Riešenie cvičení z 6. kapitoly

Cičenie 6.1. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:
(a) $\left(\forall x\ \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\ \varphi(y)\right)$

1.	$\forall x\ \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t)$	E$\forall$ na 1.
3.	$\varphi(a)$	substitúcia premennej $a = t$
4.	$\exists x\ \varphi(x)$	I$\exists$ na 3.
Ť.	$\left(\forall x\ \varphi(x)\right) \Rightarrow \left(\exists y\ \varphi(y)\right)$	deaktivácia pomocného predpokladu

(b) $\neg\left(\forall x\ \varphi(x)\right) \equiv \left(\exists x\ \neg\varphi(x)\right)$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\forall x\ \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$	I$\forall$.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus tollens na 1. a 2.
4.	$\neg\varphi(a)$	substitúcia premennej t = a
5.	$\exists x \neg\varphi(x)$	I$\exists$
6.	$\neg\forall x\ \varphi(x) \Rightarrow \exists x \neg\varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

$\Leftarrow$

1.	$\exists x\ \neg\varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\exists x\ \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\varphi(a)$	E$\exists$
3.	$\neg\varphi(a)$	modus ponens na 1. a 2.
4.	$\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)$	E$\forall$
5.	$\neg\forall x \varphi(x)$	modus tollens na 3. a 4.
6.	$\exists x\ \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

(c) $\neg\left(\exists x\ \varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\ \neg\varphi(x)\right)$

$\Rightarrow$

1.	$\neg\exists x\ \varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\varphi(t) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$	I$\exists$.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus tollens na 1. a 2.
4.	$\forall x \neg\varphi(x)$	I$\exists$
5.	$\neg\exists x\ \varphi(x) \Rightarrow \forall x \neg\ \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

$\Rightarrow$

1.	$\forall x\, \neg\varphi(x)$	aktivácia pomocného predpokladu
2.	$\forall x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\varphi(t)$	E$\forall$.
3.	$\neg\varphi(t)$	modus polens na 1. a 2.
4.	$\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$	I$\exists$
5.	$\neg\exists x\, \varphi(x)$	modus tollens na 3. a 4.
6.	$\forall x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\exists x\, \varphi(x)$	deaktivácia pomocného predpokladu

Poznámka: Formulu (c) možno aj priamo odvodiť z formuly (b) vhodnou substitúciou.

(d) $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(t)$

Táto formula priamo vyplýva z definície univerzálneho kvantifikátora a z tautológie $p \wedge q \Rightarrow p$

(e) $\varphi(a) \Rightarrow (\exists y\, \varphi(y))$

Táto formula priamo vyplýva z definície existenčného kvantifikátora a z tautológe $p \wedge q \Rightarrow p$

Cvičenie 6.2. Pomocou prirodzenej dedukcie odvodte distributívne zákony formuly kvantifikátorov (5.25)

(a) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$

$\Rightarrow$

1. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(t) \wedge Q(t)$ E$\forall$ na 1.
3. $P(t)$ E$\wedge$ na 2.
4. $Q(t)$ E$\wedge$ na 2.
5. $(\forall x)\, P(x)$ I$\forall$ na 3.
6. $(\forall x)\, Q(x)$ I$\forall$ na 4.
7. $(\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$ I$\wedge$ na 5. a 6.
8. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$ deakt. pomoc. predpokladu 1.

$\Leftarrow$

1. $(\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $(\forall x)\, P(x)$ E$\wedge$ na 1.
3. $(\forall x)\, Q(x)$ E$\wedge$ na 1.
4. $P(t)$ E$\forall$ na 2.
5. $Q(t)$ E$\forall$ na 3.
6. $P(t) \wedge Q(t)$ I$\wedge$ na 4. a 5.
7. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ I$\forall$ na 6.
8. $(\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ deakt. pomoc. predpokladu 1.

