6. kapitola

Predikátová logika II – prirodzená dedukcia a sylogizmy

6.1 Metóda prirodzenej dedukcie pre predikátovú logiku

Jednoduché rozšírenie metódy prirodzenej dedukcie pre predikátovú logiku uskutočníme tak, že pôvodná prirodzená dedukcia výrokovej logiky (pozri kapitolu 4) je doplnená o ďalšie 12 introdukčné/eliminačné pravidlá univerzálneho a eliminačného kvantifikátora (a ich súčinov).

(1) *Introdukčné pravidlo pre všeobecný kvantifikátor* (I∀)

$$\left|\frac{\varphi(t)}{\forall x\, \varphi(x)}\right. \qquad (6.1a)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\varphi(t)$, ktorá je platná pre ľubovoľné indivíduum t (premenná t je voľna) , potom platí aj jej zovšeobecnenie pomocou všeobecného kvantifikátora, $\forall x\, \varphi(x)$. Toto pravidlo je založené na zákone (5.19d) $P(t) \Rightarrow ((\forall x)\, P(x))$.

(2) *Eliminačné pravidlo pre všeobecný kvantifikátor* (E∀)

$$\left|\frac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)}\right. \qquad (6.1b)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\forall x\, \varphi(x)$, potom sme odvodili aj jej konkretizáciu pre ľubovolné indivíduum t. Toto pravidlo je založené na zákone predikátovej logiky (5.19a) $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow P(t)$.

(3) *Introdukčné pravidlo pre existenčný kvantifikátor* (I∃)

$$\left|\frac{\varphi(a)}{\exists x\, \varphi(x)}\right. \qquad (6.1c)$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\varphi(a)$, kde a je indivíduová konštanta, potom sme odvodili aj jej formu s existenčným kvantifikátorom, $\exists x\, \varphi(x)$. Pravidlo je založené na zákone predikátovej logiky (5.19c) $P(a) \Rightarrow \exists x\, P(x)$. Poznamenajme, že toto pravidlo je v úzkej súvislosti s pravidlom (8.12) pre introdukciu disjunkcie.

(4) *Eliminačné pravidlo pre existenčný kvantifikátor* (E∃)

$$\begin{array}{|c} \exists x\,\varphi(x) \\ \hline \varphi(a) \end{array} \tag{6.1d}$$

Ak sme schopný odvodiť formulu $\exists x\,\varphi(x)$, potom sme schopný odvodiť aj formulu $\varphi(a)$, kde a je nejaká indivíduová konštanta. Pravidlo je založené na zákone predikátovej logiky (5.19d) $(\exists x\,P(x)) \Rightarrow P(a)$.

Tabuľka 6.1. Diagramatické pravidlá prirodzenej dedukcie s kvantifikátormi

Spojka	Eliminácia	Introdukcia
$\forall$	$\begin{array}{c}(\forall x)\,p(x)\\ \downarrow \\ p(t)\end{array}$	$\begin{array}{c}p(t)\\ \downarrow \\ (\forall x)\,p(x)\end{array}$
$\exists$	$\begin{array}{c}(\exists x)\,p(x)\\ \downarrow \\ p(a)\end{array}$	$\begin{array}{c}p(a)\\ \downarrow \\ (\exists x)\,p(x)\end{array}$

Poznámka. V predchádzajúcej kapitole 5.3 v poznámke obsahujúcej formuly (5.37) a (5.38) sme riešili pre sémantické tablá problém eliminácie univerzálneho a existenčného kvantifikátora pre konjunkciu resp. disjunkciu dvoch formúl $p(x)$ a $q(x)$, podobné pravidlá pre prirodzenú dedukciu môžeme formulovať aj pre tieto dva prípady

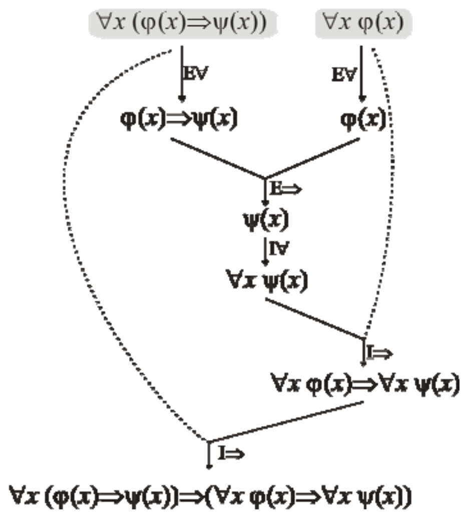
$$\begin{array}{|c} (\forall x)\big(p(x) \wedge q(x)\big) \\ \hline p(t) \wedge q(t') \end{array} \qquad \begin{array}{|c} (\exists x)\big(p(x) \vee q(x)\big) \\ \hline p(a) \vee q(a') \end{array}$$

alebo ich inverzného tvaru

$$\begin{array}{|c} p(t) \wedge q(t') \\ \hline (\forall x)\big(p(x) \wedge q(x)\big) \end{array} \qquad \begin{array}{|c} p(a) \vee q(a') \\ \hline (\exists x)\big(p(x) \vee q(x)\big) \end{array}$$

Príklad 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte formulu $\forall x\big(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x\,\varphi(x) \Rightarrow \forall x\,\psi(x)\big)$ (pozri obr. 6.2)

