7. kapitola

Modálna logika
Intuitívny úvod do jednoduchej (K) modálnej logiky

Úvodné poznámky

- ***Modálna logika*** patrí medzi neklasické logiky, ktoré využívajú modálne spojky pre kvalitatívnu špecifikáciu pravdivosti usudzovania.

- ***Modálna logika*** zahrňuje takú modifikáciu výrokovej logiky, ktorá obsahuje dve nové unárne spojky „je nutné, aby...“ a „je možné, aby...“.

- ***Logiky modálneho charakteru*** majú význam nielen vo filozofii, kde umožňujú analyzovať a precizovať jej argumenty modálneho charakteru, ktoré sú často veľmi neurčité a ťažko „uchopiteľné“, ale aj vo vedách prírodovedných, v informatike a v umelej inteligencii, kde umožňujú rozšírenie spôsobov usudzovania a reprezentácií vedomostí.

Spoločným rysom modálnych logík je, že modálne spojky nevyhovujú ***princípu funkcionality,*** ktorý je platný v klasickej výrokovej logike, pravdivosť výroku ♣φ s *unárnou modálnu spojkou* ♣ nie je plne určená len pravdivostnou hodnotou výroku φ (ako to napr. platí pre spojku negácie, kde pravdivosť ¬φ je plne určená pravdivosťou φ).

Tento problém spôsoboval veľké problémy pri korektnej formulácii modálnych logík, menovite ich sémantickej interpretácii pomocou pravdivostných hodnôt formúl prostredníctvom pravdivostných hodnôt ich podformúl. Koncom 50. rokov minulého storočia americký filozof a logik Saul Kripke navrhol novú sémantickú interpretáciu, ktorá využíva aj iné možné svety, ako je len náš svet.

Podľa Kripkeho problém určenia pravdivostnej hodnoty výroku „φ je *vždy* pravdivé“, spočíva v tom, že pri jeho riešení sa musíme obracať aj na iné možné svety

- ***Výrok φ je nutne pravdivý vtedy a len vtedy* (*vtt*)*, ak φ je pravdivý vo všetkých možných svetoch.***

- ***Výrok φ je možne pravdivý vtedy a len vtedy* (*vtt*)*, ak φ je pravdivý aspoň v jednom možnom svete***. Tento prístup má univerzálny charakter a je pomerne ľahko aplikovateľný aj pre iné typy modálnych logík.

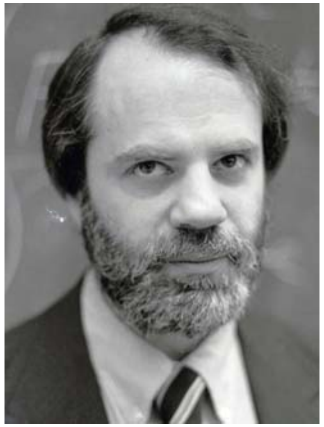
- Predmetom záujmu v modálnych logikách je pochopiť, ktoré modálne výroky implikujú iné modálne výroky, aký je medzi nimi vzájomný vzťah a pod. Modálna logika bola diskutovaná už Aristotelom, ktorý ako prvý poukázal na skutočnosť, že nutnosť implikuje možnosť

  ak (*p je nutné*), potom (*p je možné*)

  pričom opačná implikácia samozrejme neplatí (ak by platila, potom modality možnosť a nutnosť by boli totožné). Taktiež poukázal na možnosť definovať možnosť pomocou nutnosti a naopak

  nie (*p je možné*) *vtedy a len vtedy ak* (*nie p je nutné*)

  nie (*p je nutné*) *vtedy a len vtedy ak* (*nie p je možné*)



Americký filozof a logik ***Saul Kripke*** ($*$1940), ktorý je tvorcom sémantickej interpretácie modálnej a intuicionistickej logiky pomocou novej idey možných svetov. Použitie tejto sémantickej interpretácie patrí medzi “Kopernikovský obrat” štúdia mnohých neklasických logík modálneho typu v druhej polovici minulého storočia.

- Pri skúmaní pravdivosti modálnych výrokov „*p je nutné*“ a „*p je možné*“ hľadáme odpoveď podľa amerického filozofa a logika Saula Kripkeho [3,4,5] v možných svetoch $W = \{w_1, w_2,.., w_n,...\}$.

