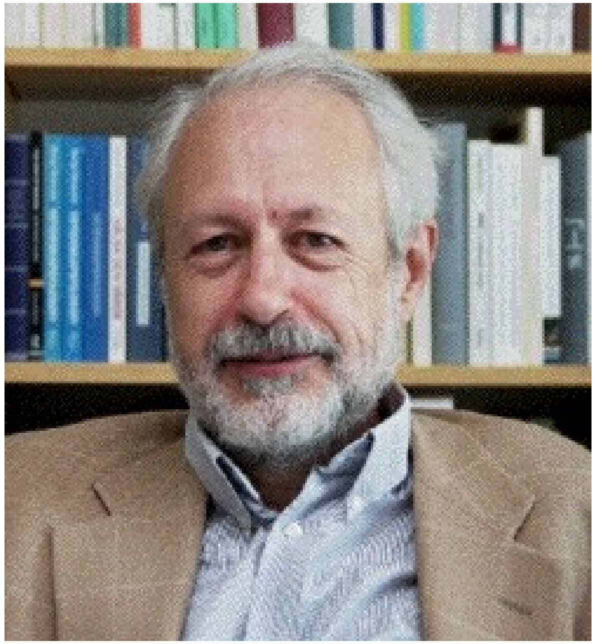
Výroková logika IV
Prirodzená dedukcia

Prirodzená dedukcia



Gerhard Gentzen (∗ 1909, †1945)

Stanislaw Jaskowski ((∗ 1906, †1965)



Dag Prawitz (∗1936)

Systém prirodzenej dedukcie bol navrhnutý nemeckým logikom Gentzenom v 30. rokoch minulého storočia, ktorý obsahuje relatívne mnoho (deväť) dedukčných Pravidlá majú túto všeobecnú štruktúru

$$
\begin{array}{|l}
\left.\begin{array}{l} premisa_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ premisa_m \end{array}\right\}\Phi \\
\hline
\quad dôsledok_1 \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad dôsledok_n
\end{array}
$$

kde v hornej časti schémy sú umiestnené premisy (predpoklady) a v dolnej časti schémy sú umiestnené konzekventy (dôsledky). Odvodenie je postupnosť formúl. Deduktívne pravidlo je použité v odvodení ak sme schopní použiť všetky jeho premisy. Potom môžeme rozšíriť odvodenie o dôsledky daného pravidla.

- V prirodzenej dedukcii premisy tvoria množinu $\Phi=\{prem_1, prem_2,\ldots, prem_m\}$, cieľom je odvodiť formulu φ, čo vyjadríme ako $\Phi\vdash\varphi$.

- V prirodzenej dedukcii sa využíva efektívne veta o dedukcii, ktorá podstatne urýchľuje dôkazy uskutočnené pomocou prirodzenej dedukcie. Využitie tejto vety spočíva v tom, že množinu predpokladov ***T*** rozšírime o pomocný predpoklad α (hovoríme, že sme tento pomocný predpoklad ***aktivovali***), pomocou takto rozšírenej množiny $\Phi\cup\{\alpha\}$ dokážeme formulu φ, $\Phi\cup\{\alpha\}\vdash\varphi$, na záver deaktivujeme pomocný predpoklad α ta, že ho pomocou vety o dedukcii prenesieme na pravú stranu relácie logického vyplývania, $\Phi\vdash\alpha\Rightarrow\varphi$.

- Po ***deaktivácii*** predpokladu α, už v ***ďalších krokoch prirodzeného dôkazu pomocný predpoklad*** α ***sa už nesmie používať ako premisa dôkazu***.

- Prirodzená dedukcia obsahuje pravidlá (ktoré sú uvádzané ako priame dôsledky axióm Hilbertovho systému.

1a. *Introdukčné pravidlo pre konjunkciu* (I$\wedge$)

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \psi \\ \hline \varphi \wedge \psi \end{array}$$

Ak sme schopný odvodiť súčasne formule φ a ψ, potom sme taktiež schopný odvodiť aj formulu $\varphi \wedge \psi$. Toto pravidlo je dôsledkom Hilbertovej axiómy $\varphi \Rightarrow \left(\psi \Rightarrow \left(\varphi \wedge \psi\right)\right)$, z ktorej dvojnásobným použitím modus ponens z predpokladov φ a ψ odvodíme dôsledok $\varphi \wedge \psi$.

