5. kapitola

Predikátová logika I – úvod do predikátovej logiky a sémantické tablá

5.1 Intuitívny prechod od výrokovej logiky k predikátovej logike

Výroková logika nie je schopná postihnúť všetky možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú charakterizované ako „logicky korektné“. Táto skutočnosť bude ilustrovaná troma príkladmi, pomocou ktorých naznačíme možnosti intuitívneho zovšeobecnenia výrokovej logiky smerom k predikátovej logiky pomocou zavedenia predikátov, funkcií a kvantifikátorov.

Príklad 5.1. Skúmajme túto schému usudzovania známu zo stredoveku

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sokrates je človek}\\ \text{Každý človek je smrteľný}\end{array}}{\text{Sokrates je smrteľný}} \tag{5.1}$$

kde prvé dve vety sú východiskové predpoklady (premisy) usudzovania a tretia veta je záver usudzovania. Aj keď intuitívne cítime, že tento výrok je logicky korektný, pomocou výrokovej logiky nie sme schopní preveriť jeho správnosť. Prvá a tretia veta má charakter výroku (veta oznamovacia o ktorej sa má zmysel pýtať na jej pravdivosť alebo nepravdivosť). Problém je s druhou vetou, ktorá obsahuje slovo „každý“, s ktorým si vo výrokovej logiky nevieme poradiť. Nemôže byť jednoducho ignorované, takto modifikovaná druhá veta má podstatne iný význam ako mala v pôvodnom tvare. Z tohto jednoduchého pozorovania môžeme vyvodiť záver, že výroková logika nepokrýva všetky situácie a možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú podstatne bohatšie, ako možnosti výrokovej logiky. Jedna z možností ako prekonať túto ohraničenosť výrokovej logiky je jej zovšeobecnenie na predikátovú logiku, ktorá je schopná postihnúť aj procesy usudzovania podobné vyššie uvedenému príkladu.

Upriamime našu pozornosť na druhú vetu z príkladu (5.1), ktorá obsahuje slovo „každý“, pod ktorým rozumieme každú ľudskú bytosť. Táto veta je implikácia, podľa ktorej, ak každé indivíduum je „človek“, potom toto indivíduum je „smrteľné“. Označme písmenom C vlastnosť – predikát byť človekom a písmenom S vlastnosť – predikát byť smrteľný. Potom (5.1) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sokrates je } C\\ \text{Každý kto je C je } S\end{array}}{\text{Sokrates je } S} \tag{5.2}$$

Vidíme, že aj táto čiastočná formalizácia usudzovania (5.1) ešte nie je moc nápomocná k riešeniu problému jej korektnosti. Zásadný prepis (5.1) spočíva v tom, že zavedieme konštanty vyskytujúce sa v predikátoch, t.j. označenie $C(s)$ pre prvú vetu „Sokrates je človek“ a označenie $S(s)$ pre „Sokrates je smrteľný“, kde symbol s je konštantou daného predikátu, ktorá označuje indivíduum Sokrates. Potom pomocou tohto nového označenia už môžeme prepísať druhú vetu „Každý kto je človek je smrteľný“ z (5.1) do tvaru, ktorý už naznačuje určité súvislosti medzi prvou a treťou vetou. Výraz „každý“ z druhej vety nahradíme symbolom reprezentujúcim „každý objekt“, budeme ho označovať $\forall$ a nazývať *univerzálny kvantifikátor*. Každý kvantifikátor musí byť doprevádzaný nejakým argumentom (premennou) x, symbol $\forall x$ čítame ako „pre každé x“ . Pomocou tohto formalizmu druhá veta z (5.1) je prepísaná do tvaru: $(\forall x)\big(C(x) \Rightarrow S(x)\big)$, potom schéma (5.1) má tento tvar

$$\begin{array}{l} S(s) \\ (\forall x)\big(C(x) \Rightarrow S(x)\big) \\ \hline S(s) \end{array} \tag{5.3}$$

Zopakujeme si použitú terminológiu: vlastnosti alebo relácie medzi objektmi sa nazývajú *predikáty*, objekty, ktoré sú jednoznačne určené (napr. osoba Milan) sa nazývajú *konštanty*, objekty, ktoré majú všeobecný charakter sa nazývajú argumenty.

Výraz $\forall x\big(C(x) \Rightarrow S(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať ako konjunkciu implikácií pre rôzne osoby (konštanty), napr. Milan, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned} (\forall x)\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) &\equiv \big(C(m) \Rightarrow S(m)\big) \wedge \big(C(j) \Rightarrow S(j)\big) \wedge \big(C(r) \Rightarrow S(r)\big) \wedge \ldots \\ &\equiv \mathring{\bigcup_{x \in U}} \big(C(x) \Rightarrow S(x)\big) \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde U je množina objektov – osôb. Ak akceptujeme interpretáciu (6.4) nového symbolu $\forall x$, potom už môžeme pokladať za tautológiu nasledujúcu implikáciu (ako jednoduchý dôsledok zákona výrokovej logiky $p \wedge q \wedge r \wedge \ldots \Rightarrow p$)

$$(\forall x)\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) \Rightarrow \big(S(m) \Rightarrow I(m)\big) \tag{5.5}$$

To znamená, že zo všeobecného výroku $(\forall x)\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big)$ vyplýva aj jeho *konkretizácia* pre konštantu m (pre Milana). Pomocou tohto vzťahu môžeme upraviť schému usudzovania (5.3) takto

$$\begin{array}{l} \underline{S(m)\qquad\qquad} \\ (\forall x)\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) \\ (\forall x)\big(S(x) \Rightarrow I(x)\big) \Rightarrow \big(S(m) \Rightarrow I(m)\big) \\ \hline I(m) \end{array} \tag{5.6}$$

Túto rozšírenú schému usudzovania môžeme upraviť pomocou pravidla modus ponens (2.1), ktorá je integrálnou súčasťou systému odvodzovania vo výrokovej logike. Aplikovaním (2.1) na druhý a tretí riadok (5.6) dostaneme platnosť implikácie $S(m) \Rightarrow I(m)$, potom (6.6) má túto zjednodušenú podobu

$$\begin{array}{l} S(m) \\ S(m) \Rightarrow I(m) \\ \hline I(m) \end{array} \tag{5.7}$$

tvaru klasického modus ponens pravidla (2.1) a z ktorého vyplýva platnosť $I(m)$. Týmto sme vlastne dokázali korektnosť usudzovania pôvodnej verbálne formulovanej schémy usudzovania (5.1). Musíme však zdôrazniť, že k tomu, aby sme dokázali korektnosť tejto schémy používajúcej väzbu „každý“ museli sme opustiť rámec výrokovej logiky a zaviesť predikáty a symbol $\forall x$, čím sme sa dostali z domény výrokovej logiky do domény tzv. predikátovej logiky.

