Riešenie cvičení z 5. kapitoly

Cvičenie 5.1. Vety prepíšte pomocou jazyka predikátovej logiky, použite symboly uvedené v úlohách.

(a) ***Niekto má hudobný sluch (H) a niekto ho nemá.***

$(\exists x H(x)) \wedge (\exists x \neg H(x))$

(b) ***Niektoré dieťa (D) nemá rado čokoládu (C).***

$\exists x (D(x) \wedge \neg C(x))$

(c) ***Nik, kto nezvládol zásady bezpečnosti práce (B), nemôže pracovať v laboratóriu (L).***

$\forall x (\neg B(x) \Rightarrow \neg L(x))$

(d) ***Nie každý talentovaný maliar (M) vystavuje svoje práce v národnej galérii (G).***

$\neg \forall x (M(x) \Rightarrow G(x))$

(e) ***Len študenti (S) si môžu kupovať studené večere (V).***

$(\forall x (S(x) \Rightarrow V(x))) \wedge (\forall x (\neg S(x) \Rightarrow \neg V(x)))$

(f) ***Nie každá osoba (O), ktorá absolvovala drahý kurz lietania (K), je dobrý pilot (P).***

$\neg \forall x (O(x) \wedge K(x) \Rightarrow P(x))$

Cvičenie 5.2. Vety prepíšte pomocou symbolov predikátov a konštánt.

(a) ***Karol videl Shakespearovu hru Hamlet.***

Zavedieme ternárny predikát $P(x,y,z)$, ktorý má význam „indivíduum x videlo hru od y s názvom z“. Potom veta má tvar:

$$P(Karol, Shakespeare, Hamlet),$$

kde *Karol*, *Shakespeare*, *Hamlet* sú konštanty.

(b) ***Karol videl nejakú hru od Shakespeara.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade. Potom veta má tvar:

$$\exists x\ P(Karol, Shakespeare, x)$$

(c) ***Niekto videl Shakespearovu hru Hamlet.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\exists x\ P(x, Shakespeare, Hamlet)$$

(d) ***Niekto videl hru od Shakespeara.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\exists x\ \exists y\ P(x, Shakespeare, y)$$

(e) ***Nie každý videl hru od Shakespeara.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\neg \forall x\ \exists y\ P(x, Shakespeare, y)$$

(f) ***Karol videl nejakú hru.***

Použijeme rovnaký ternárny predikát ako v predošlom príklade (a). Potom veta má tvar:

$$\exists x\, \exists y\, P(Karol,x,y)$$

(g) ***Shakespeare nenapísal hru Pygmalion.***

Zavedieme binárny predikát $P(x,y)$, ktorý má význam „indivíduum x napísalo hru s názvom y. Potom veta má tvar:

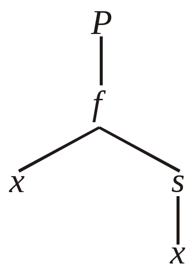
$$\neg P(Shakespeare,Pygmalion),$$

kde *Shakespeare* a *Pygmalion* sú konštanty.

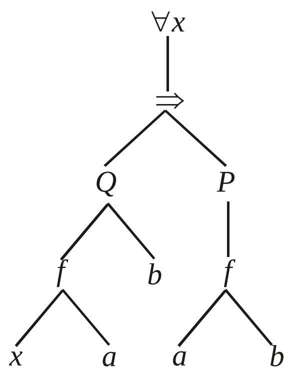
Cvičenie 5.3. Pre dané predikátové symboly P, Q a konštantné symboly a, b, pričom Q je binárny predikát a P je unárny predikát, rozhodnite, ktoré výrazy sú formuly predikátovej logiky a nakreslite ich syntaktický strom.
Pre dané predikátové symboly P, Q, funkcie f, s a konštantné symboly a, b, pričom Q a f sú binárne symboly a P, s sú unárne symboly, rozhodnite, ktoré symboly sú formuly predikátovej logiky. Ak je symbol formula, nakreslite jeho syntaktický strom.