- Ak je nejaká skutočnosť pravdivá v každom možnom svete, potom povieme, že je *nutne pravdivá* aj v našom svete, alebo, ak je pravdivá aspoň v jednom možnom svete, povieme, že je *možne pravdivá* aj v našom svete.

- Kripke postuloval,že ak vo svete $w \in W$ je výrok *p* ***nutne pravdivý*** vtedy a len vtedy, ak je pravdivý aj vo všetkých svetoch „***dostupných***“ z daného sveta *w*, $w' \in \Gamma(w)$, kde $\Gamma(w) \subseteq W$ je podmnožina možných svetov, ktoré sú dostupné zo sveta *w*.

- Podobným spôsobom definoval Kripke aj skutočnosť, že vo svete $w \in W$ je výrok *p* ***možno pravdivý*** vtedy a len vtedt, ak je pravidivý aspoň v jednom svete , $w' \in \Gamma(w)$,

Ilustračný príklady

Študujme výrok „*nutne platí, že vlak do Prahy odchádza o 10.15*“. Ako sa jednoducho vysporiadať s unárnou modálnou spojkou „nutne“? Najjednoduchší prístup k riešeniu tohto problému bude, keď sa obrátime s otázkou „*odchádza vlak do Prahy o 10.15*“ ? na našich susedov v dome kde bývame. Potom $\Gamma(w) = susedia\_v\_dome(w)$, táto množina obsahuje susedov indivídua w, ktoré s ním bývajú v jednom dome. Ak nám každý takýto sused odpovie „*áno*“, potom môžeme pokladať daný výrok za nutne pravdivý. Ak nám odpovie „*áno*“ len určitá časť susedov (aspoň jeden), potom daný výrok môžeme pokladať za možne pravdivý.

Zovšeobecníme tieto dva jednoduché ilustračné príklady. Nech výrok „nutne φ“ má tvar □φ, kde symbol □ reprezentuje unárnu modálnu spojku „nutne“. Nech svet v ktorom sa skúma pravdivosť výroku □φ je označený symbolom w, množina možných svetov je označená W. Ak výrok φ je pravdivý pre každý svet $w' \in \Gamma(w)$, t. j. relácia $w' \vDash \varphi$ $(w' \nvDash \varphi)$ je pravdivá (nepravdivá), potom budeme pokladať skúmaný výrok □φ za pravdivý aj pre svet w

$$w \vDash \Box\varphi \quad vtt \quad \left(\forall w' \in \Gamma\left(w\right)\right)\left(\ w' \vDash \varphi\right)$$

alebo

$$w \nvDash \Box\varphi \quad vtt \quad \left(\exists w' \in \Gamma\left(w\right)\right)\left(\ w' \nvDash \varphi\right)$$

V prípade, že množina, že množina dostupných svetov $\Gamma\left(w\right)$ je prázdna (t. j. svet w nemá žiadneho nasledovníka), potom formula $w \vDash \Box\varphi$

Podobným spôsobom môžeme diskutovať aj výrok tvaru[1] $\Diamond\varphi$, kde symbol $\Diamond$ reprezentuje modálnu unárnu spojku „možne“. Ak výrok $\Diamond\varphi$ je pravdivý aspoň pre jeden svet $w' \in \Gamma(w)$, t. j. relácia $w' \vDash \varphi$, potom budeme pokladať skúmaný výrok $\Diamond\varphi$ za pravdivý aj pre svet w

$$w \vDash \Diamond\varphi \quad vtt \quad \left(\exists w' \in \Gamma\left(w\right)\right)\left(\, w' \vDash \varphi\right)$$

alebo

$$w \nvDash \Diamond\varphi \quad vtt \quad \left(\forall w' \in \Gamma\left(w\right)\right)\left(\, w' \nvDash \varphi\right)$$

Skutočnosť, že platnosť výrokov $\Box\varphi$ a/alebo $\Diamond\varphi$ je vztiahnutá k nejakému svetu $w \in W$ je nová črta modálnej logiky, ktorá je neznáma v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť formuly φ je nezávislá na svete $w \in W$, platí univerzálne. Modálne spojky sú navzájom spriahnuté vzťahmi

$$\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$$
$$\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$$

[1] Formulu $\Box\,\varphi$ čítame „box fí“ a formulu $\Diamond\varphi$ čítamé „diamant fí“.