Príklad 5.2. Budeme pokračovať v našom intuitívnom zovšeobecňovaní výrokovej logiky. Študujme ďalšiu schému usudzovania s novým slovom „niektorý“

$$\begin{array}{l} \text{Fido je študent} \\ \text{Fido má index} \\ \hline \text{Niektorý objekt je študent a má index} \end{array} \tag{5.8}$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, v rámci výrokovej logiky táto intuitívne korektná schéma usudzovania nemôže byť študovaná. Budeme formalizovať túto schému podobným spôsobom, ako v predchádzajúcom ilustratívnom príklade. Zavedieme nový symbol nazývaný *existenčný kvantifikátor* $\exists x$, ktorý čítame ako „existuje také x“. Potom schéma (5.8) má tvar

$$\begin{array}{l} S(f) \\ I(f) \\ \hline (\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big) \end{array} \tag{5.9}$$

Výraz $(\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big)$ môžeme jednoducho interpretovať (podobne ako v (6.4)) ako disjunkciu konjunktívnych výrokov pre rôzne osoby, napr. Fido, Jozef, Rudolf,...

$$\begin{aligned} (\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big) &\equiv \big(S(f) \wedge I(f)\big) \vee \big(S(j) \wedge I(j)\big) \vee \big(S(r) \wedge I(r)\big) \vee \ldots \\ &\equiv \underset{x \in U}{\text{Ú}}\big(S(x) \wedge I(x)\big) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Z tejto interpretácie existenčného kvantifikátora a zo zákona výrokovej logiky $p \Rightarrow p \vee q \vee r \vee \ldots$ vyplýva implikácia

$$\big(S(m) \wedge I(m)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big) \tag{5.11}$$

Prvé dva riadky (6.9) sú v rámci výrokovej logiky interpretované ako ich spoločná konjunkcia

$$\begin{array}{l} S(m) \\ I(m) \\ \hline S(m) \wedge I(m) \end{array} \tag{5.12}$$

Spojením (5.11) a (5.12) dostaneme

$$\begin{array}{l} S(f) \\ I(f) \\ S(f) \wedge I(f) \\ \big(S(f) \wedge I(f)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big) \\ \hline ? \end{array} \tag{5.13}$$

Aplikovaním štandardného modus ponens na tretí a štvrtý riadok dospejeme k dôležitému medzivýsledku pre verikáciu (5.9)

$$\begin{array}{l} S(f) \wedge I(f) \\ \big(S(f) \wedge I(f)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big) \\ \hline (\exists x)\big(S(x) \wedge I(x)\big) \end{array} \tag{5.14}$$

Ak tento výsledok dosadíme do (5.13) dostaneme (5.9), čo bolo našim cieľom verifikovať.

5.2 Formálne základy predikátovej logiky

Výrazové prostriedky klasickej výrokovej logiky sú veľmi obmedzené a nie sú schopná postihnúť všetky možnosti ľudského usudzovania, ktoré sú charakterizované ako „logicky korektné“. Jeden zo spôsobov ako zovšeobecniť výrokovú logiku je rozšírenie výrokovej logiky na predikátovú logiku pomocou je zavedenie dvoch kvantifikátorov (univerzálneho a existenčného). ***Univerzálny kvantifikátor*** je definovaný takto

$$(\forall x)P(x) =_{def} \bigwedge_{x\in U} P(x) \equiv P(a)\wedge P(b)\wedge ...\wedge P(u) \tag{5.15}$$

kde x je indivíduová premenná z univerza $U=\{a,b,...,u\}$. Formula $(\forall x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý pre každé indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „pre každý objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P“. Ilustračný príklad univerzálneho kvantifikátora nech je výrok „každý študent má index“, ktorý môžeme vyjadriť takto

$$(\forall x)Mat'\_index(x) =_{def} \bigwedge_{x\in U} Mat'\_index(x)$$

$$\equiv Mat'\_index(Fero)\wedge Mat'\_index(Jano)\wedge ...\wedge Mat'\_index(Jana)$$

Množina – univerzum U vztiahnutá k tomuto kvantifikátoru má tvar

$$U=\{Fero, Jano,..., Jana\}$$

obsahuje všetkých študentov. Podobným spôsobom môžeme zaviesť aj ***existenčný kvantifikátor***

$$(\exists x)P(x) =_{def} \bigvee_{x\in U} P(x) \equiv P(a)\vee P(b)\vee ...\vee P(u) \tag{5.16}$$

Formula $(\exists x)P(x)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát P je ***pravdivý aspoň pre jedno indivíduum*** z univerza U, túto formulu čítame takto: „aspoň pre jeden objekt z univerza U platí predikát (vlastnosť) P“. Jednoduchý ilustračný príklad existenčného kvantifikátora je výrok „niektorí študenti vedia po anglický“

$$(\exists x)Vediet'\_anglicky(x) =_{def} \bigvee_{x\in U} Vediet'\_anglicky(x)$$

$$\equiv Vediet'\_anglicky(Fero)\vee ...\vee Vediet'\_anglicky(Jana)$$

Medzi univerzálnym a existenčným kvantifikátorom existuje vzťah, ktorý sa dá jednoducho odvodiť z (5.17) alebo (5.18) použitím De Morganových vzťahov

$$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x) \tag{5.17a}$$

$$\neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x) \tag{5.17b}$$

5.2.1 Jazyk predikátovej logiky (syntax)

Ako už bolo naznačené v predchádzajúcej časti tejto kapitoly, jazyk predikátovej logiky bude bohatší ako jazyk výrokovej logiky, bude obsahovať vyjadrovacie prostriedky, pomocou ktorých sme schopní rozlišovať jednotlivé objekty (indivídua), ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Konštrukcia formúl výrokovej logiky na základe definícií 1.2 a 1.3 bude rozšírená o predikáty a kvantifikátory.

Definícia 5.1. Symboly jazyka predikátovej logiky sú

(1) množina indivíduových premenných $\mathcal{X}=\{x,y,...,x_1,x_2,...\}$;

(2) množina indivíduových konštánt $\mathcal{C}=\{a,b,...,a_1,b_2,...\}$;

(3) množina predikátových symbolov (predikátov) $\mathcal{P}=\{P,Q,...,P_1,P_2,...\}$;

(4) množina logických symbolov $\mathcal{L}=\{\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\equiv,\forall,\exists\}$;

(5) množina pomocných symbolov $\mathcal{B}=\{(,)\}$.

V predikátovej logike premenné reprezentujú objekty z univerza U – ktoré obsahuje indivíduá. Preto predikátováx logika musí obsahovať formálne prostriedky k špecifikácii týchto vlastností – relácie – predikáty. Syntax formúl predikátovej logiky je určený touto definíciou:

Definícia 5.2. Jazyk predikátovej logiky je definovaný nad množinami z definície 5.1 takto:
Termy:

(1) Indivíduové premenné a indivíduové konštanty sú termy;

(2) žiadne iné symboly nie sú termy.

Atomické formuly:

(1) Ak P je n-miestny predikátový symbol, $t_1, t_2, ..., t_n$ sú termy, potom výraz $P(t_1,t_2, ...,t_n)$ je atomická formula;

(2) žiadne iné symboly nie sú atomické formuly.

Formuly:

(1) Každá atomická formula je formula;

(2) ak φ a ψ sú formule, x je premenná, potom výrazy $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\Rightarrow\psi)$, $(\varphi\equiv\psi)$, $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ sú formule.

(3) Žiadne iné symboly nie sú formuly.

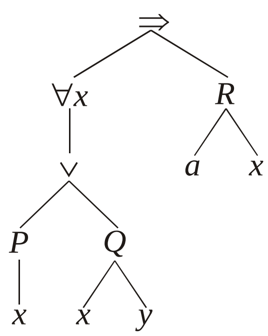
Základnou entitou jazyka predikátovej logiky je *formula* (označovaná malými gréckymi písmenami), ktorej spôsob konštrukcie je určený definíciou 5.2 rekurentného charakteru.