1.b. *Eliminačné pravidlo pre konjunkciu* (E$\wedge$)

$$\begin{array}{|l} \varphi \wedge \psi \\ \hline \varphi \\ \psi \end{array}$$

Ak sme schopný odvodiť konjunkciu $\varphi \wedge \psi$, potom sme schopný odvodiť aj jej komponenty φ a ψ. Toto pravidlo je dôsledkom axióm **Ax**$_{3\text{-}4}$, $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ z platnosti $\varphi \wedge \psi$ vyplývajá platnosť jej zložiek φ a ψ.

2a. ***Introdukčné pravidlo pre disjunkciu* (I$\vee$)**

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

Ak sme schopný odvodiť formulu φ, potom sme schopný odvodiť aj jej disjunkciu s ***ľubovolnou*** formulou ψ. Toto pravidlo je dôsledkom axióm **Ax**$_{6\text{-}7}$, $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi$ podľa ktorých z platnosti φ vyplýva taktiež platnosť $\varphi \vee \psi$, pričom ψ je ľubovolná formula.

2b. *Eliminačné pravidlo pre disjunkciu* (E∨)

$$\begin{array}{|l} \varphi \vee \psi \\ \neg\varphi \\ \hline \quad \psi \end{array}$$

Ak sme schopný súčasne odvodiť disjunkciu $\varphi \vee \psi$ a $\neg\varphi$, potom jej druhá komponenta ψ je taktiež odvodené pravidlo. Toto pravidlo má základ v zákone výrokovej logiky $\neg\varphi \Rightarrow \left(\left(\varphi \vee \psi\right) \Rightarrow \psi\right)$, podľa ktorého dvojnásobným použitím pravidla modus ponens a z predpokladov $\neg\varphi$ a $\varphi \vee \psi$ vyplýva ψ (t.j. ak je pravdivá disjunkcia $\varphi \vee \psi$ a jej komponenta φ je nepravdivá, potom druhá komponenta ψ musí byť pravdivá).

3a. *Introdukčné pravidlo pre implikácie* (I⇒)

$$\begin{array}{|c} \varphi \\ \hline \psi \Rightarrow \varphi \end{array}$$

Ak sme schopný odvodiť formulu φ, potom pomocou ***ľubovolnej*** formule ψ sme taktiež schopný odvodiť aj implikáciu $\psi \Rightarrow \varphi$. Toto pravidlo vyplýva axiómy $\mathbf{Ax}_1$, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Diagramatická interpretácia eliminačných a introdukčných pravidiel (aj s ich označením) pre všetky logické spojky.

spojka	eliminácia	Introdukcia
$\wedge$	$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi \quad \psi}$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\wedge\psi}$
$\vee$	$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \neg\varphi}{\psi}$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\vee\psi}$ $\quad$ $\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\vee\psi}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \qquad \varphi}{\psi}$	$\dfrac{\neg\psi \qquad \varphi}{\psi\Rightarrow\varphi}$ $\quad$ $\dfrac{\neg\psi \qquad \varphi}{\psi\Rightarrow\varphi}$
$\neg$	$\dfrac{\neg\,\neg\varphi}{\varphi}$	$\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \quad \varphi\Rightarrow\neg\psi}{\neg\varphi}$ $\quad$ $\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$

3b. ***Eliminačné pravidlo pre implikáciu*** **(E⇒,** v klasickej logike sa nazýva *pravidlo modus ponens – pravidlo odlúčenia*)

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

4a. ***Introdukčné pravidlo negácie*** **(I¬)**

$$\begin{array}{|l} \varphi \Rightarrow \psi \\ \varphi \Rightarrow \neg\psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{|l} \neg\psi \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \hline \neg\varphi \end{array}$$

Prvé pravidlo v klasickej logike sa nazýva *reductio ad absurdum.* druhé pravidlo sa v klasickej logike nazýva *modus tollens.*