(a) $Q\big(f(a),s(b)\big)$. Nie je formula, funkcia f je zle použitá.

(b) $P\Big(f\big(x,s(x)\big)\Big)$. Je formula.



(c) $\forall x\Big(Q\big(f(x,a),b\big)\Rightarrow P\big(f(a,b)\big)\Big)$. Je formula.

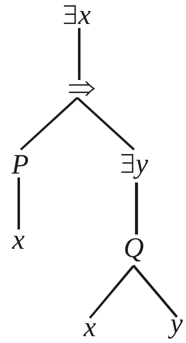


(d) $\Big(\forall x\, P\big(f(x,b)\big)\Rightarrow\Big(\exists y\, Q\big(f(y),P(y)\big)\Big)\Big)$. Nie je formula, funkcia f je zle použitá.

(e) $\Big(P(x)\wedge Q\big(f(x,y)\big)\Rightarrow\Big(\exists y\Big(P(y)\vee P\big(f(y)\big)\Big)\Big)\Big)$. Nie je formula, funkcia f je zle použitá.

(f) $\exists x\Big(P\big(Q(x,y)\big)\Rightarrow Q(a,b)\Big)$. Nie je formula, unárny predikát P obsahuje ako argument iný predikát Q, čo podľa definície nie je prípustné.

(g) $\exists x\Big(P(x)\Rightarrow\big(\exists y\, Q(x,y)\big)\Big)$. Je formula.



Cvičenie 5.4. Napíšte všetky podformuly z cvičenia 5.3.

(b) $\{P(f(x,s(x)))\}$

(c) $\{Q(f(x,a),b), P(f(a,b)), Q(f(x,a),b) \Rightarrow P(f(a,b))\}$

(g) $\{P(x), Q(x,y), \exists y\, Q(x,y), P(x) \Rightarrow (\exists y\, Q(x,y)), \exists x\, P(x) \Rightarrow (\exists y\, Q(x,y))\}$

Cvičenie 5.5. Označte všetky premenné, ktoré sú viazané a všetky premenné, ktoré sú voľné. Ak v danej formule sa vyskytujú také premenné, ktoré sú súčasne viazané a aj voľne, prepíšte formulu do takého tvaru, aby daná premenná buď bola viazaná alebo voľna. Ktoré formule sú otvorené formule a ktoré sú sentencie?

(a) $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$

x a y sú viazané premenné, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

(b) $Q(f(a,b),y) \Rightarrow (\exists y\, P(s(y)))$.

Formulu prepíšeme do tvaru $Q(f(a,b),y) \Rightarrow (\exists z\, P(s(z)))$

y je voľná premenná a z je viazaná premenná, formula nie je ani otvorená, ani sentencia.

(c) $Q(a,b) \vee (\forall x\, Q(a,x))$.

x je viazaná premenná, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

(d) $Q(x,y) \vee Q(y,x)$.

x a y sú voľné premenné, formula je otvorená.

(e) $Q(a,b) \wedge (\exists x\, \exists y\, Q(x,y))$.

x a y sú viazané premenné, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

(f) $(\forall x\, Q(a,x)) \Rightarrow (\forall x\, \exists y\, Q(y,x))$.

x, a y sú viazané premenné, formula neobsahuje voľné premenné, je sentencia.

Cvičenie 5.6. Napíšte všetky podformuly z cvičenia 5.5.

(a) $\{Q(x,y), \exists y\, Q(x,y), \forall x\, \exists y\, Q(x,y)\}$

(b) $\{Q(f(a,b),y), P(s(z)), \exists z\, P(s(z)), Q(f(a,b),y) \Rightarrow (\exists z\, P(s(z)))\}$

(c) $\{Q(a,b), Q(a,x), \forall x\, Q(a,x), Q(a,b) \vee (\forall x\, Q(a,x))\}$

(d) $\{Q(x,y), Q(y,x), Q(x,y) \vee Q(y,x)\}$

(e) $\{Q(a,b), Q(x,y), \exists y\, Q(x,y), \exists x\, \exists y\, Q(x,y), Q(a,b) \wedge (\exists x\, \exists y\, Q(x,y))\}$

(f) $\{Q(a,x), \forall x\, Q(a,x), Q(y,z), \exists y\, Q(y,z), \forall z\, \exists y\, Q(y,z), (\forall x\, Q(a,x)) \Rightarrow (\forall z\, \exists y\, Q(y,z))\}$

Cvičenie 5.7. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte túto formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.