Príklad 5.3. Študujme tieto dva reťazce symbolov

$$\alpha=\Big((\forall)\big(P(x)\vee Q(x,b)\big)\Big)\Rightarrow R(a,b)$$

$$\beta=\Big((\forall x)\big(P(x)\vee Q(x,y)\big)\Big)\Rightarrow R(a,x)$$

kde P je unárny predikát, Q a R sú binárne predikáty, a a b sú konštanty, x a y sú premenné. Reťazec α nie je formula, pretože symbol $\forall$ nie je nasledovaný symbolom premennej. Reťazec β je korektná formula. Táto skutočnosť môže byť verifikovaná pomocou konštrukcie syntaktického stromu tejto formule, ktorý je znázornený na obr. 5.1.



Obrázok 5.1. Syntaktický strom formuly $\Big((\forall x)\big(P(x)\vee Q(x,y)\big)\Big)\Rightarrow R(a,x)$. K jeho podstromom môžu byť priradené podformuly, čo sú také časti danej formuly, ktoré sú taktiež syntakticky korektné formuly.

Príklad 5.4. Zapíšte pomocou jazyka predikátovej logiky tieto výroky prirodzeného jazyka:

(1) Každý riaditeľ má aspoň jedného podriadeného zamestnanca.
Riešenie: $(\forall x)\ \left(R(x) \Rightarrow (\exists y)P(x,y)\right)$, kde $R(x)$ znamená, že indivíduum x je riaditeľ, $P(x,y)$ znamená, že indivíduum y je podriadením indivídua x.

(2) Neexistuje taký človek, ktorý by sa každému páčil.
Riešenie: $\neg(\exists x)(\forall y)\ P(x,y)$, kde $P(x,y)$ znamená, že indivíduum x sa páči indivíduu y.

(3) Nie je pravda, že každý člen vedenia podniku je aj majiteľom podnikových akcií.
Riešenie: $\neg(\forall x)(V(x) \Rightarrow A(x))$, kde $V(x)$ znamená, že indivíduum x je člen vedenia podniku a $A(x)$ znamená, že indivíduum x je majiteľom podnikových akcií.

(4) Postupnosť $\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ má limitu a: Pre každé $\varepsilon>0$ existuje také n_0, že pre každé $n>n_0$ platí $|a-a_n|<\varepsilon$.
Riešenie: $\forall(\varepsilon>0)\exists(n_0)\forall(n>n_0)(|a-a_n|<\varepsilon)$.

(5) Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 minimum: existuje také $\varepsilon>0$, že pre každé $x \in U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\}$ platí $f(x) \geq f(x_0)$. (Množina $U_\varepsilon(x_0)$ je ε-okolie bodu x_0).
Riešenie: $\exists(\varepsilon>0)\forall(x \in U_\varepsilon(x_0))(f(x) \geq f(x_0))$.

(6) V každom meste je radnica , v niektorých mestách radnica nie je.
Riešenie: $((\forall x)(M(x) \Rightarrow R(x))) \vee ((\exists x)(M(x) \wedge \neg R(x)))$, kde $M(x)$ znamená, že indivíduum x je mesto, symbol $R(x)$ znamená, že indivíduum x má radnicu.

5.2.2 Pravdivostné hodnotenie formúl predikátovej logiky (sémantika)

Problém pravdivostného hodnotenia formúl predikátovej modálnej logiky je podstatne zložitejší proces ako vo výrokovej logike. K tomu, aby sme toto hodnotenie korektne realizovali, musíme poznať tzv. interpretáciu konštánt a predikátových symbolov. Pre lepšie pochopenie tohto nového problému budeme študovať ilustračný príklad.

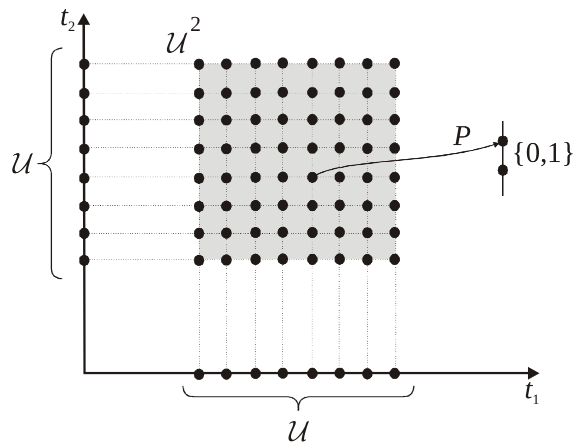
Príklad 5.5. Majme formulu $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y))$, kde P je unárny predikát a Q je binárny predikát. Uvažujme tieto dve rôzne interpretácie:

(1) Interpretácia $\mathcal{I}_1$. Indivíduá sú ľudia. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je učiteľ" a predikát $Q(x,y)$ reprezentuje vlastnosť objekt y je žiakom objektu x. Potom študovaná formula má význam „každý učiteľ má aspoň jedného žiaka, pravdivostná hodnota tejto formuly je pravda.

(2) Interpretácia $\mathcal{I}_2$. Indivíduá sú prirodzené čísla. Predikát $P(x)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je prvočíslo", predikát $Q(x,y)$ reprezentuje vlastnosť „objekt x je deliteľný objektom y, pričom $y \neq x$. Pre každé x pre ktoré platí predikát $P(x)$ neexistuje také iné prvočíslo y, ktoré by bolo deliteľom čísla x. Pri tejto voľbe objektov a predikátov, význam

formule je „pre každé prvočíslo x existuje také iné prvočíslo y, ktoré je deliteľom x“, čo je evidentne nepravdivý výraz.

Z toho jednoduchého príkladu vyplýva, že pravdivostná hodnota predikátovej formuly je určená interpretáciou $\mathcal{I}$ premenných, konštánt a predikátov. Na rozdiel od výrokovej logiky, kde je postačujúce špecifikovať len pravdivostné hodnoty výrokových premenných a nemusíme špecifikovať ich význam, v predikátovej logike pri určovaní pravdivostnej hodnoty musíme v rámci danej interpretácie $\mathcal{I}$ špecifikovať význam tak premenných a konštánt, ako aj predikátov.



Obrázok 5.2. Znázornenie interpretácie $\mathcal{I}$, kde predikát P je definovaný nad karteziánskym súčinom $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$. Predikát P priradí dvojici indivíduí $(t_1,t_2)\in\mathcal{U}^2$ binárne číslo $P(t_1,t_2)\in\{0,1\}$.

V rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ predikát P chápeme ako zobrazenie, ktoré je definované nad karteziánskymi produktmi množiny indivíduí (univerzom) $\mathcal{U}$. Potom pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ n-miestny predikát P je interpretovaný ako zobrazenie (pozri obr. 5.2)

$$P:\mathcal{U}^n \rightarrow \{0,1\} \tag{5.18}$$

ktoré usporiadanej n-tici indivíduí $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathcal{U}^n$ priradí binárnu pravdivostnú hodnotu 0/1. To znamená, že predikát môžeme chápať ako špeciálny typ výroku, ktorý je definovaný nad kartézianským produktom univerza $\mathcal{U}^n$ a ktorý má pravdivostnú hodnotuy 0/1. V prípade, že $n = 0$, potom bezargumentový predikát P interpretujeme ako jednoduchú výrokovú premennú.

Príklad 5.6. Uvažujme univerzum $\mathcal{U}=\{Ján, Jozef, Viera, Eva, Maja\}$, pričom rodičia *Ján* a *Viera* majú deti *Jozefa* a *Evu*, *Maja* je ich známa, nie je v príbuzenskom vzťahu s ostatnými objektmi. Ternárny (n=3) predikát $P(x,y,z)$ je pravdivý, ak indivíduum x má otca y a matku z). V našom prípade, potom pre predikát P platia tieto ilustračné príklady: $P(Jozef, Ján, Viera)=1$, $P(Ján, Jozef, Viera)=0$, $P(Eva, Ján, Viera)=1$, $P(Eva, Eva, Maja)=0$.