1.	$\forall x\big(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\big)$	(pomocný predpoklad)
2.	$\forall x\,\varphi(x)$	(pomocný predpoklad)
3.	$\varphi(t) \Rightarrow \psi(t)$	E$\forall$, 1.
4.	$\varphi(t)$	E$\forall$, 2.
5.	$\psi(t)$	E$\Rightarrow$, 3. a 4.
6.	$\forall x\,\psi(x)$	I$\forall$, 5.
7.	$\forall x\,\varphi(x) \Rightarrow \forall x\,\psi(x)$	I$\Rightarrow$, 2. a 6, deaktivácia 2.
8.	$\forall x\big(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x\,\varphi(x) \Rightarrow \forall x\,\psi(x)\big)$	I$\Rightarrow$, 1 a 7, deaktivácia 1

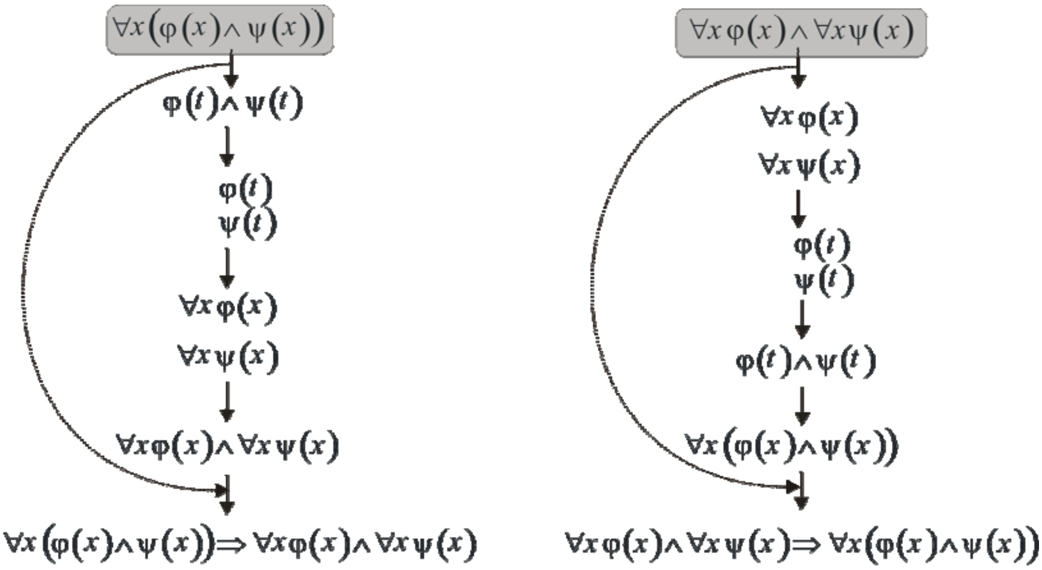


Obrázok 6.1. Diagramatická interpretácia dôkazu formule z príkladu 6.1. Vrchné vyšrafované formule sú pomocné predpoklady odvodenia, prerušované čiary reprezentujú deaktiváciu týchto predpokladov.

Príklad 6.2. Dokážte platnosť formuly $\forall x\left(\varphi(x)\wedge\psi(x)\right)\equiv\left(\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)\right)$ (pozri obr. 6.3).

$\Rightarrow$		
1.	$\forall x\left(\varphi(x)\wedge\psi(x)\right)$	(pomocný predpoklad)
2.	$\varphi(t)\wedge\psi(t)$	(E$\forall$ na 1)
3.	$\varphi(t)$	(E$\wedge$ na 2)
4.	$\psi(t)$	(E$\wedge$ na 2)
5.	$\forall x\varphi(x)$	(I$\forall$ na 3)
6.	$\forall x\psi(x)$	(I$\forall$ na 4)
7.	$\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$	(I$\wedge$ na 5 a 6)
8.	$\forall x\left(\varphi(x)\wedge\psi(x)\right)\Rightarrow\left(\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)\right)$	(deaktivácia 1)

$\Leftarrow$		
1.	$\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$	(pomocný predpoklad)
2.	$\forall x\varphi(x)$	(E$\wedge$ na 1)
3.	$\forall x\psi(x)$	(E$\wedge$ na 1)
4.	$\varphi(t)$	(E$\forall$ na 2)
5.	$\psi(t)$	(E$\forall$ na 3)
6.	$\varphi(t)\wedge\psi(t)$	(I$\wedge$ na 4 a 5)
7.	$\forall x\left(\varphi(x)\wedge\psi(x)\right)$	(I$\forall$ na 6)
8.	$\left(\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)\right)\Rightarrow\forall x\left(\varphi(x)\wedge\psi(x)\right)$	(deaktivácia 1)



Obrázok 6.2. Diagramatická interpretácia dôkazu formule z príkladu 6.2. Vrchné vyšrafované formule sú predpoklady odvodenia, prerušované čiary reprezentujú deaktiváciu pomocných predpokladov.