Jazyk modálnej logiky - syntax

Jazyk (syntax) modálnej logiky bude definovať spôsobom, ktorý je jednoduchým rozšírením výrokovej logiky pomocou zavedenia dvoch unárnych modálnych spojok a ich sémantickou interpretáciou.

V prvok kroku budeme špecifikovať tvorbu formúl jazyka L modálnej logiky[2]. Nech $P=\left\{p,q,...,p',q',...,p_1,q_1,...,\mathbf{0},\mathbf{1}\right\}$ je konečná množina atomických výrokov (výrokových premenných) rozšírená o dve pravdivostné konštanty **0** a **1**, z ktorých pomocou unárnych a binárnych logických spojok (včítane modálnych $\Box$ a $\Diamond$) vytvárame formuly modálnej logiky, kde L je minimálna množina špecifikovaná týmto rekurentným spôsobom:

(1) $L := P$,

(2) Ak $\varphi,\psi \in L$, potom $(\varphi \wedge \psi),(\varphi \vee \psi),(\varphi \Rightarrow \psi),(\varphi \equiv \psi),(\neg\varphi),(\Box\varphi),(\Diamond\varphi) \in L$

[2] Porovnaním s definíciou 1.2 zistíme, že jazyk L modálnej logiky je jednoduchým rozšírením jazyka výrokovej logiky o dne unárne spojky $\Box$ a $\Diamond$. To znamená, že každá formula výrokovej logiky je aj formulou modálnej logiky (ale nie naopak).

Použijeme metódu Kripkeho možných svetov k špecifikácii pravdivostných hodnôt formúl obsahujúcich unárne operátory $\square$ a $\diamond$ modálnej logiky. ***Kripkeho model*** *M* je definovaný ako usporiadaná trojica

$$M = (W, R, val)$$

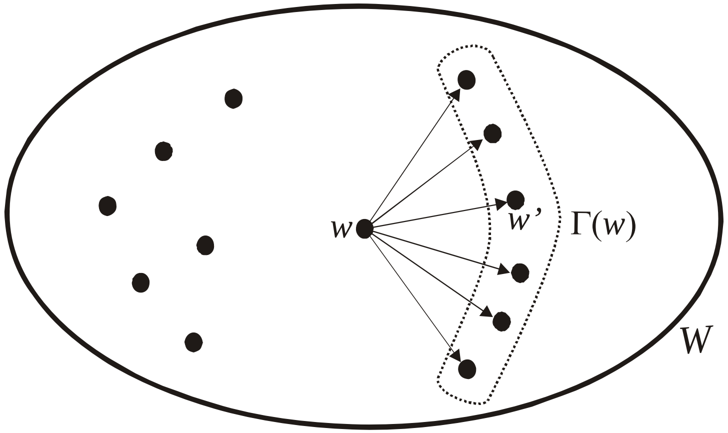
kde množina $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ obsahuje možné svety, $R \subseteq W \times W$ je binárna relácia definovaná nad množinou svetov a *val* je zobrazenie

$$val : P \times W \to \{0,1\}$$

ktoré ohodnocuje atomické premenné $\{p, q, ..., p', q', ..., p_1, q_1, ...\}$ v každom svete $w \in W$ pravdivostnou ohodnotí $val(p,w) \in \{0,1\}$ s interpretáciou (pozri obr. 7.2)

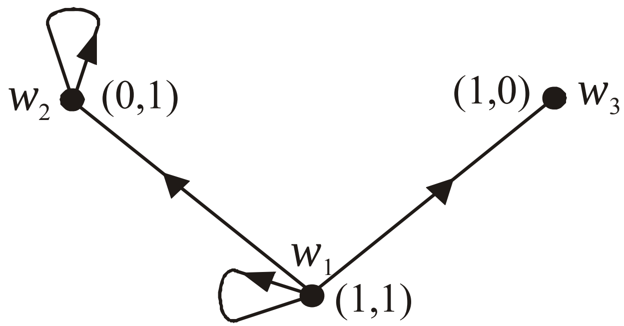
$$(val(p,w) = 1) \equiv (p \text{ je pravdivé vo svete } w) \equiv (w \vDash p)$$

$$(val(p,w) = 0) \equiv (p \text{ je nepravdivé vo svete } w) \equiv (w \nvDash p)$$