Pravdivostná hodnota formuly s univerzálnym kvantifikátorom $(\forall x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ vždy pravdivý.

Podobne, formula s existenčným kvantifikátorom $(\exists x)P(x)$ je pravdivá vtedy, keď v rámci zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je predikát $P(x)$ pravdivý aspoň pre jeden objekt. Potom formula $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)\big)$ je pravdivá práve vtedy, ak predikát – podformula $P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)$ je vždy pravdivá. Táto podmienka je splnená podľa príkladu 5.6 napríklad vtedy, ak jednotlivé výrazy z formule interpretujeme pomocou $\mathcal{I}_1$ (kde univerzum je množina ľudí), predikát $P(x)$ je pravdivý, ak x je učiteľ a predikát $Q(x,y)$ pravdivý vtedy, ak y je žiakom x. Pre alternatívnu interpretáciu $\mathcal{I}_2$ (kde univerzum je množina prvočísel) formula $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x,y)\big)$ je nepravdivá.

Ako budeme počítať pravdivostnú hodnotu formule pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$? V predchádzajúcom texte už tento proces ohodnotenia formule pravdivostnou hodnotou už bol naznačený pre jednoduchú predikátovú formulu. Vo všeobecnosti, tento proces ohodnotenia pravdivostnou hodnotou obsahuje tieto kroky:

(1) Nech formula φ má tvar $\varphi = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, kde P je n–miestný predikát s termami t_1, t_2, ..., t_n. Súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$ je vyhodnotenie tejto formula pravdivostnou hodnotou.

(2) Ak φ a ψ sú formuly, ich pravdivostné vyhodnotené bolo vykonané v predchádzajúcom kroku pre interpretáciu $\mathcal{I}$ (t. j. poznáme $\mathcal{I} \vDash \varphi$ a $\mathcal{I} \vDash \psi$), potom nové formuly majú pravdivostné hodnoty určené takto:

- formula $\mathcal{I} \vDash \neg\varphi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \vDash \varphi$ je nepravdivé (t. j. $(\mathcal{I} \nvDash \varphi) =_{def} \neg(\mathcal{I} \vDash \varphi)$ je pravdivé),
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \wedge \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \vDash \varphi$ a $\mathcal{I} \vDash \psi$,
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \vee \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \vDash \varphi$ alebo $\mathcal{I} \vDash \psi$,
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \Rightarrow \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak $\mathcal{I} \nvDash \varphi$ alebo $\mathcal{I} \vDash \psi$,
- formula $\mathcal{I} \vDash \varphi \equiv \psi$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak ekvivalencia $(\mathcal{I} \vDash \varphi) \equiv (\mathcal{I} \vDash \psi)$ je pravdivá.

(3) Formula $(\forall x)\varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá pre každé $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

(4) Formula $(\exists x)\varphi(x)$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak (atomická) formula $\varphi(x)$ je pravdivá aspoň pre jedno $x \in \mathcal{U}$ (čo je súčasťou zvolenej interpretácie $\mathcal{I}$).

Ak na základe predchádzajúcich krokov 1-4 formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je pravdivá, potom to zapíšeme takto $\mathcal{I} \vDash \varphi$, v opačnom prípade, ak je formula φ pre danú interpretáciu $\mathcal{I}$ je nepravdivá, potom $\mathcal{I} \nvDash \varphi$.

Definícia 5.3.
(1) Formula φ sa nazýva ***splniteľná*** v interpretácii $\mathcal{I}$ vtedy a len vtedy, ak je v tejto

interpretácii pravdivá, $\mathcal{I} \models \varphi$.
(2) Formula φ sa nazýva ***tautológia*** vtedy a len vtedy, ak je splniteľná pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \models \varphi$, čo zapisujeme $\models \varphi$, alebo $(\models \varphi) =_{def} (\textit{pre každú interpretáciu } \mathcal{I})(\mathcal{I} \models \varphi)$.

Príklad 5.7. Verifikujete, či formula (sentencia) $\alpha = ((\forall x)\, P(x)) \vee (\neg(\forall x)\, P(x))$ je tautológia. Musíme ukázať, že táto formula je pravdivá pre každú interpretáciu $\mathcal{I}$. Pre zvolenú interpretáciu $\mathcal{I}$ je formula $\beta = (\forall x)\, P(x)$ buď pravdivá alebo nepravdivá, potom však disjunkcia $\beta \vee \neg\beta$ je pravdivá. Dokazovaná formula je vlastne verziou známej tautológie výrokovej logiky $p \vee \neg p$, substitúciou $p/(\forall x) P(x)$ dostaneme verifikovanú sentenciu predikátovej logiky. Týmto jednoduchým spôsobom môžeme zostrojiť mnoho tautológii predikátovej logiky, že do známych tautológií výrokovej logiky zavedieme vhodnú substitúciu sentencie. Tak napríklad použitím tautológie $p \Rightarrow p$ dostaneme napr. túto tautológiu predikátovej logiky $(\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\forall x)\, P(x)$.

Najznámejšie tautológie predikátovej logiky sú tieto:
1. Eliminácia univerzálenho kvantifikátora (konkretizácia)
$$((\forall x)\, P(x)) \Rightarrow P(t) \tag{5.19a}$$
kde $t \in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza *U*.
2. Eliminácia existenčného kvantifikátora (konkretizácia)
$$((\exists x)\, P(x)) \Rightarrow P(a) \tag{5.19b}$$
kde $a \in U$ je dané konštantné indivíduum z univerza *U*.
2. Zavedenie existenčného kvantifikátora (abstrakcia)
$$P(a) \Rightarrow ((\exists x)\, P(x)) \tag{5.19b}$$
kde $a \in U$ je dané konštantné indivíduum z univerza *U*.
3. Zmena univerzálneho kvantifikátora na existenčný kvantifikátor
$$(\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \tag{5.19c}$$
4. Komutácia univerzálnych kvantifikátorov
$$(\forall x)(\forall y)\, P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\, P(x,y) \tag{5.19d}$$
5. Komutácia existenčných kvantifikátorov
$$(\exists x)(\exists y)\, P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\, P(x,y) \tag{5.19e}$$
6. Komutácia univerzálneho a existenčného kvantifikátora
$$(\exists y)(\forall x)\, P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\, P(x,y) \tag{5.19f}$$

Dôkazy týchto tautológií sú pomerne jednoduché, dôkaz vždy je založený na vhodnej formule výrokovej logiky. Obráťme našu pozornosť na dôkaz formuly (5.19a). Použijeme formulu (5.15) podľa ktorej formula $(\forall x)\, P(x)$ je konjunkcia predikátov *P* pre všetky objekty z univerza $\mathcal{U}$
$$(\forall x)\, P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \equiv \bigwedge_{x \in U} P(x) \tag{5.20}$$
Ak použijeme tautológiu výrokovej logiky $p \wedge q \Rightarrow p$, potom pre pravú stranu (5.20) platí
$$(\forall x)\, P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \Rightarrow P(t) \tag{5.21}$$
kde $t \in U$ je ľubovoľné indivíduum z univerza *U*. Ak odstránime prostredný člen v (5.21) dostaneme dokazovanú formulu (5.19a).