6.2 Sylogizmy

Sylogizmy boli vytvorené Aristotelom pred viac ako 2300 rokmi a odvtedy sú obvykle uvádzané ako neodmysliteľný základ racionality ľudského uvažovania. Aristoteles taktiež vypracoval kompletnú teóriu dôkazu, ktorá je založená na transformácii platných módov sylogizmov na platný mód prvej figúry (pozri tabuľky nižšie), ktorý pokladá za evidentne platný a pochopiteľný. Aristotelov revolučný intelektuálny počin je v súčasnosti chápaný nielen ako prvý zaznamenaný vznik logiky v histórii ľudskej civilizácie, ale taktiež ako prvý dokumentovaný výskyt premennej, čo sa v histórii vedy pokladá za jeden z najdôležitejších bodov obratu, ktorým sa grécka civilizácia odlíšila napr. od egyptskej civilizácie, ktorá ku pojmu „premennej“ nedospela. *Sylogizmy stratili svoje mimoriadne postavenie v logike až koncom 19. storočia, keď bola vytvorená predikátová logika, v rámci ktorej sú zaujímavou no nie veľmi dôležitou aplikáciou.* Musíme však poznamenať, že na filozofických a teologických univerzitných fakultách stále pretrváva v prednáškach logiky mimoriadne postavenie sylogizmov, ako jednej z hlavných súčastí logiky.

Sylogizmus obsahuje dve *premisy* - predpoklady (hlavný a vedľajší), ktoré obsahujú tri *členy* (unárne predikáty) A, B, C, pričom *prostredný člen* B sa vyskytuje v obidvoch premisách. Záver sylogizmu má rovnakú štruktúru ako premisy sylogizmu a obsahuje členy A a C. Rozlišujeme 4 možné figúry sylogizmov (pozri Tab. 6.1) , pričom premisy každej figúry majú štyri rôzne interpretácia v rámci predikátovej logiky (pozri Tab. 6.2)

Tabuľka 6.1. Štyri figúry sylogizmov

Typ premisy	1. figúra	2. figúra	3. figúra	4. figúra
Hlavná premisa	$B-A$	$A-B$	$B-A$	$A-B$
Vedľajšia premisa	$C-B$	$C-B$	$B-C$	$B-C$
Záver	$A-C$	$A-C$	$A-C$	$A-C$

Tabuľka 6.2. Interpretácia jednotlivých módov sylogizmov

#	mód	stredoveké označenie	predikátová logika
1	Všetky *A* sú *B*	*AaB*	$(\forall x)\left[A(x) \Rightarrow B(x)\right]$
2	Niektoré *A* sú *B*	*AiB*	$(\exists x)\left[A(x) \wedge B(x)\right]$
3	Žiadne *A* nie sú *B*	*AeB*	$(\forall x)\left[A(x) \Rightarrow \neg B(x)\right]$
4	Niektoré *A* nie sú *B*	*AoB*	$(\exists x)\left[A(x) \wedge \neg B(x)\right]$

V tabuľke 6.2 boli použité štyri rôzne „logické spojky" *a*, *i*, *e*, *o*. Počet všetkých možných sylogizmov je určený takto: 4 figúry × 4 módy hlavnej premisy × 4 módy vedľajšej premisy = 64, riešenia všetkých týchto sylogizmov sú uvedené v tabuľke 8.3. Riešenia označené hviezdičkou existujú vtedy, ak sa predpokladá existencia aspoň jedného indivídua *a* s vlastnosťou *B*(*a*). Samozrejme, môžeme diskutovať, či tento dodatočný predpoklad musíme uvažovať alebo nie (bol potrebný až v interpretácii sylogizmov pomocou predikátovej logiky, v starovekej a stredovekej logike bol ignorovaný).

Tabuľka 6.3. Riešenie všetkých možných sylogizmov

1. figúra				2. figúra			
1	2	3*	4	17	18	19	20
BaA *CaB* *CaA*	*BaA* *CiB* *CiA*	*BaA* *CeB* *AoC*	*BaA* *CoB* ∅	*AaB* *CaB* ∅	*AaB* *CiB* ∅	*AaB* *CeB* *AeC*	*AaB* *CoB* *CoA*
5	6	7	8	21	22	23	24
BiA *CaB* ∅	*BiA* *CiB* ∅	*BiA* *CeB* *AoC*	*BiA* *CoB* ∅	*AiB* *CaB* ∅	*AiB* *CiB* ∅	*AiB* *CeB* *AoC*	*AiB* *CoB* ∅
9	10	11	12	25	26	27	28
BeA *CaB* *CeA*	*BeA* *CiB* *CoA*	*BeA* *CeB* ∅	*BeA* *CoB* ∅	*AeB* *CaB* *CeA*	*AeB* *CiB* *CoA*	*AeB* *CeB* ∅	*AeB* *CoB* ∅
13	14	15	16	29	30	31	32
BoA *CaB* ∅	*BoA* *CiB* ∅	*BoA* *CeB* ∅	*BoA* *CoB* ∅	*AoB* *CaB* *AoC*	*AoB* *CiB* ∅	*AoB* *CeB* ∅	*AoB* *CoB* ∅

3. figúra				4. figúra			
33*	34	35*	36	49	50	51	52
BaA *BaC* *AiC*	*BaA* *BiC* *AiC*	*BaA* *BeC* *AoC*	*BaA* *BoC* *AoC*	*AaB* *BaC* *AaC*	*AaB* *BiC* ∅	*AaB* *BeC* *AeC*	*AaB* *BoC* ∅
37	38	39	40	53	54	55	56
BiA *BaC* *AiC*	*BiA* *BiC* ∅	*BiA* *BeC* *AoC*	*BiA* *BoC* ∅	*AiB* *BaC* *AiC*	*AiB* *BiC* ∅	*AiB* *BeC* *AoC*	*AiB* *BoC* ∅
41*	42	43	44	57*	58	59	60
BeA *BaC* *CoA*	*BeA* *BiC* *CoA*	*BeA* *BeC* ∅	*BeA* *BoC* ∅	*AeB* *BaC* *CoA*	*AeB* *BiC* *CoA*	*AeB* *BeC* ∅	*AeB* *BoC* ∅
45	46	47	48	61	62	63	64
BoA *BaC* *CoA*	*BoA* *BiC* ∅	*BoA* *BeC* ∅	*BoA* *BoC* ∅	*AoB* *BaC* ∅	*AoB* *BiC* ∅	*AoB* *BeC* ∅	*AoB* *BoC* ∅