(b) $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)\Rightarrow(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$

1. $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)$ akt. pomoc. predpokladu

2. $(\forall x)\,P(x)$		2. $(\forall x)\,Q(x)$	E$\vee$
3. $P(t)$		3. $Q(t)$	E$\forall$
4. $P(t)\vee Q(t)$	I$\vee$		
5. $\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big)$	I$\forall$		

6. $(\forall x)\,P(x)\vee(\forall x)\,Q(x)\Rightarrow(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ deakt. pomoc. predpokladu

(c) $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\equiv(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$

$\Rightarrow$

1. $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(a)\vee Q(a)$ E$\exists$

3. $P(a)$	3. $Q(a)$
4. $(\exists x)\,P(x)$	4. $(\exists x)\,Q(x)$

5. $(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$
6. $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$

$\Leftarrow$

1. $(\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)$ akt. pomoc. predpokladu

2. $(\exists x)\,P(x)$	2. $(\exists x)\,Q(x)$
3. $P(a)$	2. $Q(b)$

4. $P(a)\vee Q(b)\Rightarrow\big(P(a)\vee Q(a)\big)\vee\big(P(b)\vee Q(b)\big)$
5. $(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$
6. $\big((\exists x)\,P(x)\vee(\exists x)\,Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$ deakt. pomoc. predpokladu

(d) $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$

1. $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(a)\wedge Q(a)$
3. $P(a)$
4. $Q(a)$
5. $(\exists x)\,P(x)$
6. $(\exists x)\,Q(x)$
7. $(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$
8. $(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,Q(x)$ deakt. pomoc. predpokladu

(e) $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\forall x)\,P(x)\Rightarrow(\forall x)\,Q(x)\right)$

1. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(t)\Rightarrow Q(t)\equiv\left(\neg P(t)\vee Q(t)\right)$
3. $\neg P(t)$ 3. $Q(t)$
4. $\exists x\neg P(x)\equiv\neg\forall xP(x)$ 4. $(\forall x)\,Q$
5. $\neg\forall xP(x)\vee(\forall x)\,Q$
6. $(\forall x)\,P(x)\Rightarrow(\forall x)\,Q(x)$
7. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\forall x)\,P(x)\Rightarrow(\forall x)\,Q(x)\right)$

(f) $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\exists x)\,P(x)\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)\right)$

1. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)$ akt. pomoc. predpokladu
2. $P(t)\Rightarrow Q(t)\equiv\left(\neg P(t)\vee Q(t)\right)$
3. $\neg P(t)$ 3. $Q(t)$
4. $\forall x\neg P(x)\equiv\neg\exists xP(x)$ 4. $(\exists x)\,Q$
5. $\neg\exists xP(x)\vee(\exists x)\,Q(x)\equiv\exists xP(x)\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)$
6. $(\forall x)\left(P(x)\Rightarrow Q(x)\right)\Rightarrow\left((\exists x)\,P(x)\Rightarrow(\exists x)\,Q(x)\right)$ deakt. pomoc. predpokladu

Cvičenie 6.3. Riešte tieto sylogizmy:
(a)
Každý študent je maturant
Každý maturant nie je analfabet

?
$\varphi_1: \forall x\left(st(x)\Rightarrow mat(x)\right)\Rightarrow\left(st(t)\Rightarrow mat(t)\right)$
$\varphi_2: \forall x\left(mat(x)\Rightarrow\neg analf(x)\right)\Rightarrow\left(mat(t)\Rightarrow\neg analf(t)\right)$
použitím hypotetického sylogizmu $(p\Rightarrow q)\Rightarrow\left((q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)\right)$
dostaneme
$\left(st(t)\Rightarrow\neg analf(t)\right)$ pre ľubovoľné indivíduum *t*, čiže platí aj

$\boxed{\forall x\left(st(x)\Rightarrow\neg analf(x)\right)}$

Záver zo sylogizmu je: „každý študent nie je analfabet“.

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti

?
$\varphi_1: \exists x\left(st(x)\wedge kom(x)\right)\Rightarrow\left(st(a)\wedge kom(a)\right)$
$\varphi_2: \exists x\left(kom(x)\wedge mat(x)\right)\Rightarrow\left(kom(b)\wedge mat(b)\right)$
Vo všeobecnosti platí $a\neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$\varphi_1: \forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a)\right)$

$\varphi_2: \exists x\left(analf(x) \wedge vce(x)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge vce(a)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} analf(a) \\ vce(a) \end{array}\right\} eliminácia\ pravej\ strany\ \varphi_2$$

$\neg st(a)$

$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \boxed{\exists x\left(vce(x) \wedge \neg st(x)\right)}$

Záver zo sylogizmu je (za predpokladu, že existuje analfabet): „niektorý včelár nie je študent".