(a) Vtáky sa rozmnožujú vajciami.

$\forall x\left(Vtak(x) \Rightarrow Mnoz\_vaj(x)\right)$

$\exists x\left(Vtak(x) \wedge \neg Mnoz\_vaj(x)\right)$

Existuje taký vták, ktorý sa nerozmnožuje vajciami.

(b) Každý športovec má dobrú fyzickú kondíciu.

$\forall x\left(sport(x) \Rightarrow fyz\_kond(x)\right)$

$\exists x\left(sport(x) \wedge \neg fyz\_kond(x)\right)$

Existuje taký športovec, ktorý nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Študenti nie vždy veľa študujú.

$\exists x\left(stud(x) \Rightarrow \neg vela\_stud(x)\right)$

$\forall x\left(stud(x) \wedge vela\_stud(x)\right)$

Každý študent veľa študuje.

(d) Žiadne schody nevedú do neba.

$\forall x\left(schody(x) \Rightarrow \neg do\_neba(x)\right)$

$\exists x\left(schody(x) \wedge do\_neba(x)\right)$

Existujú také schody, ktoré vedú do neba.

(e) Každá sa pokúša vyštudovať na vysokej škole.

$\forall x\left(zena(x) \Rightarrow pokus\_stud\_univer(x)\right)$

$\exists x\left(zena(x) \wedge \neg pokus\_stud\_univer(x)\right)$

Existuje taká, ktorá sa nepokúša vyštudovať na vysokej škole.

(f) Každé nepárne číslo je prvočíslo.

$\forall x\left(nepar\_cislo(x) \Rightarrow prvocislo(x)\right)$

$\exists x\left(nepar\_cislo(x) \wedge \neg prvocislo(x)\right)$

Existuje také nepárne číslo, ktoré nie je prvočíslo.

(g) Každý, kto navštívil Anglicko, hovorí po anglicky.

$\forall x\left(navst\_UK(x) \Rightarrow hovori\_angl(x)\right)$

$\exists x\left(navst\_UK(x) \wedge \neg hovori\_angl(x)\right)$

Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(h) Neexistuje dym bez ohňa.

$\neg\exists x\left(dym(x) \Rightarrow \neg ohen(x)\right)$

$\exists x\left(dym(x) \Rightarrow \neg ohen(x)\right)$

Existuje dym bez ohňa.

Cvičenie 5.8. Pomocou prirodzenej dedukcie a sémantických tabiel dokážte tautologičnosť formúl:

(a) $\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$

1.	$\forall x\, \varphi(x)$	(predpoklad 1.)
2.	$\varphi(t)$	(E$\forall$ na 1.)
3.	$\exists x\, \varphi(x)$	(I$\exists$ na 2.)
4.	$\exists y\, \varphi(y)$	(substitúcia *x*/*y* v 3.)
5.	$\left(\forall x\, \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\, \varphi(y)\right)$	(deaktivácia 1. na 4.)

(b) $\neg(\forall x\, \varphi(x)) \equiv (\exists x\, \neg\varphi(x))$

$\Rightarrow$

1.	$\neg(\forall x\, \varphi(x))$	(predpoklad 1.)
2.	$\neg\exists x \neg\varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$	(tautológia, cvičenie 8.2h)
3.	$\neg\neg\exists x \neg\varphi(x)$	(I$\neg$ na 2. a 1.)
4.	$\exists x\, \neg\varphi(x)$	(E$\neg$ na 3.)
5.	$\neg(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists x\, \neg\varphi(x))$	(deaktivácia 1. na 4.)