Niektoré sylogizmy v porovnaní zo stredovekým prístupom zasa chýbajú, dvojice *CaA* a *CiA*, a tiež *CeA* a *CoA* boli v stredoveku vo vzťahu podriadenosti (subsumpcie). To znamená, že ak platí prvý záver, tak platí aj druhý záver. V tab. 6.3 sú uvedené vždy iba prvé možnosti, *CaA* a *CeA*, pretože v rámci predikátovej logiky sa nemôže automaticky urobiť prevod z implikácie na konjunkciu, formula $\left(\forall x\left[A(x)\Rightarrow B(x)\right]\right)\Rightarrow\left(\exists x\left[A(x)\wedge B(x)\right]\right)$ nie je zákonom predikátovej logiky. Okrem toho napr. pri schémach *CeA* a *CiA* nezáleží na poradí predikátov, takže v tab. 6.3 sa na rozdiel od klasických sylogizmov môžu *A* a *C* nachádzať v závere v opačnom poradí.

Ako ilustratívny príklad sylogizmu študujme tieto tri výroky (dve premisy a záver):

niektorí študenti sú vegetariáni
všetci vegetariáni sú včelári
―――――――――――――――
niektorí študenti sú včelári

V tomto prípade jednotlivé unárne predikáty *A*, *B* a *C* stotožníme s vlastnosťami „študent“, „vegetarián“ resp. „včelár“, potom jednotlivé výroky môžeme prepísať do formy

$$\begin{array}{c} AiB \\ \underline{BaC} \\ AiC \end{array} \quad \text{alebo} \quad \begin{array}{c} (\exists x)\left[A(x)\wedge B(x)\right] \\ \underline{(\forall x)\left[B(x)\Rightarrow C(x)\right]} \\ (\exists x)\left[A(x)\wedge C(x)\right] \end{array}$$

Schému, ktorá obsahuje tak dve premisy, ako aj záver (ktorý má rovnaký formálny tvar ako premisy), budeme označovať ako úplný sylogizmus, ich celkový počet je 64 × 4 módy záveru = 256 úplných sylogizmov.

Hlavným problémom klasickej teórie sylogizmov je navrhnúť metódu na rýchle zistenie, ktoré z týchto úplných sylogizmov sú pravdivé (platné) a ktoré nepravdivé (neplatné). Aristoteles nemal problémy s dôkazom toho, že nejaký sylogizmus je neplatný. Bol asi prvý, ktorý si uvedomil skutočnosť, že ak je sylogizmus platný, potom táto platnosť nemôže byť závislá na interpretácii jeho jednotlivých členov. Pre neplatné sylogizmi vždy sa mu podarilo nájsť takú interpretáciu členov *A*, *B*, *C*, že neplatnosť sylogizmu pre danú interpretáciu bola očividne zrejmá. Avšak tento prístup pre dôkaz platnosti daného sylogizmu je nepoužiteľný. Aristoteles sa snažil v tomto prípade previesť študovaný sylogizmus na základný typ (*AaB*)(*BaC*)/(*AaC*), ktorého platnosť považoval za očividnú. V tomto bode môžeme z dnešného pohľadu existencie rozvinutej predikátovej logiky, charakterizovať Aristotelov prístup za veľmi ťažkopádny ba až neúplný. Aristoteles skúmal len prvú, druhú a tretiu figúru, zrejme už vedel, že štvrtá figúra poskytuje sylogizmy, ktoré sú ekvivalentné sylogizmom prvej figúry. Táto štvrtá figúra sylogmizmu bola kompletne preskúmaná rímskym lekárom a logikom Galénom v 1. storočí (Galénus si asi neuvedomil ekvivalentnosť sylogizmov medzi 1. a 4. figúrou, kde stačí prehodiť 1. premisu s 2. premisou a člen *A* s *C*).

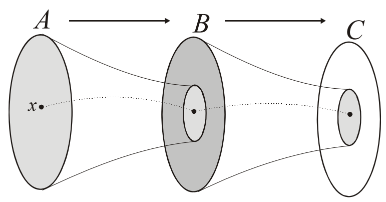
Príklad 6.5. Študujme sylogizmus s platným záverom (platnosť tohto sylogizmu pokladal Aristotels za evidentnú) (pozri obr. 8.1)

$$\frac{\begin{array}{c} AaB \\ BaC \end{array}}{AaC} \tag{6.11}$$

Jeho predikátová forma má tvar

$$\frac{\begin{array}{c} \forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right) \\ \forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right) \end{array}}{\forall x\left(A(x)\Rightarrow C(x)\right)} \tag{6.12}$$

Dôkaz platnosti tohto sylogizmu v rámci predikátovej logiky je pomerne jednoduchý, je založený na zákone tranzitívnosti implikácie (alebo podľa stredovekej terminológii, zákona hypotetického sylogizmu), $(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left((r\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\right)$. Z premís sylogizmu vyplýva, že pre ľubovolnú indivíduovú konštantu *t* súčasne platí $A(t)\Rightarrow B(t)$ a $B(t)\Rightarrow C(t)$. Pomocou pravidla *tranzitívnosti implikácie* (hypotetického sylogizmu) dostaneme implikáciu $A(t)\Rightarrow C(t)$, ktorá je pravdivá pre každú konštantu *t*, čiže platí aj je kvantifikovaná forma $\forall x\left(A(x)\Rightarrow C(x)\right)$, čo bolo potrebné dokázať.