Dôkaz (5.19b) vyplýva z formule (5.16) v tvare

$$(\exists x)\, P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee ... \equiv \bigcup_{x \in U} P(s) \tag{5.22}$$

a z tautológie výrokovej logiky $p \Rightarrow p \vee q$, potom platí

$$P(a) \Rightarrow P(a) \vee P(b) \vee ... \equiv (\exists x)\, P(x) \tag{5.23}$$

čo bolo potrebné dokázať. Dôkaz (5.19c) priamo vyplýva z (5.19a-b) a zákona výrokovej logiky hypotetického sylogizmu $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Dôkaz tautológií (5.19d-e) je priamym dôsledkom komutatívnosti resp. asociatívnosti konjunkcie a disjunkcie ($p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ a $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$)

$$\begin{aligned}(\forall x)(\forall y)\, P(x,y) &\equiv P(a,a) \wedge P(a,b) \wedge P(a,c) \wedge ...\\ &\wedge P(b,a) \wedge P(b,b) \wedge P(b,c) \wedge ...\\ &\wedge P(c,a) \wedge P(c,b) \wedge P(c,c) \wedge ...\\ &\equiv P(c,a) \wedge P(b,a) \wedge P(a,a) \wedge ...\\ &\wedge P(c,b) \wedge P(b,b) \wedge P(a,b) \wedge ...\\ &\wedge P(c,c) \wedge P(b,c) \wedge P(a,c) \wedge ... \equiv (\forall y)(\forall x)\, P(x,y)\end{aligned} \tag{5.24}$$

týmto sme dokázali zákon predikátovej logiky (5.19d). Podobným spôsobom sa dokáže aj zákon (5.19e).

Dôkaz (5.19f) uskutočníme tak, že implikáciu prepíšeme do disjunktného tvaru, pričom negácie kvantifikátorov upravíme pomocou (5.15a-b)

$$\begin{aligned}(\exists y)(\forall x)\, P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\, P(x,y) &\equiv \neg\big((\exists y)(\forall x)\, P(x,y)\big) \vee \big((\forall x)(\exists y)\, P(x,y)\big)\\ &\equiv \big((\forall y)(\exists x) \neg P(x,y)\big) \vee \big((\forall x)(\exists y)\, P(x,y)\big)\\ &\equiv \big((\forall y)(\exists x) \neg P(x,y)\big) \vee \big((\forall y)(\exists x)\, P(y,x)\big)\\ &\equiv (\forall x)(\exists y)\big((\neg P(x,y)) \vee P(y,x)\big)\end{aligned}$$

Výraz v zátvorke je pravdivý, pretože pre každé $x \in \mathcal{U}$ je disjunkcia $\bigvee_{y \in \mathcal{U}} \big((\neg P(x,y)) \vee P(y,x)\big)$ pravdivá (aspoň pre $x=y$). Poznamenajme, že tento spôsob dôkazu je nepoužiteľný pre obrátenú implikáciu, $\big((\forall y)(\exists x)\, P(x,y)\big) \Rightarrow \big((\exists x)(\forall y)\, P(x,y)\big)$.

Príklad 5.8. Navrhnite takú interpretáciu formuly $\big((\forall x)(\exists y)\, P(x,y)\big) \Rightarrow \big((\exists y)(\forall x)\, P(x,y)\big)$ v ktorej je nepravdivá. Ľahko sa dá zostrojiť interpretácie $\mathcal{I}$ tejto formuly, ktorá nie je pravdivá, čiže táto formula nie je tautológia. Nech premenné *x*, *y* sú reálne čísla a predikát *P* je relácia <, potom $\big((\forall x)(\exists y)(x<y)\big) \Rightarrow \big((\exists y)(\forall x)(x<y)\big)$. Ľavá strana implikácie $(\forall x)(\exists y)(x<y)$ je evidentne pravdivá formula (pre každé číslo *x* existuje také číslo *y*, že *x* < *y*), $\big((\forall x)(\exists y)(x<y)\big) \equiv \mathbf{1}$. Pravá strana implikácie $(\exists y)(\forall x)\, P(x<y)$ je evidentne nepravdivá formula (existuje také *y*, ktoré je väčšie ako každé *x*, čo je evidentná nepravda), $\big((\exists y)(\forall x)\, P(x<y)\big) \equiv \mathbf{0}$. Týmto sme dokázali, že pre danú interpretáciu ľavá strana je pravdivá, zatiaľ čo pravá stran

a je nepravdivá, z čoho vyplýva že implikácia je nepravdivá, $(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

5.2.3 Vybrané zákony predikátovej logiky

(1) ***Distributívne zákony kvantifikátorov***:

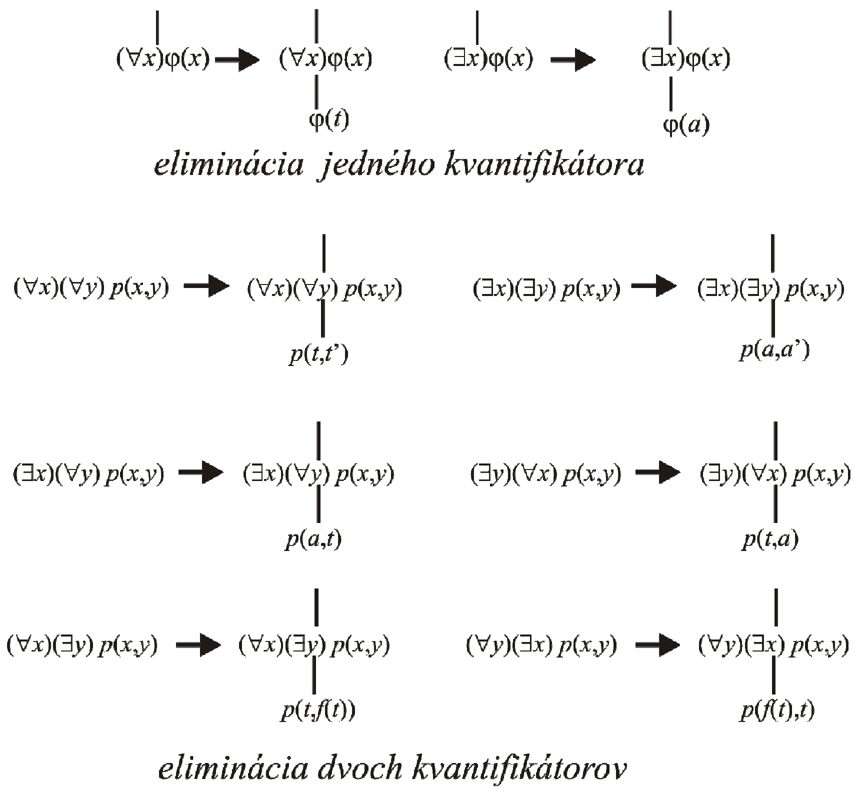
- $(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv(\forall x)\,P(x)\wedge(\forall x)\,Q(x)$ (5.25a)
- $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)\Rightarrow(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ (5.25b)
- $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\equiv(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$ (5.25c)
- $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$ (5.25d)
- $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)\,P(x)\Rightarrow(\forall x)\,Q(x)\big)$ (5.25e)
- $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\exists x)\,P(x)\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)\big)$ (5.25f)

(2) ***Zákony prenexných operácií (kde P je výrok, t. j. predikát bez argumentu)***:

- $(\forall x)\big(P\Rightarrow Q(x)\big)\equiv\big(P\Rightarrow(\forall x)\,Q(x)\big)$ (5.25g)
- $(\exists x)\big(P\Rightarrow Q(x)\big)\equiv\big(P\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)\big)$ (5.25h)
- $(\forall x)\big(Q(x)\Rightarrow P\big)\equiv\big((\forall x)\,Q(x)\Rightarrow P\big)$ (5.25i)
- $(\exists x)\big(Q(x)\Rightarrow P\big)\equiv\big((\exists x)\,Q(x)\Rightarrow P\big)$ (5.25j)
- $(\forall x)\big(P\wedge Q(x)\big)\equiv P\wedge(\forall x)\,Q(x)$ (5.25k)
- $(\exists x)\big(P\wedge Q(x)\big)\equiv P\wedge(\exists x)\,Q(x)$ (5.25l)
- $(\forall x)\big(P\vee Q(x)\big)\equiv P\vee(\forall x)\,Q(x)$ (5.25m)
- $(\exists x)\big(P\vee Q(x)\big)\equiv P\vee(\exists x)\,Q(x)$ (5.25n)

(3) ***Súčiny dvoch kvantifikátorov***:

- $(\forall x)(\forall y)\,P(x,y)\equiv(\forall y)(\forall x)\,P(x,y)$ (5.25o)
- $(\exists x)(\exists y)\,P(x,y)\equiv(\exists y)(\exists x)\,P(x,y)$ (5.25p)
- $(\exists y)(\forall x)\,P(x,y)\Rightarrow(\forall x)(\exists y)\,P(x,y)$ (5.25q)
- $(\forall x)(\forall y)\,P(x,y)\vee Q(x,y)\Rightarrow(\exists y)(\forall x)\,P(x,y)\vee(\forall y)(\exists x)\,Q(x,y)$ (5.25r)
- $(\forall x)(\forall y)\,P(x,y)\Rightarrow(\forall x)\,P(x,x)$ (5.25s)
- $(\exists x)(\forall y)\,P(x,y)\Rightarrow(\exists x)\,P(x,x)$ (5.25t)
- $(\forall x)(\exists y)\big(P(x)\wedge Q(y)\big)\equiv(\forall x)P(x)\wedge(\exists y)Q(y)$ (5.25u)
- $(\forall x)(\exists y)\big(P(x)\vee Q(y)\big)\equiv(\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y)$ (5.25v)
- $(\exists y)(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(y)\big)\equiv(\forall x)(\exists y)\ \big(P(x)\wedge Q(y)\big)$ (5.25x)
- $(\exists y)(\forall x)\big(P(x)\vee Q(y)\big)\equiv(\forall x)(\exists y)\ \big(P(x)\vee Q(y)\big)$ (5.25y)



Obrázok 5.3. Doplnenie základných rozšírení metódy sémantického tabla pre výrokovú logiku (pozri obr. 3.1) o rozšírenia obsahujúce kvantifikátory. Premenná t špecifikuje ľubovoľné indivíduum z univerza U, $\forall t \in U$; podobne, konštanta a špecifikuje vybrané indivíduum z univerza U, $\exists a \in U$ (pozri (5.25)).

5.3 Sémantické tablá

Technika sémantických tabiel pre predikátovú logiku je jednoduchou modifikáciou sémantických tabiel z výrokovej logiky (pozri kapitolu 3 a obr. 3.1) o rozšírenia, ktoré zahŕňajú univerzálne a existenčné kvantifikátory. Tieto rozšírenia sú založené na nasledujúcich zákonoch predikátovej logiky

$$(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(t) \tag{5.25a}$$

$$(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(a) \tag{5.25b}$$

$$(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(t,t') \tag{5.25c}$$

$$(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(a,a') \tag{5.25d}$$

$$(\exists y)(\forall x)\varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(t,a) \tag{5.25e}$$

$$(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(a,t) \tag{5.25f}$$

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(t,f(t)) \tag{5.25g}$$

$$(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(f(t),t) \tag{5.25h}$$

kde t je ľubovoľný objekt (indivíduum) z univerza U, a je daný konštantný objekt (indivíduum) z univerza U. Poznamenajme, že dvojice formúl (5.25e-f) a (5.25g-h) sú ekvivaletné, použitím zámeny objektov $x \leftrightarrow y$, jednu formulu môžeme prepísať na druhú formulu. Určité interpretačné problémy spôsobuje posledná formula (5.25f), ktorá môže byť chápaná ako „jemná“ modifikácia formuly (5.25e) s inverzným poradím kvantifikátorov. Ako ukážeme neskoršie, táto skutočnosť má dramatický dopad na korektnú interpretáciu ľavej strany formuly (5.25f). Posledné dve formuly sú upravené procesom ***skolemizacie*** takto:

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y) \equiv (\forall x)\varphi(x, f(x)) \Rightarrow \varphi(t, f(t)),$$

$$(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y) \equiv (\forall y)\varphi(f(y),y) \Rightarrow \varphi(f(t),t),$$

kde *f* sa nazýva ***Skolemova funkcia***. Predĺženia predikátových formúl v teórii sémantických tabiel je znázornené na obr. 5.3.

Upriamime našu pozornosť na formuly (5.25a-h). Prvé dve formuly (5.25a-b) sú priamym dôsledkom zákonov (5.19a-b). Žiaľ, tieto jednoduché rozšírenia sémantických tabiel pre formuly s jedným predikátom pre formuly s dvoma predikátmi je platné len pre formuly, ktoré neobsahujú „zmiešaný“ súčin existenčného a univerzálneho kvantifikátora.

Nech $\varphi = (\exists x)(\forall y)\, p(x,y)$ má alternatívny tvar

$$\varphi = (\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \equiv \bigvee_{x\in U} \bigwedge_{y\in U} p(x,y) \equiv \left(\bigwedge_{y\in U} p(a_1,y)\right) \vee \ldots \vee \left(\bigwedge_{y\in U} p(a_n,y)\right) \qquad (5.26a)$$

kde $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pretože sa jedná o disjunkciu konjunktívnych klauzúl, stačí vybrať len jednu pravdivú klauzulu a tá vyhovuje formule

$$(\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \Rightarrow \left(\bigwedge_{y\in U} p(a,y)\right) \qquad (5.26b)$$

kde $a \in U$ je vybraný objekt z univerza. Konjunktívna klauzala na pravej strane musí byť pravdivá pre každé $x \in U$, potom

$$(\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \Rightarrow p(a,t) \qquad (5.27)$$

kde $t \in U$ je ľubovoľný objekt z univerza *U*. Môžeme povedať, že tento výsledok by sme získali aj postupným použitím pravidiel (5.25a-b).