4b. ***Eliminačné pravidlo negácia*** **(E¬)**

$$\begin{array}{|l} \neg\neg\varphi \\ \hline \varphi \end{array}$$

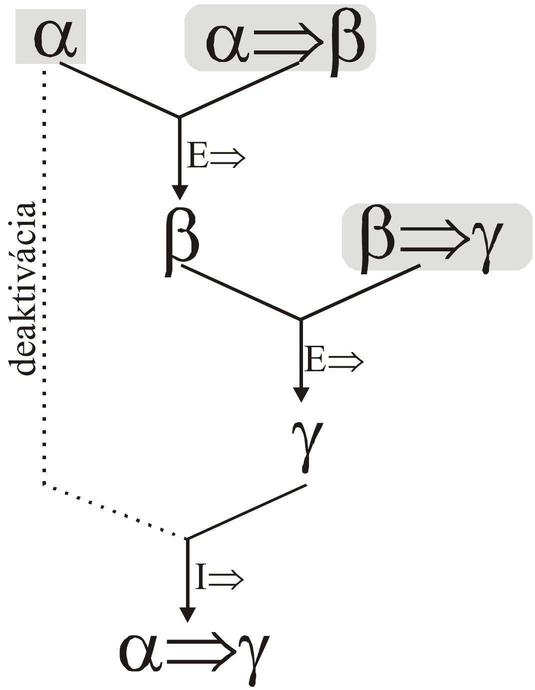
Zoznam pravidiel zámeny.

I	$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	komutatívnosť konjunkcie a disjunkcie
II	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$, $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi)$	asociatívnosť konjunkcie a disjunkcie
III	$\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$ $\varphi \equiv \varphi \vee \varphi$	idempotentnosť konjunkcie a disjunkcie
IV	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributívnosť medzi konjunkciou a disjunkciou
V	$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	de Morganove vzťahy
VI	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	transpozícia implikácie
VII	$(\varphi \equiv \psi) \equiv ((\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi))$	ekvivalencia a implikácie
VIII	$\varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi$	exportácia implikácie
IX	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	disjunktívny tvar implikácie

Príklad

Nájdite odvodenie $\alpha \Rightarrow \gamma$ z množiny premís $\Phi = \{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\}$

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(premisa z Φ)
2.	$\beta \Rightarrow \gamma$	(premisa z Φ)
3.	α	(aktivácia pomocného predpokladu)
4.	β	(E$\Rightarrow$ použité na 1 a 3)
5.	γ	(E$\Rightarrow$ použité na 2 a 4)
6.	$\alpha \Rightarrow \gamma$	(I$\Rightarrow$ použité na 3 a 5, deaktivácia predpokladu 3)

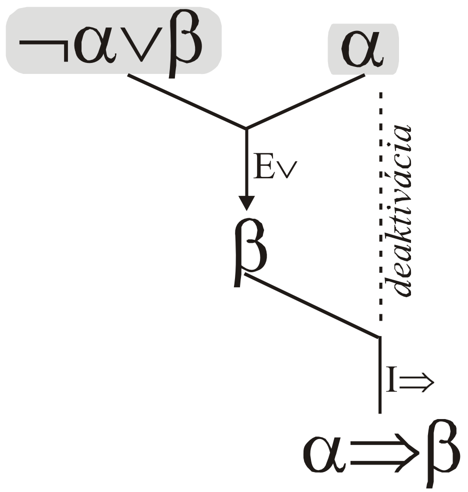


Diagramatické znázornenie dôkazu. Premisy dôkazu sú v oválnych „vyšrafovaných“ oblastiach, zatiaľ čo štvorcová „vyšrafovaná“ oblasť obsahuje predpoklad α.