Obrázok 6.3. Grafické znázornenie 1. premisy, 2. premisy a záveru. Prvá premisa $\forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right)$ grafický znázorníme ako zobrazenie množiny *A* (obsahujúca indivídua majúce vlastnosť *A*(*x*)) do podmnožiny množiny *B* (obsahujúca indivídua majúce vlastnosť *B*(*x*)), podobne môžeme zobraziť aj druhú premisu. Z obrázku vyplýva, že každé indivíduum majúce vlastnosť *A*(*x*) má taktiež aj vlastnosť *C*(*x*), čiže platí záver $\forall x\left(A(x)\Rightarrow C(x)\right)$. Z obrázku taktiež vyplýva aj platnosť záveru, že existuje také indivíduum *x*, ktoré ak má vlastnosť *C*(*x*), potom má vlastnosť *A*(*x*), $\exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right)$.

V texte k obr. 6.3 je uvedené, že existuje aj druhý alternatívny záver z predpokladov tohto sylogizmu, že existuje také indivíduum *x*, ktoré ak má vlastnosť *C*(*x*), potom má vlastnosť *A*(*x*), $\exists x\left(C(x)\wedge A(x)\right)$. Budeme teraz pomocou predikátovej logiky skúmať za akých podmienok je tento záver platný.

$$\begin{array}{c} \forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right) \\ \underline{\forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)} \\ \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right) \end{array} \tag{6.13}$$

Predpokladajme, že existuje také indivíduum b, pre ktoré platí $A(b)$. Z prvých dvoch premís sylogizmu taktiež dostaneme $A(b)\Rightarrow B(b)$ a $B(b)\Rightarrow C(b)$. Dvojnásobným použitím pravidla modus ponens z týchto troch predpokladov dostaneme $C(b)$, spojením tohto záveru s prvým predpokladom $A(b)$ dostaneme ich konjunkciu $A(b)\wedge B(b)$, čiže platí aj $\exists x\, A(x)\wedge B(x)$. To znamená, že alternatívne riešenie (6.13) je platné len ak predpokladáme existenciu $A(b)$, potom (6.13) musíme zmodifikovať takto

$$\begin{array}{c} A(b) \\ \forall x\left(A(x)\Rightarrow B(x)\right) \\ \underline{\forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)} \\ \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right) \end{array} \tag{6.14}$$

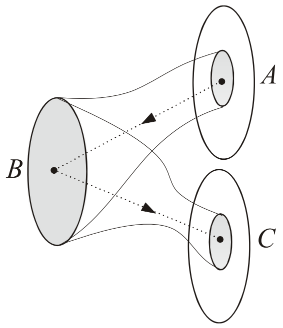
Príklad 6.6. Ako ďalší ilustratívny príklad uvažujme sylogizmus, ktorý zohral veľkú úlohu pri objasňovaní vzájomného vzťahu klasickej teórie sylogizmov a modernej predikátovej logiky

$$\begin{array}{c} BaA \\ \underline{BaC} \\ AiC \end{array} \tag{6.15}$$

Použitím predikátovej logiky ukážeme, že tento sylogizmus nie je vo všeobecnosti platný, musíme zaviesť ešte okrem dvoch premís ďalší predpoklad, aby sa stal platným. Predikátová reprezentácia tohto sylogizmu má tvar (pozri obr. 6.10)

$$\begin{array}{c} \varphi_1 : \forall x\left(B(x)\Rightarrow A(x)\right) \\ \underline{\varphi_2 : \forall x\left(B(x)\Rightarrow C(x)\right)} \\ \psi : \exists x\left(A(x)\wedge C(x)\right) \end{array} \tag{6.16}$$

K jednoduchému zisteniu, či je sylogizmus splnený alebo nie, uvažujme túto interpretáciu $\mathcal{I}$: univerzum $\mathcal{U}$ je množina indivíduí, predikát $B(x)$ znamená, že indivíduum x je auto, predikát $A(x)$ znamená, že indivíduum x má volant a predikát $C(x)$ znamená, že indivíduum x má kolesá. Premisy študovaného sylogizmu v rámci použitej interpretácie môžeme teda interpretovať tak, že prvá premisa je „každé auto má volant“ a druhá premisa je „každé auto má koleso“. Uvedený záver v (6.4b) predpokladá, že existujú indivíduá, ktoré majú súčasne volant a kolesá. Avšak tento záver vo všeobecnosti nevyplýva z premís sylogizmu. To znamená, že v rámci tejto konkrétnej interpretácia $\mathcal{I}$ sylogizmus (6.4) uvedený záver nie je korektný. Avšak ak postulujeme existenciu indivídua, ktoré je auto, potom na základe premís sylogizmu automatický vyplýva, že existuje také indivíduum, ktoré má súčasne tak volanty ako aj kolesá, t.j. záver (6.4b) správny.