Pre formulu (5.25g) je situácii o niečo zložitejšia, táto formula má tento alternatívny tvar

$$\psi = (\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \equiv \bigwedge_{x\in U} \bigvee_{y\in U} p(x,y) \equiv \left(\bigvee_{y\in U} p(x_1,y)\right) \wedge \ldots \wedge \left(\bigvee_{y\in U} p(x_n,y)\right) \qquad (5.28)$$

kde $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pre dané x_i stanovenie takého $y \in U$, aby disjunkcia $\bigvee_{y\in U} p(x_j,y)$ bola pravdivá, musí prebiehať vzhľadom k x_i, t. j. $a = y = f(x_i)$, kde $f(x)$ je Skolemova funkcia, ktorá určuje jednoznačne *y* vzhľadom k danému $x = t$. Potom platí implikácia

$$(\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow p(t, f(t)) \qquad (5.29)$$

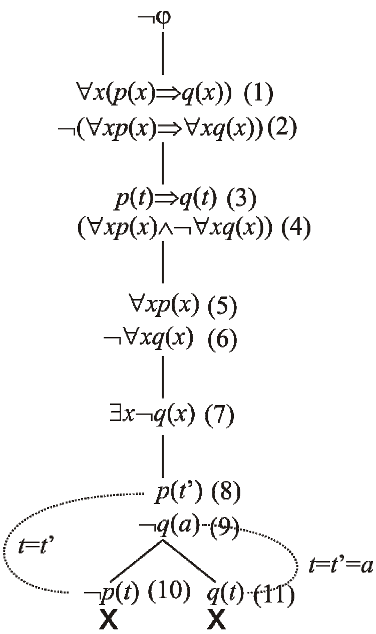
kde $t \in U$ je ľubovoľný objekt z univerza *U*. Poznamenajme, že Skolemova funkcia $f(t)$ priradí ľuboľnému $t \in U$ nejaké vybrané $a = f(t)$ tak, aby formula (5.28) bola pravdivá. Podobným spôsobom môžeme študovať aj formuly (5.25c-d), ktoré obsahujú dva univerzálne alebo existenčné kvantifikátory. Podobnými úvahami, ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch dostaneme formuly

$$(\forall x)(\forall y)\, p(x,y) \Rightarrow p(t,t') \qquad (5.30a)$$

$$(\exists x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow p(a,a') \qquad (5.30b)$$

kde $t, t' \in U$ sú ľubovoľné objekty a $a, a' \in U$ sú vybrané objekty.

Príklad 5.9. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi=\forall x\big(p(x)\Rightarrow q(x)\big)\Rightarrow\big(\forall xp(x)\Rightarrow\forall xq(x)\big)$ je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 5.4.



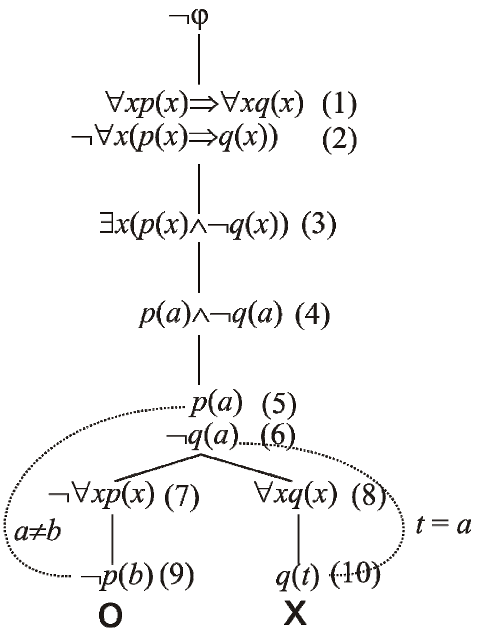
.

Obrázok 5.4. Sémantuické tablo formuly $\varphi=(\forall x)\big(p(x)\Rightarrow q(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)\,p(x)\Rightarrow(\forall x)\,q($. Pretože tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, formula φ je tautológia, čo bolo potrebné dokázať.

Jednotlivé formuly sémantickom table obr. 5.4 sú indexované a majú tento význam:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha\Rightarrow\beta)$, pozri obr. 3.1, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Na formulu (1) bola použitá schéma sme predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a všeobecná indivíduová premenná *x* bola nahradená ľubovoľnou indivíduovov konštantou *t*, vznikla formula (3).
- Formula (4) vznikla aplikáciou ekvivalencie $\neg(\alpha\Rightarrow\beta)\equiv\alpha\wedge\neg\beta$ na formulu (2).
- Formuly (5) a (6) vzikli predĺžením (4) podľa schémy z obr. 3.1, diagram B.
- Formula (7) vznikla z (6) ekvivalentným prepisom $\neg\forall xR(x)\equiv\exists x\neg R(x)$.
- Formula (8) vznikla z (5) použitím predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduovú premennú *x* sme nahradili ľubovoľnou indivíduovov konštantou *t´*.
- Formula (9) vznikla z (7) aplikáciou predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduovú premennú *x* sme nahradili vybranou indivíduovov konštantou *a*.
- Vzniklé sémantické tablo ma dve vetvy. Ľavá vetva je uzavretá, pretože môžeme vytvoriť kontradikciu tak, že položíme $t = t'$ (poznamenjme, že tieto konštanty sú ľubovolné). Pravá vetva je taktiež uzavretá, kontradikciu vytvoríme tak, že položíme $t = a$. Tieto dve podmienky sú realizovateľnú súčasne, čo môžeme napísat ako $t = t' = a$.

Príklad 5.10. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi=\big(\forall xp(x)\Rightarrow\forall xq(x)\big)\Rightarrow\forall x\big(p(x)\Rightarrow q(x)\big)$ nie je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 5.5.

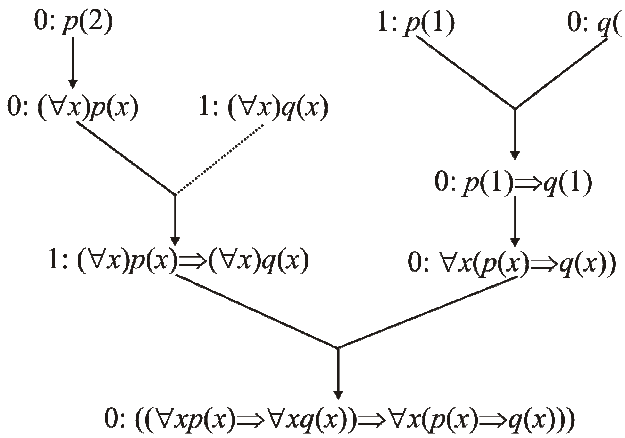


Obrázok 5.5. Sémantuické tablo pre formulu negáciu formuly $\varphi=\left(\left(\forall x\right)p\left(x\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)q\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)\left(p\left(x\right)\Rightarrow q\left(x\right)\right)$. Tablo $\mathcal{T}\left(\neg\varphi\right)$ nie je uzavreté, formula φ nie je tautológia, je len splniteľná s interpretáciou zostrojiteľnou pomocou

Podobne, ako v predchádzajúcom príklade, aj teraz prestúpime k podrobnej špecifikácii každého riadku sémantického tabla z obr. 5.5:

- Pôvodná formula (koreň sémantického tabla) $\neg\varphi$ bola predĺžená aplikáciou schémy predĺženia $\neg(\alpha\Rightarrow\beta)$, pozri obr. 3.1, diagram C, vznikli nové formuly (1) a (2).
- Formula (3) vznikla z (2) aplikáciou ekvivalencií $\neg(\forall x)R(x)\equiv(\exists x)\neg R(x)$ a $\neg(\alpha\Rightarrow\beta)\equiv\alpha\wedge\neg\beta$.
- Formula (4) vznikla z (3) použitím predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme existenčný kvantifikátor a indivíduová premenná *x* bola nahradená danou indivíduovov konštantov *a*.
- Formuly (5) a (6) vznikli z (4) použitím predĺženia z obr. 3.1, diagram B.
- Formuly (7) a (8) vznikli z (1) použitím predĺženia z obr. 3.1, diagram C.
- Formula (9) vznikla z (7) použitím predĺženia z obr. 5.3, odstránili sme univerzálny kvantifikátor a indivíduová premenná *x* bola nahradená danou indivíduovov konštantou *b*.
- Ľavá vetva sémantického tabla neprodukuje vo všeobecnosti kontradikciu (nie je uzavretá), potenciálna možnosť je tvorby pomocou (5) a (9) nemôže existovať, pretože vo všeobecnosti platí $a\neq b$.
- Pravá vetva je uzavretá, v tomto prípade vytvoríme kontradikciu podmienkou $t = a$.
- Sémantické tablo nie je uzavreté, preto formula φ nie je tautológia.