$\Leftarrow$

1.	$\exists x\, \neg\varphi(x)$	(predpoklad 1.)
2.	$\forall x\, \varphi(x)$	(predpoklad 2.)
3.	$\neg\varphi(t)$	(E$\exists$ na 1.)
4.	$\varphi(t)$	(E$\forall$ na 2.)
5.	$(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(t)$	(deaktivácia 2. na 4.)
6.	$\neg(\forall x\, \varphi(x))$	(I$\neg$ na 3. a 5.)
7.	$(\exists x\, \neg\varphi(x)) \Rightarrow \neg(\forall x\, \varphi(x))$	(deaktivácia 1. na 6.)

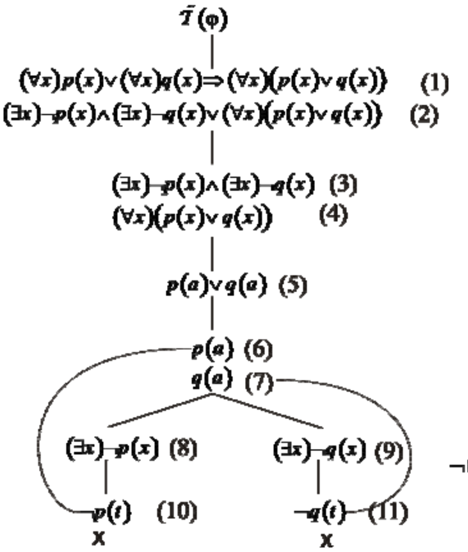
(c) $\neg(\exists x\, \varphi(x)) \equiv (\forall x\, \neg\varphi(x))$

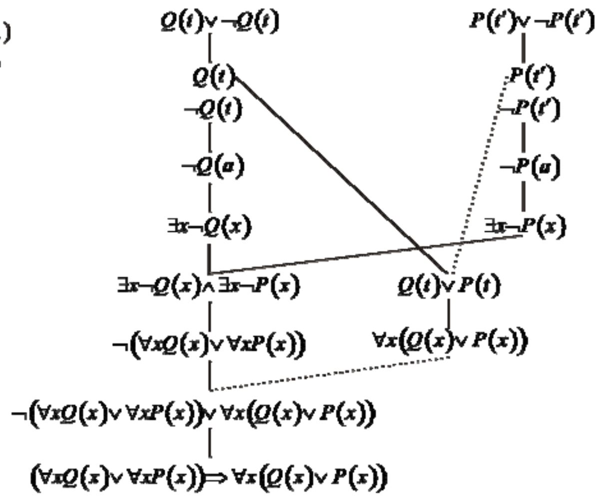
Po zavedení substitúcie $\varphi(x)/\neg\varphi(x)$ dostávame $\neg(\exists x\, \neg\varphi(x)) \equiv (\forall x\, \varphi(x))$, a po znegovaní obidvoch strán výrazu (ide o negáciu implikácie jedným aj druhým smerom, formulu zákona kontrapozície $\vdash (p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ sme dokázali v cvičení 8.2b) dostávame po prevedení implikácií na ekvivalenciu formulu $(\exists x\, \neg\varphi(x)) \equiv \neg(\forall x\, \varphi(x))$, ktorá je totožná s cvičením 8.4b, ktoré sme už vyriešili.

Cvičenie 5.9. Pomocou duálnych sémantických tabiel dokážte tautologickosť formúl a potom vykonajte pomocou inverzného table ich odvodenie pomocou prirodzenej dedukcie.