Obrázok 6.4. Diagramatické znázornenie sylogizmu (6.15). Existencia indivíduií, ktoré majú súčasne vlastnosti *A* a *C* vyžaduje existenciu aspoň jedného indivídua s vlastnosťou *B* (pozri orientovanú prerušovaná čiaru idúcu z *A* do *C* cez *B*).

Ak rozšírime sylogizmus o 0. premisu $B(a)$ (t.j. existuje aspoň jedno indivíduum, ktoré má vlastnosť *B*)

$$\begin{array}{l} \varphi_0 : B(a) \\ \varphi_1 : \forall x\left(B(x) \Rightarrow A(x)\right) \Rightarrow \left(B(a) \Rightarrow A(a)\right) \\ \underline{\varphi_2 : \forall x\left(B(x) \Rightarrow C(x)\right) \Rightarrow \left(B(a) \Rightarrow C(a)\right)} \\ A(a) \\ C(a) \\ A(a) \wedge C(a) \\ \psi : \exists x\left(A(x) \wedge C(x)\right) \end{array} \qquad (6.17)$$

Týmto jednoduchým rozšírením predpokladov sme dosiahli, že záver $\psi = \exists x\left(A(x) \wedge C(x)\right)$ je korektný.

Poznámka: Schému usudzovania (6.17) môžeme riešiť alternatívne aj tak, že prvý predpoklad chápeme ako pomocný predpoklad, potom

$$\begin{array}{l} \varphi_0 : B(t) \\ \varphi_1 : \forall x\left(B(x) \Rightarrow A(x)\right) \Rightarrow \left(B(t) \Rightarrow A(t)\right) \\ \underline{\varphi_2 : \forall x\left(B(x) \Rightarrow C(x)\right) \Rightarrow \left(B(t) \Rightarrow C(t)\right)} \\ A(t) \\ C(t) \\ A(t) \wedge C(t) \\ B(t) \Rightarrow A(t) \wedge C(t) \\ \psi : \forall x\left(B(x) \Rightarrow A(x) \wedge C(x)\right) \end{array}$$

Záver môžeme v prirodzenom jazyku formulovať „každé *B* je *A* a *C*“.

Príklad 6.7. Tento príklad obsahuje sylogizmus s jedným záporom

$$\begin{array}{c} BaA \\ \underline{CeB} \\ AoC \end{array} \qquad (6.18)$$

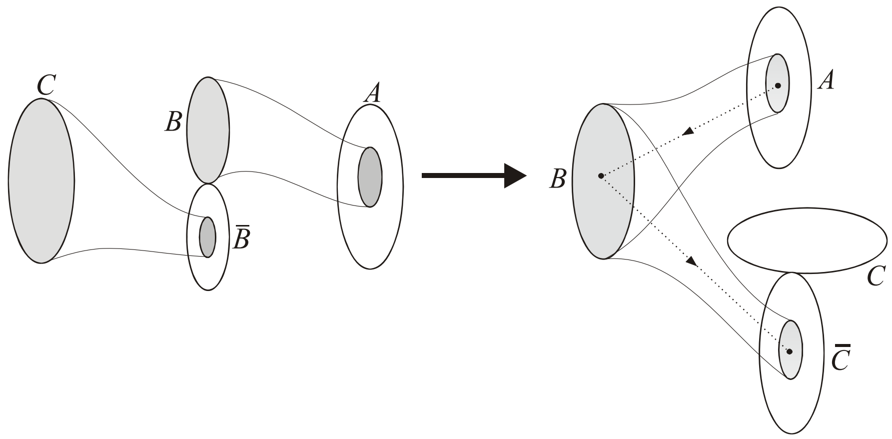
alebo v reprezentácii predikátovej logiky

$$\begin{array}{l}\varphi_1: \forall x\left(B(x) \Rightarrow A(x)\right) \\ \underline{\varphi_2: \forall x\left(C(x) \Rightarrow \neg B(x)\right)} \\ \psi: \exists x\left(A(x) \wedge \neg C(x)\right)\end{array} \qquad (6.19)$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, aj tento sylogizmus je z pohľadu predikátovej logiky neplatný. Aj v tomto prípade, je nutné postulovať naviac existenciu jedného indivíduum a s vlastnosťou $B(a)$, potom sa stáva tento sylogizmus platným. Pre väčšiu názornosť našich úvah prepíšeme druhú premisu sylogizmu (6.6b) pomocou zákona kontrapozície výrokovej logiky $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ do ekvivalentného tvaru

$$\begin{array}{l}\varphi_1: \forall x\left(B(x) \Rightarrow A(x)\right) \\ \underline{\varphi_2': \forall x\left(B(x) \Rightarrow \neg C(x)\right)} \\ \psi: \exists x\left(A(x) \wedge \neg C(x)\right)\end{array} \qquad (6.20)$$

Diagramatická reprezentácia sylogizmov ekvivalentných (6.6) a (6.7) je znázornená na obr. 6.6, kde z pravej schémy bezprostredne vyplýva záver sylogizmu, že existuje také indivídium *a*, ktoré spĺňa vlastnosť *A*(*a*) a nespĺňa vlastnosť *C*(*a*). Avšak tento záver platí len vtedy, ak existuje aspoň jedno indivíduum, ktoré má vlastnosť *B*(*a*).