Príklad

Nájdite odvodenie $\alpha \Rightarrow \beta$ z množiny premís $\Phi = \{\neg\alpha \vee \beta\}$

1.	α	(aktivácia pomocného predpokladu)
2.	$\neg\alpha \vee \beta$	(premisa z Φ)
3.	β	(E$\vee$ použité na 1 a 2)
4.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(I$\Rightarrow$ použité na 1 a 3, deaktivácia predpokladu 1)

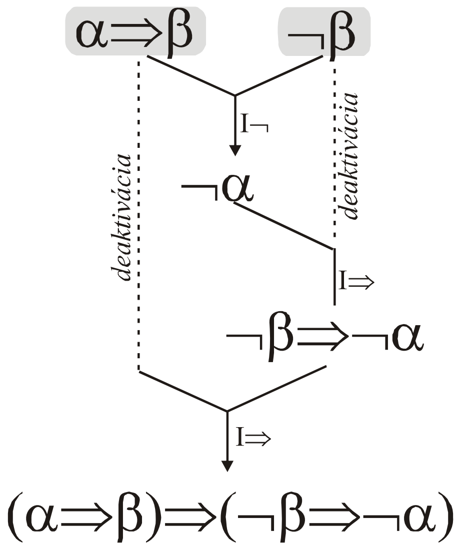


Diagramatická reprezentácia prirodzenej dedukcie odvodenia $\{\neg\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$

Príklad

Zostrojte dôkaz $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	(aktivácia pomocného predpokladu)
2.	$\neg\beta$	(aktivácia pomocného predpokladu)
3.	$\neg\alpha$	(I$\neg$ použité pre 1 a 2)
4.	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	(I$\Rightarrow$ použité na 2 a 3, deaktivácia 2)
5.	$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	(I$\Rightarrow$ použité na 1 a 4, deaktivácia 1)

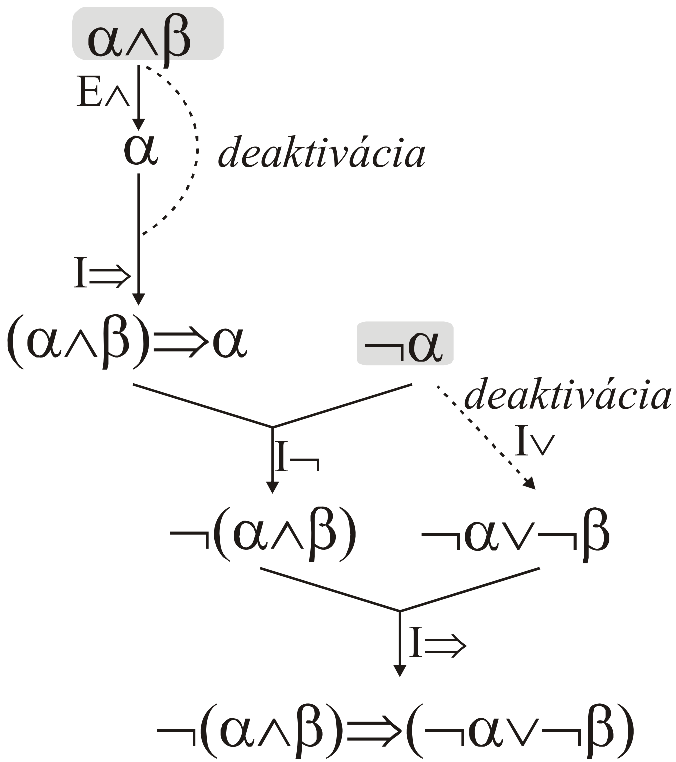


Diagramatická reprezentácia prirodzenej dedukcie odvodenia $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

Príklad

Zostrojte dôkaz $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

1.	$\neg\alpha$	(aktivácia 1. pomocného predpokladu)
2.	$\alpha \wedge \beta$	(aktivácia 2. pomocného predpokladu)
3.	α	($E_{\wedge}$ na 2)
4.	$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$	($I_{\Rightarrow}$ použité na 2 a 3, deaktivácia 2)
5.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	(E$\neg$ použité na 1 a 4)
6.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	(I$\vee$ použité na 1, deaktivácia 1, $\neg\beta$ je ľubovolná formula)
7.	$\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$	(I$\Rightarrow$ použité na 5 a 6).