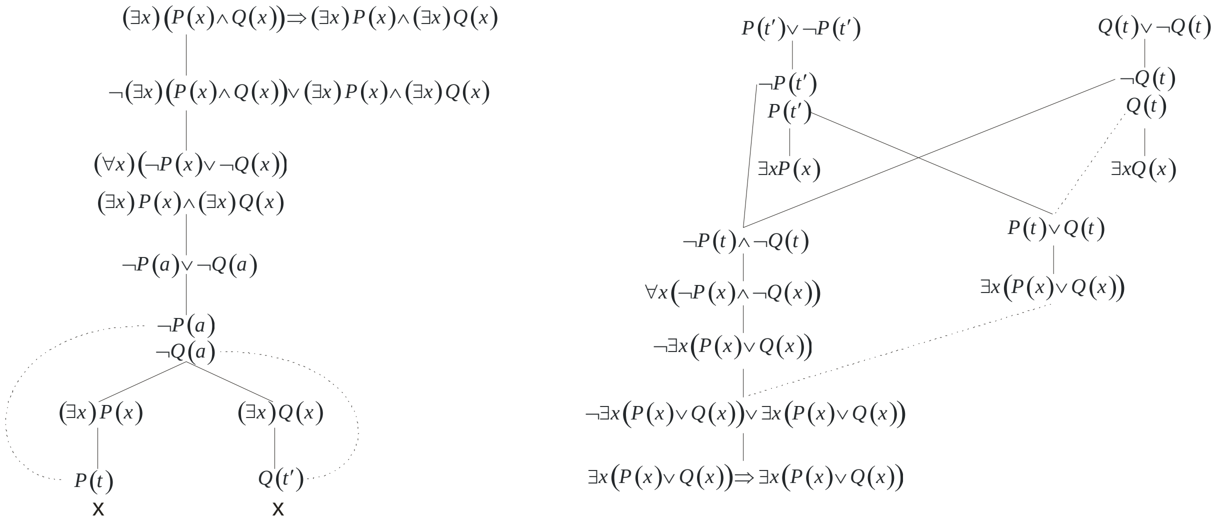
(a) $(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

Dôkaz tautologičnosti tejto formuly bol už vykonaný v príklade 5.13, obr. 5.8, preto pristúpime priamo k dôkazu tejto formuly pomocou prirodzenej dedukcie založenom na duálnom sémantickom table.