Obrázok 6.5. Grafické znázornenie ekvivalentných sylogizmov (6.6b) a (6.7). Pomocou pravého diagramu môžeme konštatovať, že sylogizmus je platný (záver: existuje taký objekt s vlastnosťou *A*, ktorý nemá vlastnosť *C*), ak existuje aspoň jedno indivíduum *a*, pre ktoré platí *B*(*a*).

Dôkaz správnosti usudzovania (6.7) vykonáme tak, že predpoklady rozšírime o 0. premisu

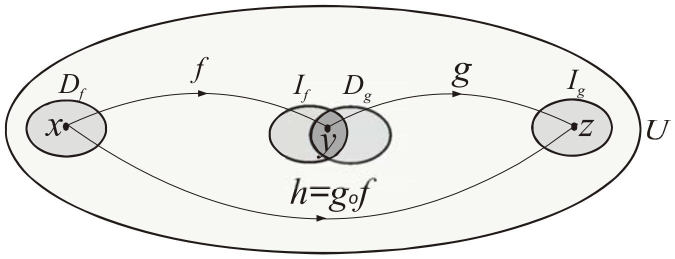
$$\begin{array}{l}\varphi_0: B(a) \\ \varphi_1: \forall x\left(B(x) \Rightarrow A(x)\right) \\ \underline{\varphi_2': \forall x\left(B(x) \Rightarrow \neg C(x)\right)} \\ \psi: \exists x\left(A(x) \wedge \neg C(x)\right)\end{array} \qquad (6.21)$$

ktorého záver je ľahko verifikovateľný, čiže rozšírený sylogizmus (6.8) je korektný.

Poznámka. Podobne ako v príklade 6.6, alternatívny prístup k riešeniu tohto sylogizmu je tento

$$
\begin{array}{l}
\varphi_1 : \forall x \left(B(x) \Rightarrow A(x) \right) \\
\underline{\varphi_2' : \forall x \left(B(x) \Rightarrow \neg C(x) \right)} \\
\left(B(t) \Rightarrow A(t) \right) \\
\left(B(t) \Rightarrow \neg C(t) \right) \\
B(t) \Rightarrow A(t) \wedge \neg C(t) \\
\psi : \forall x \left(B(x) \Rightarrow A(x) \wedge \neg C(x) \right)
\end{array}
$$

Záver môžeme teda vyjadriť v prirodzenom jazyku ´každé B je A a non C´

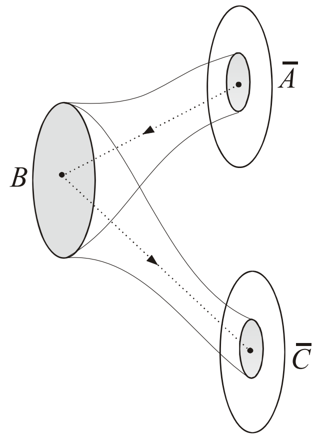


Obrázok 6.6. Schematické znázornenie dvoch zobrazení f a g, z ktorých kompozíciou vznikne zložené zobrazenie $h = g \circ f$, pričom definičné obory a obory hodnôt týchto funkcií patria do univerzálnej množiny U. Z tejto schémy jasne plynie, že zložené zobrazenie existuje len vtedy a len vtedy, ak prienik oboru funkčných hodnôt zobrazenie f a definičného oboru zobrazenia g je neprázdny, $I_f \cap D_g \neq \emptyset$.

Pokúsme sa zovšeobecniť naše pozorovania o sylogizmoch, ktoré sme získali pomocou troch ilustračných príkladov. Interpretácia Aristotelovských sylogizmov môže byť chápaná ako konštrukcia všeobecnejšieho zobrazenia pomocou kompozície dvoch partikulárnych zobrazení (pozri obr. 6.6). Na tomto obrázku máme znázornené tri množiny A, B, C, dve zobrazenia $f : D_f \to I_f$ a $g : D_g \to I_g$, existencia zloženého zobrazenia $h : D_h \to I_h$ (ktoré vznikne zložením – kompozíciou zobrazení f a g) je určená podmienkou, že obor funkčných hodnôt zobrazenia f a definičný obor zobrazenia g majú neprázdny prekryv $I_f \cap D_g \neq \emptyset$, ak táto podmienka nie je splnená, potom zložené zobrazenie neexistuje. Zobrazenia môžeme vyjadriť v rámci predikátovej logiky takto:

$$
\begin{array}{l}
\varphi_0 : \exists y \in U \left(y \in I_f \wedge y \in D_g \right) \\
\varphi_1 : \forall x \in U \left(x \in D_f \Rightarrow f(x) \in I_f \right) \\
\underline{\varphi_2 : \forall y \in U \left(y \in D_g \Rightarrow g(y) \in I_g \right)} \\
\psi \ : \exists x \in U \left(x \in D_f \wedge g\left[f(x) \right] \in I_g \right)
\end{array}
\tag{6.22}
$$

Ako už bolo ukázané v predchádzajúcich ilustračných príkladov, zo samotných premís φ_1 a φ_2 nevyplýva záver ψ, k jeho dôkazu potrebujeme ešte premisu φ_0, ktorá vyjadruje podmienku, že množiny I_f a D_g majú neprázdny spoločný prienik, $I_f \cap D_g \neq \emptyset$. Čo môže byť pre niekoho trochu zavádzajúce, formula $\exists x \in U \left(x \in D_f \wedge g\left[f(x) \right] \in I_g \right)$ neobsahuje explicitne tieto množiny, sú však implicitne obsiahnuté v definícii zloženej funkcie $z = h(x) = g\left[f(x) \right]$.