Diagramatická reprezentácia prirodzenej dedukcie odvodenia $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

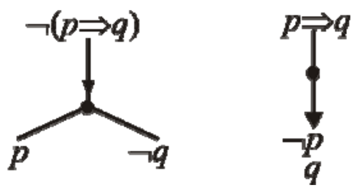
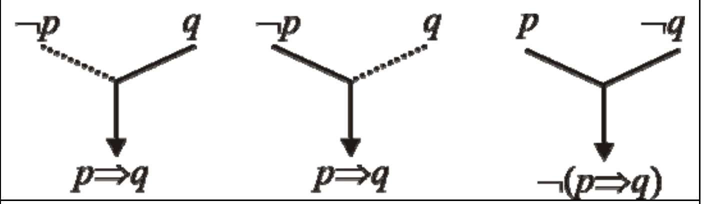
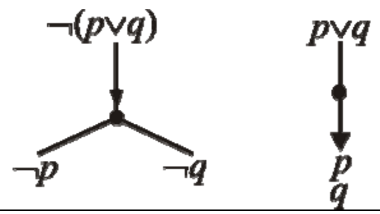
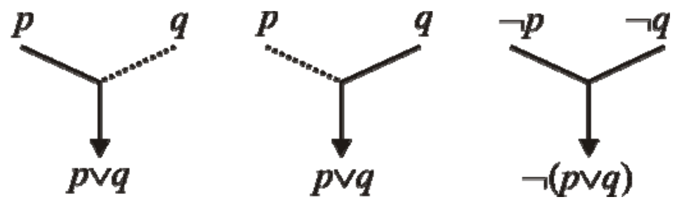
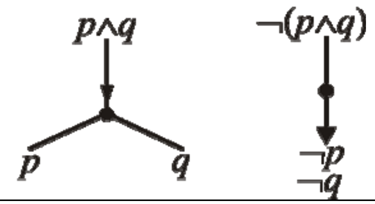
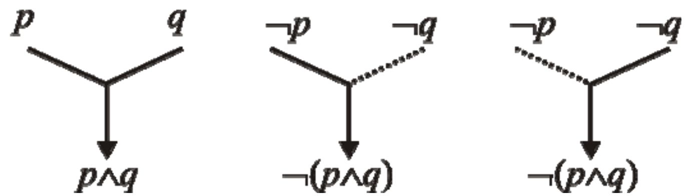
Vzťah medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami

- Cieľom tejto podkapitoly je ukázať, že medzi prirodzenou dedukciou a sémantickými tablami existuje úzka súvislosť. Vieme, že ak duálne sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté, potom formula φ je tautológia.

- Ukážeme, že sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ v inverznom poradí môže slúžiť ako návod pre dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, pričom potrebné vstupné výrokové premenné a ich negácie sú tvorené pomocou triviálnych tautológií typu $\neg p \vee p \equiv p \Rightarrow p$.

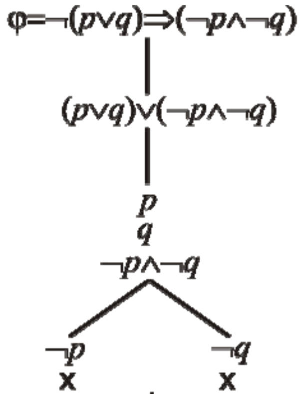
- Prirodzenú dedukciu budeme realizovať pomocou diagramov, ktorých konštrukciu budeme interpretovať ako inverziu duálneho sémantického tabla.

Elementárne schémy usudzovanie pre duálné sémantické tablá a dôkazu pomocou prirodzenej dedukcie založenej na sémantickom table

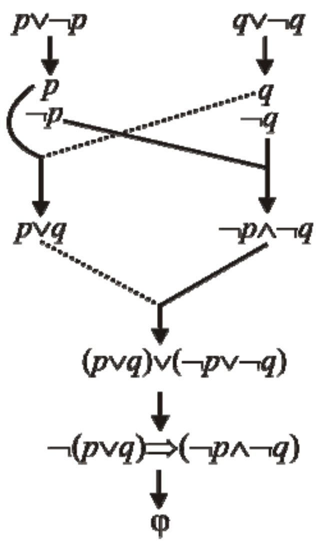
logická spojka	sémantické tablá	prirodzená dedukcia
negácia		
implikácia		
disjunkcia		
konjunkcia		

Príklad

Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = \neg\left(p \vee q\right) \Rightarrow \left(\neg p \wedge \neg q\right)$ pomocou duálneho sémantického tabla a potom vykonajte dôkaz tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie založenej na duálnom table. Sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}\left(\varphi\right)$ je znázornené na diagrame A, pretože tablo je uzavreté, formula φ je tautológia. Inverziou (čítaním zdola nahor) zostrojíme dôkaz formuly φ len pomocou elementárnych schém usudzovania z tab. 4.3 (pozri diagram B).