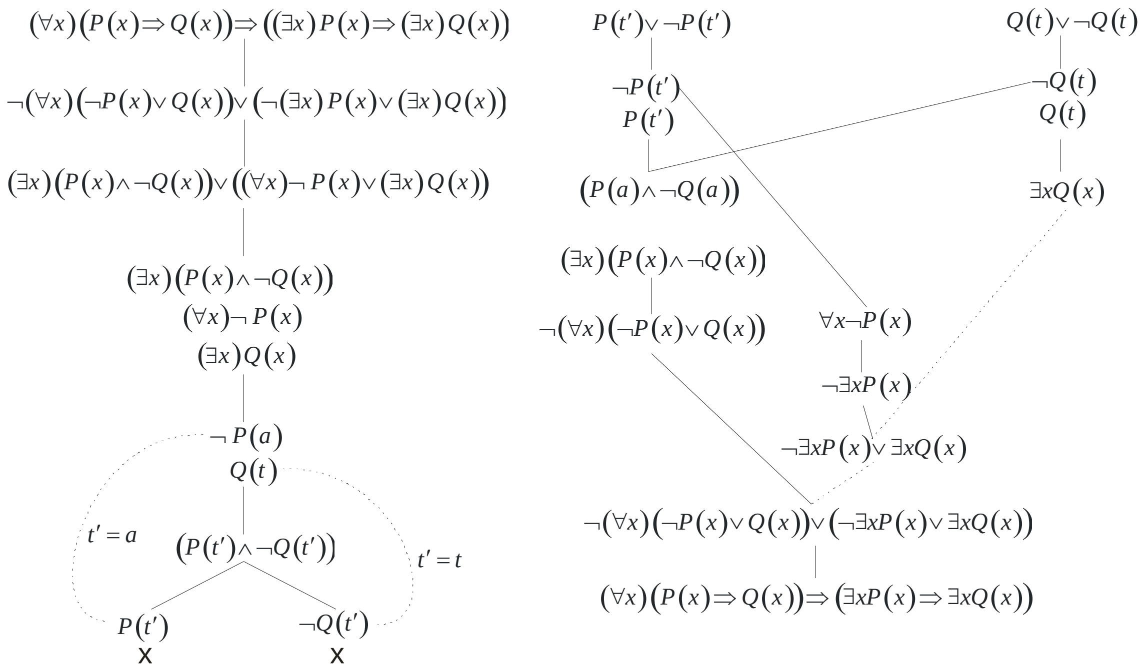




(b) $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$



(c) $(\forall x)\big(P(x)\Rightarrow Q(x)\big)\Rightarrow\big((\exists x)\,P(x)\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)\big)$



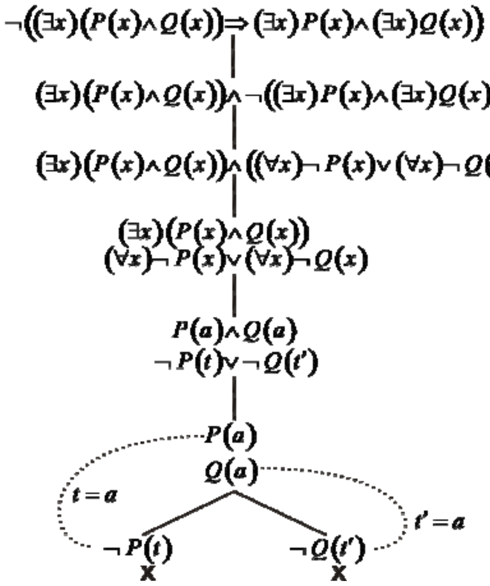
Cvičenie 5.10. Dokážte tautologičnosť týchto formúl:

(a) $(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv(\forall x)\,P(x)\wedge(\forall x)\,Q(x)$, táto formula plynie priamo z definície univerzálneho kvantifikátora (pre konjunkciu platí asociatívny a komutatívny zákon),

$$(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv\bigwedge_{x\in U}\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\equiv\bigwedge_{x\in U}P(x)\wedge\bigwedge_{x\in U}Q(x)\equiv(\forall x)\,P(x)\wedge(\forall x)\,Q(x)$$

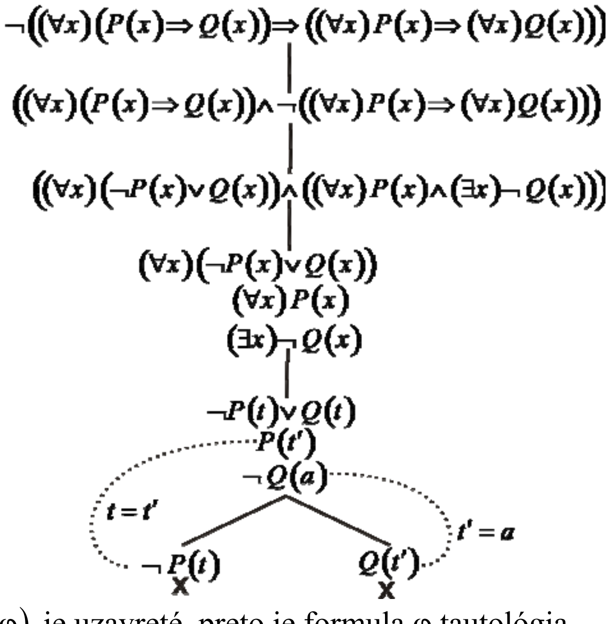
(b) $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\equiv(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$, dokáže sa úplne analogickým spôsobom ako predchádzajúca formula (konjunkcia sa nahradí disjunkciou).

(c) $\varphi = (\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x)$



Sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, preto je formula φ tautológia.

(d) $\varphi = (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\forall x)\, Q(x)\big)$



Sémantické tablo $\mathcal{T}(\neg\varphi)$ je uzavreté, preto je formula φ tautológia.