(d)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$

$\varphi_2: \forall x\left(chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a)\right)$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí $fyz(a)$ a $astr(a)$. Použitím $fyz(a)$ a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg chem(a)$. To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$\boxed{astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\ astr(x) \wedge \neg chem(x)}$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú chemici".

(e)
niektorí fyzici sú astronómovia
niektorí astrológovia sú astronómovia

?

$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$

$\varphi_2: \exists x\left(astrolog(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(astrolog(b) \wedge astr(b)\right)$

Sylogizmus nemá platný záver.

Cvičenie 6.4. Nájdite riešenie týchto sylogizmov:

(a) $\dfrac{\begin{array}{c} A\ a\ B \\ B\ e\ C \end{array}}{?}$, prepíšeme do tvaru predikátovej logiky

$\forall x\left(A(x) \Rightarrow B(x)\right)$
$\forall x\left(B(x) \Rightarrow \neg C(x)\right)$

Riešenie nájdeme prirodzenou dedukciou

1. $\forall x\left(A(x) \Rightarrow B(x)\right)$
2. $\forall x\left(B(x) \Rightarrow \neg C(x)\right)$

---

3. $A(t) \Rightarrow B(t)$................$E\forall\ v\,1$
4. $B(t) \Rightarrow \neg C(t)$.............$E\forall\ v\,2$
5. $A(t) \Rightarrow \neg C(t)$.............*aplikácia hypotet. sylogizmu na* 3 *a* 4
6. $\forall x\left(A(x) \Rightarrow \neg C(x)\right)$.....$I\forall\ v\,5$
7. $A\ e\ C$.............................*prepis do formy sylogizmu*

Potom riešený sylogizmus má tvar $\dfrac{\begin{matrix} A\ a\ B \\ B\ e\ C \end{matrix}}{A\ e\ C}$

(b) $\dfrac{\begin{matrix} A\ e\ B \\ B\ i\ C \end{matrix}}{?}$, prepíšeme do tvaru predikátovej logiky

$\forall x\left(A(x) \Rightarrow \neg B(x)\right)$
$\exists x\left(B(x) \wedge C(x)\right)$

Riešenie nájdeme prirodzenou dedukciou

1. $\forall x\left(A(x) \Rightarrow \neg B(x)\right)$
2. $\exists x\left(B(x) \wedge C(x)\right)$

---

3. $A(t) \Rightarrow \neg B(t)$..............$E\forall\ v\,1$
4. $B(a) \wedge C(a)$.................$E\exists\ v\,2$
5. $B(a)$.............................$E\wedge\ v\,4$
6. $C(a)$.............................$E\wedge\ v\,4$
5. $\neg A(t) \wedge C(a)$...............*aplikácia modus tollens na* 3 *a* 5
6. $\exists x\left(C(x) \wedge \neg A(x)\right)$.......$I\exists\ v\,5$
7. CoA..............................*prepis do formy sylogizmu*

Potom riešený sylogizmus má tvar $\dfrac{\begin{matrix} A\ e\ B \\ B\ i\ C \end{matrix}}{C\ o\ A}$

(b) $\dfrac{\begin{matrix} A\ i\ B \\ C\ e\ B \end{matrix}}{?}$, prepíšeme do tvaru predikátovej logiky

$\exists x\left(A(x) \wedge B(x)\right)$
$\forall x\left(C(x) \Rightarrow \neg B(x)\right)$

Riešenie nájdeme prirodzenou dedukciou

1. $\exists x\left(A(x) \wedge B(x)\right)$
2 $\forall x\left(C(x) \Rightarrow \neg B(x)\right)$

---

3. $A(a) \wedge B(a)$..................*E*$\exists$ *v* 1
4. $C(t) \Rightarrow \neg B(t)$...............*E*$\forall$ *v* 2
5. $A(a)$..............................*E* $\wedge$ *v* 3
6. $B(a)$..............................*E* $\wedge$ *v* 4
5. $\neg C(a)$...........................*aplikácia modus tollens na* 4 *a* 6
6. $A(a) \wedge \neg C(a)$
6. $\exists x\left(A(x) \wedge \neg C(x)\right)$.......*I*$\exists$ *v* 5
7. *A o C*.............................*prepis do formy sylogizmu*