Obrázok 6.7. Znázornenie sylogizmu z príkladu 6.8. Množina indivíduí s vlastnosťou *B* je zobrazovaná na množiny indivíduí, ktoré nemajú vlastnosť *A* a *C*. Potom môžeme predpokladať existenciu takých indivíduí, ktoré nemajú ani vlastnosť *A* a ani *C*.

Príklad 6.8. Študujme sylogizmus, ktorý obsahuje dva zápory (pozri tabuľku 6.3, sylogizmus 59 zo štvrtej figúry)

$$\frac{\begin{array}{c} BeA \\ BeC \end{array}}{?}$$

Našou snahou bude zistiť, či tento sylogizmus má, alebo nemá riešenie (pripomeňme, že tabuľke 6.3 je uvedené, že nemá riešenie). Ukážeme, že aj tento sylogizmus má riešenie, ktoré sa vymyká klasickému prístupu k riešenie sylogizmov, vyžaduje zaviesť nový mód sylogizmu. Bude označený symbolom *u* s touto „exotickou“ interpretáciou

$$AuC \leftrightarrow \exists x\left[\neg A(x) \wedge \neg C(x)\right]$$

Študovaný sylogizmus prepíšeme do štandardnej kvantifikátorovej formy

$$\frac{\begin{array}{c} \forall x\left[B(x) \Rightarrow \neg A(x)\right] \\ \forall x\left[B(x) \Rightarrow \neg C(x)\right] \end{array}}{\exists x\left[\neg A(x) \wedge \neg C(x)\right]} \tag{6.23}$$

Predpokladajme, že existuje také indivíduum *a*, že predikát *B*(*a*) je pravdivý, potom môžeme zostrojiť tento dôkaz

1.	$B(a)$	(1. predpoklad)
2.	$B(x) \Rightarrow \neg A(x)$	(2. predpoklad)
3.	$B(x) \Rightarrow \neg C(x)$	(3. Predpoklad)
4.	$\neg A(a)$	(modus ponens aplik. na 1 a 2)
5.	$\neg C(a)$	(modus ponens aplik. na 1 a 3)
6.	$\neg A(a) \vee \neg C(a)$	(introduk. konjunk. aplik.na 4 a 5)
7.	$\exists x\left[\neg A(x) \wedge \neg C(x)\right]$	(introduk. $\exists$ aplik. na 6)

To znamená, že študovaný sylogizmus môžeme písať v tvare

$$\begin{array}{c} BeA \\ \underline{BeC} \\ AuC \end{array}$$

pričom riešenie je platné len ak predpokladáme existenciu aspoň jedného indivídua *a,* pre ktoré platí $B(a)$.

Poznámka. Alternatívny prístup k riešeniu tohto sylogizmu je

$$\begin{array}{r|l}
1. & \forall x\left(B(x)\Rightarrow\neg A(x)\right)\ \text{(1. predpoklad)} \\
2. & \forall x\left(B(x)\Rightarrow\neg C(x)\right)\ \text{(2. predpoklad)} \\
\hline
3. & B(t)\Rightarrow\neg A(t) \\
4. & B(t)\Rightarrow\neg C(t) \\
5. & B(t)\Rightarrow\neg A(t)\wedge\neg C(t) \\
6. & \left(A(t)\vee C(t)\right)\Rightarrow\neg B(t) \\
7. & \forall x\left(\left(A(x)\vee C(x)\right)\Rightarrow\neg B(x)\right)
\end{array}$$

Výsledok v prirodzenom jazyku môžeme vyjadriť ´každé *A* alebo *C* nie je *B*´.

Cvičenie

Cičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte formule:

(a) $\left(\forall x\ \varphi(x)\right)\Rightarrow\left(\exists y\ \varphi(y)\right)$

(b) $\neg\left(\forall x\ \varphi(x)\right)\equiv\left(\exists x\ \neg\varphi(x)\right)$

(c) $\neg\left(\exists x\ \varphi(x)\right)\equiv\left(\forall x\ \neg\varphi(x)\right)$

(d) $\left(\forall x\ \varphi(x)\right)\Rightarrow\varphi(t)$

(e) $\varphi(a)\Rightarrow\left(\exists y\ \varphi(y)\right)$

Cvičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte formuly (5.25)

Cvičenie 6.3. Riešte tieto sylogizmy:

(a)

Každý študent je maturant

Každý maturant nie je analfabet

?

(b)

niektorí študenti sú kominári

niektorí kominári sú maturanti

?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

(d)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

(e)
niektorí fyzici sú astronómovia
niektorí astrológovia sú astronómovia

?

Cvičenie 6.4. Použitím prirodzenej dedukcie riešenie sylogizmov z tabuľky 6.3.

Literatúra

[1] Bendová, K.:*Sylogistika*. Karolinum, Praha, 1998.

[2] Gahér, F.: *Logika pre každého*. IRIS, Bratislava 1998

[3] Kvasnička V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2006.

[4] Prawitz, D.: *Natural Deduction*. Almquist & Wiksell, Stockholm, 19??.

[5] Sousedík, P.: *Logika pro studenty humanitních oborů*. Vyšehrad, Praha 2001

[6] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.