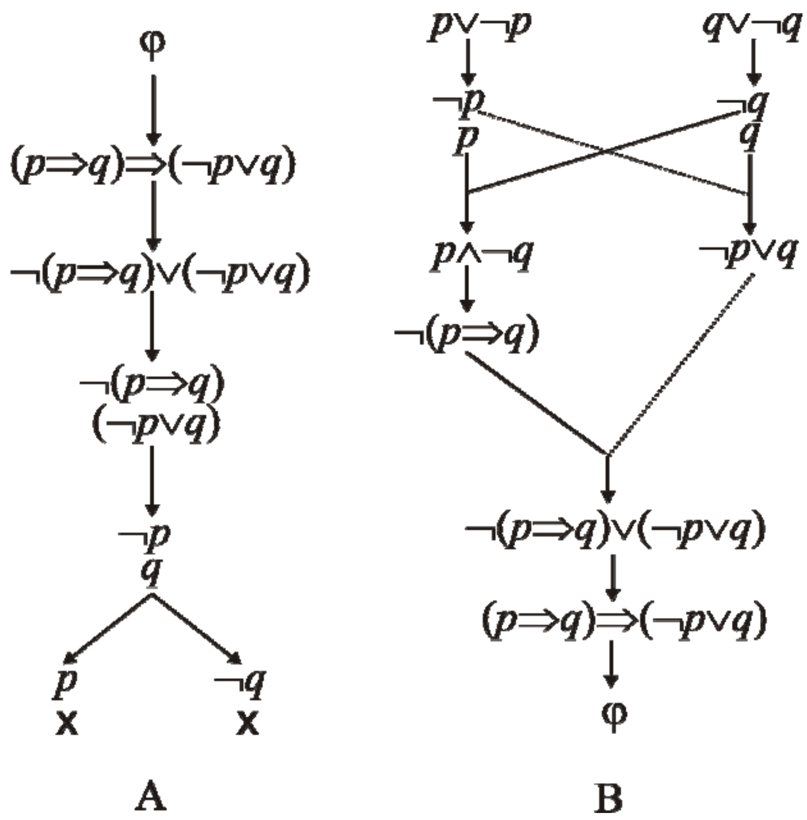
A



B

Príklad

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, zostrojte pomocou prirodzenej dedukcie založenej na duálnom sémantickom table tautológiu $\varphi = \left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\neg p \vee q\right)$.



Na základe týchto ilustračných príkladov môžeme konštatovať, že metóda duálnych sémantických tabiel je silne previazaná s prirodzenou dedukciou. Obrazne môžeme povedať, že tieto dve metódy sú navzájom v „inverznom“ vzťahu. V prvom kroku pre formulu φ pomocou duálneho sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ zistíme, či táto formula je tautológia. Ako áno (sémantické tablo $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ je uzavreté), ***Skutočnosť, že na základe sémantického tabla $\tilde{\mathcal{T}}(\varphi)$ sme schopný zostrojiť dôkaz formuly φ pomocou prirodzenej dedukcie, ktorá je založená len na použití elementárnych vytvárajúcich módoch, patrí medzi hlavné výsledky metódy sémantických tabiel***, kde zdanlivo dve diametrálne odlišné prístupy (sémantické tablá a prirodzená dedukciu) sú prepojené do jedeného univerzálneho postupu schopného verifikovať tautologičnosť formúl a taktiež aj ich konštrukciu pomocou prirodzenej dedukcie. Tento prístup k prirodzenej dedukcii môžeme taktiež chápať ako konštruktívny dôkaz úplnosti, t. j. ak formula φ je tautológia, potom aj logicky vyplýva (existuje jej dôkaz) z daného systému axióm výrokovej logiky.

Zlatá baňa Serra Pelada, Brazília


Math test
Find the square root of 225.
I DIDN'T KNOW IT WAS MISSING.

The End