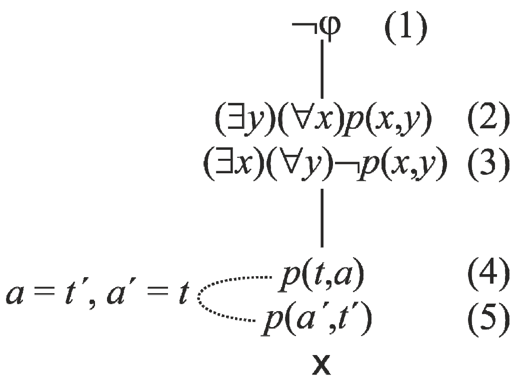
Poznamenajme, že otvorená ľavá vetva sémantického tabla môže byť použitá na konštrukciu takej interpretácie, pre ktorú je formula φ je nepravdivá, t. j. požiadavka tautologičnosti formuly φ je falzifikovaná. Z ľavej vetvy pre hodnoty predikátov *p* a *q* dostaneme tieto hodnoty: $p\left(a\right)=1,\neg q\left(a\right)=1,\neg p\left(b\right)=1$. Pre jednoduchosť položíme a = 1 a b = 2, potom $p\left(1\right)=1,\neg q\left(1\right)=1,\neg p\left(2\right)=1$. Z prvých dvoch podmienok odvodíme ich konjunkciu $p(1)\wedge\neg q(1)=1$, čo môžeme zovšeobecniť pomocou existenčného kvantifikátora $\exists x\left(p\left(x\right)\wedge\neg q\left(x\right)\right)=\exists x\neg\left(p\left(x\right)\Rightarrow q\left(x\right)\right)=\neg\forall x\left(p\left(x\right)\Rightarrow q\left(x\right)\right)=1$, Z tretej podmienky $\neg p(2)=1$ môžeme vyvodiť: $\exists x\neg p\left(x\right)=\neg\forall xp\left(x\right)=1$. Tento výsledok môžeme pomocou disjunkcie rozšíriť, $\neg\forall xp\left(x\right)\vee\forall xq\left(x\right)=\forall xp\left(x\right)\Rightarrow\forall xq\left(x\right)=1$. Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu pravdivostnej hodnoty formuly φ, $\left(\left(\forall x\right)p\left(x\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)q\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)\left(p\left(x\right)\Rightarrow q\left(x\right)\right)\equiv\left(1\Rightarrow 0\right)\equiv 0$. Tento dôležitý moment využitia sémantického table pre konštrukciu falzifikácie tautologičnosti danej formuly môžeme aj znázornuť diagramatický, pozri obr. 5.7.



Obrázok 5.6. Diagramatická falzifikácie tautologičnosti formuly $\left(\left(\forall x\right)p\left(x\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)q\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)\left(p\left(x\right)\Rightarrow q\left(x\right)\right)$ na základe počiatočných predpokladov $p\left(a\right)=1,\neg q\left(a\right)=1,\neg p\left(b\right)=1$, ktoré boli získané z ľavej vetvy sémantického tabla z obr. 5.6. Posledný riadok diagramatickej interpretácie znamená, že pre dané podmienky pravdivostná hodnota formuly je nepravda, t. j. formula nemôže byť tautológiou.

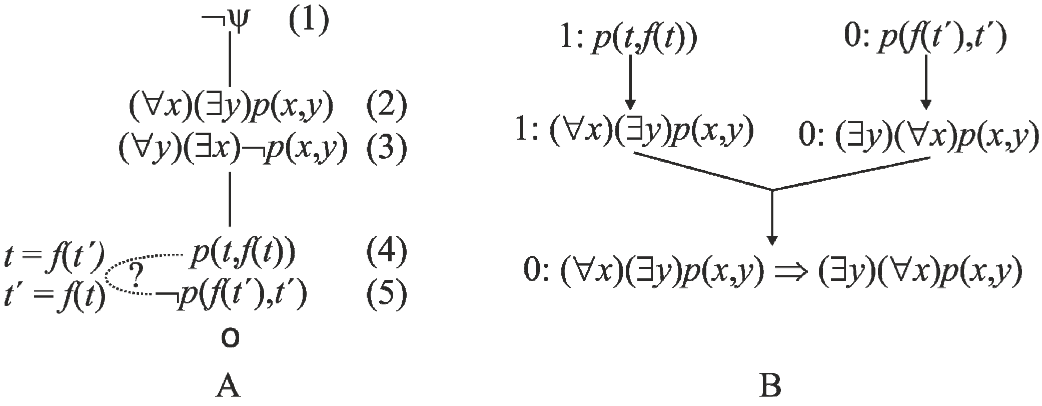
Tieto dva ilustračné príklady ukazujú na potenciálnu vhodnosť sémantických tabiel pre konštrukciu pravdivostnej interpretácie formúl predikátovej logiky, kde majú nezastúpiteľnú úlohu pre konštrukciu pravdivostných hodnôt, pretože v predikátovej logike je tabuľková metóda nepoužiteľná.

Príklad 5.11. Použitím techniky sémantického tabla dokážeme, že formula $\varphi=\left(\exists y\right)\left(\forall x\right)p\left(x,y\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)\left(\exists y\right)p\left(x,y\right)$ je zákonom predikátovej logiky, pozri obr. 5.7.



Obrázok 5.7. Sémantické tablo pre negáciu formuly $\varphi=\left(\exists y\right)\left(\forall x\right)p\left(x,y\right)\Rightarrow\left(\forall x\right)\left(\exists y\right)p\left(x,y\right)$, jediná vetva tohto tabla je uzavretá , čiže formula φ je tautológia. Pri prechode od formúl-vrchol (2-3) k formulám-vrcholom (4-5) sme použili pravú schému predĺženia z druhého riadku obrázku 5.3,

Príklad 5.12. Použitím techniky sémantického tabla falzifikujte tautologičnosť formuly $\psi=\left(\forall x\right)\left(\exists y\right)p\left(x,y\right)\Rightarrow\left(\exists y\right)\left(\forall x\right)p\left(x,y\right)$, pozri obr. 5.8.



Obrázok 5.8. (A) Sémantické tablo negácie formuly $\psi = (\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\, p(x,y)$, jediná vetva tabla je otvorená, čiže formula ψ nie je tautológia. (B) Pomocou tohto sémantického tabla môžeme zostrojiť taký model formuly ψ, v ktorom je formula nepravdivá, čiže sme falzifikovali jej tautologičnosť.

Cvičenie 5.1. Pomocou sémantických tabiel (aj duálnych) dokážte tautologičnosť formúl:

(a) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$

(b) $\neg\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\exists x\, \neg\varphi(x)\right)$

(c) $\neg\left(\exists x\, \varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\, \neg\varphi(x)\right)$

(d) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \varphi(t)$, kde t je ľubovoľné indivíduum z univerza U.

(e) $\varphi(a) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$, kde a je nejaké indivíduum z univerza U.

Dokážte tautologickosť týchto dvoch sád predikátových formúl (kde P a Q sú unárne predikáty):