Pomocou relácia R môžeme definovať pre každý svet $w \in W$ množiny dostupných (susedných) svetov $\Gamma(w) \subseteq W$ zo sveta w

$$\Gamma(w) = \{w' ; (w, w') \in R\}$$



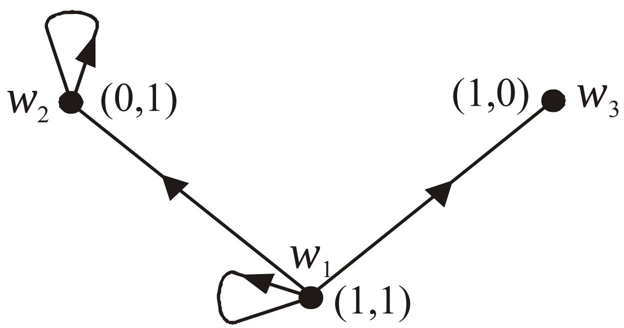
Množiny Γ sú určené takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}, \Gamma(w_3) = \emptyset$. Zobrazenie v je určené takto: $v(p, w_1) = 1$, $v(p, w_2) = 0$, $v(p, w_3) = 1$, $v(q, w_1) = 1$, $v(q, w_2) = 1$, $v(q, w_3) = 0$.

Použitím podmnožín Γ modálne unárne operátory (spojky) sú definované takto

$$\left(w \vDash \Box\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\, \Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 1 & \left(pre\, \Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases}$$

$$\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \vDash \varphi\right) & \left(pre\, \Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 0 & \left(pre\, \Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases}$$

Pravdivosť niektorých formúl s reláciou R znázornenou na obrázku



formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0
$p \vee q$	1	1	1
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	1
$\Diamond p$	1	0	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box p \wedge \Box q$	0	0	1
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$\Diamond p \wedge \Diamond q$	1	0	0
$\Diamond p \vee \Diamond q$	1	1	0
$\Box (p \wedge q)$	0	0	1
$\Box (p \vee q)$	1	1	1
$\Diamond (p \wedge q)$	1	0	0
$\Diamond (p \vee q)$	1	1	0

V modálnej logike sa pojem *tautológie* (reprezentovaný symbolom $\vDash$) formuly φ zavádza trochu komplikovanejšie ako vo výrokovej logike.

Definícia. Nech formula $\varphi \in L$, potom výrok ´formula φ je ***pravdivá pre model*** $M = (W, R, val)$ zapisujeme pomocou symbolu – relácie $\vDash$ takto

$$M \vDash \varphi$$

Negácia tohto výroku má tvar

$$M \nvDash \varphi$$

Ktorú čítame ´formula φ je nepravdivá pre model *M*.

Hovoríme, že formula $\varphi \in L$ je ***tautológia*** práve vtedy, ak je pravdivá pre každý model *M*

$$\vDash \varphi =_{def} (\forall M)(M \vDash \varphi)$$

Pre modálne spojky □ a ◇ platia vybrané tautológie z tab. 8.3, o ktorých platnosti sa môžeme presvedčiť pomocou sémantických tabiel.

Vybrané tautológie jednoduchej modálnej logiky

(1)	$\models\left(\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p)\right)$
(2)	$\models\left(\Box p \Rightarrow \Diamond p\right)$
(3)	$\models\left(\left(\Box\left(p \wedge q\right)\right) \equiv \left(\left(\Box p\right) \wedge \left(\Box q\right)\right)\right)$
(4)	$\models\left(\Diamond\left(p \vee q\right) \equiv \left(\Diamond p\right) \vee \left(\Diamond q\right)\right)$
(5)	$\models\left(\left(\Box p\right) \vee \left(\Box q\right) \Rightarrow \Box\left(p \vee q\right)\right)$
(6)	$\models\left(\Diamond\left(p \wedge q\right) \Rightarrow \left(\Diamond p\right) \wedge \left(\Diamond q\right)\right)$
(7)	$\models\left(\Box\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\Box p \Rightarrow \Box q\right)\right)$
(8)	$\models\left(\Box\left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(\Diamond p \Rightarrow \Diamond q\right)\right)$
(9)	$\models\left(\Diamond p \Rightarrow \Diamond q\right) \Rightarrow \left(\Diamond\left(p \Rightarrow q\right)\right)$

Rekapitulácia

Základné vlastnosti jednoduchej modálnej logiky, ktorú nazývame taktiež K (na počesť Saula Kripkeho) modálna logika:

- V prvom kroku sme špecifikovali dve modálne spojky „nutne“ a „možne“, reprezentované symbolmi □ resp. ◊.
- Sémantický význam týchto dvoch unárnych spojok bol špecifikovaný pomocou prístupu možných svetov navrhnutého Saulom Kripkom. Formuly modálnej logiky (t. j. syntax tejto logiky) boli jednoducho formulované pomocou mierne modifikovaného rekurentného postupu známeho z výrokovej logiky, v rámci ktorého formuly výrokovej logiky tvoria významnú podmnožinu korektných formúl modálnej logiky (ak formula neobsahuje modálnu spojku, potom je aj formulou výrokovej logiky).
- Sémantická interpretácia spojok sa odlišuje od klasického prístupu len v prípade modálnych unárnych spojok, ktoré sú interpretované v rámci modelu $M=(W,R,val)$, pričom relácia R z tohto modelu pre jednoduchosť nie je špecifikovaná, čo vlastne tvorí formálny základ jednoduchej K modálnej logiky.

Vzťah medzi modálnou logikou a predikátovou logikou

V tejto kapitole budeme diskutovať úzky vzťah medzi modálnou logikou a predikátovou logikou.

- Pretože predikátová logika je historicky staršia približne o polstoročie od modálnej logiky, môžeme povedať, že modálna logika je špeciálny prípad predikátovej logiky.
- Niektorí autori využívajú túto skutočnosť k definícii modálnych operátorov □ a ◇ ako analogických štruktúr kvantifikátorov ∀ resp. ∃. Potom, v rámci tohto prístupu, napr. na základne platnosti predikátovej formuly
$$(\forall x)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big((\forall x)\,p(x) \Rightarrow (\forall x)\,q(x)\big)$$
môžeme očakávať aj platnosť formuly
$$\Box\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\Box p(x) \Rightarrow \Box q(x)\big)$$
ktorá patrí medzi kľúčové formuly modálnej logiky.
- Musíme však poznamenať, že tento vzťah medzi modálnou a predikátovou logikou bol umožnený až vznikom Kripkeho sémantiky možných svetov, bez jej existencie by nikoho nenapadlo hľadať analógie medzi predikátovou a modálnou logikou.

Nech $U = \{a, b, \ldots, x, y, \ldots\}$ je univerzum objektov (indivíduí), vzhľadom ku ktorému bude definovať pravdivosť výroku (unárneho predikátu) *p*, $x \vDash p$, ktorý čítame „*p* je pravdivé pre objekt *x*“; jeho negácia $\neg(x \vDash p) =_{def} (x \nvDash p)$, ktorý sa číta „*x* nie je pravdivé pre objekt *p*“. Definujme unárny operátor (univerzálny kvantifikátor) $\forall$ analogickým spôsobom, ako bol definovaný modálny operátor $\Box$

$$\forall p =_{def} \bigwedge_{x \in U} (x \vDash p)$$

Podobným spôsobom môže byť definovaný aj unárny operátor (existenčný kvantifikátor) $\exists$ ako analógia k modálnemu operátoru $\Diamond$

$$\exists p =_{def} \bigvee_{x \in U} (x \vDash p)$$

Z týchto dvoch definícií vyplýva (použitím de Morganových zákonov pre konjunkciu resp. disjunkciu) priamo vzťah medzi kvantifikátormi

$$\neg \forall p \equiv \exists \neg p$$

Na základe tejto analógie medzi kvantifikátormi a modálnymi operátormi môžeme prirodzene očakávať, že väčšina formúl predikátovej logiky má svoj „duálny“ tvar v modálnej logike (alebo naopak).

Sémantické tablá v modálnej logike

Metóda sémantických tabiel pre modálnu logiku je jednoduchým rozšírením tohto prístupu platného pre výrokovú logiku tak, že zavedieme nové rozšírenia sémantického tabla pre modálne spojky □ a ◇,

$$\begin{array}{c} w_1 \models \Box\varphi \\ | \\ w_2 \models \varphi \quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} w_1 \models \Diamond\varphi \\ | \\ w_2 \models \varphi \quad \exists w_2 \in \Gamma(w_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} w_1 \not\models \Box\varphi \\ | \\ w_2 \not\models \varphi \quad \exists w_2 \in \Gamma(w_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} w_1 \not\models \Diamond\varphi \\ | \\ w_2 \not\models \varphi \quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1) \end{array}$$

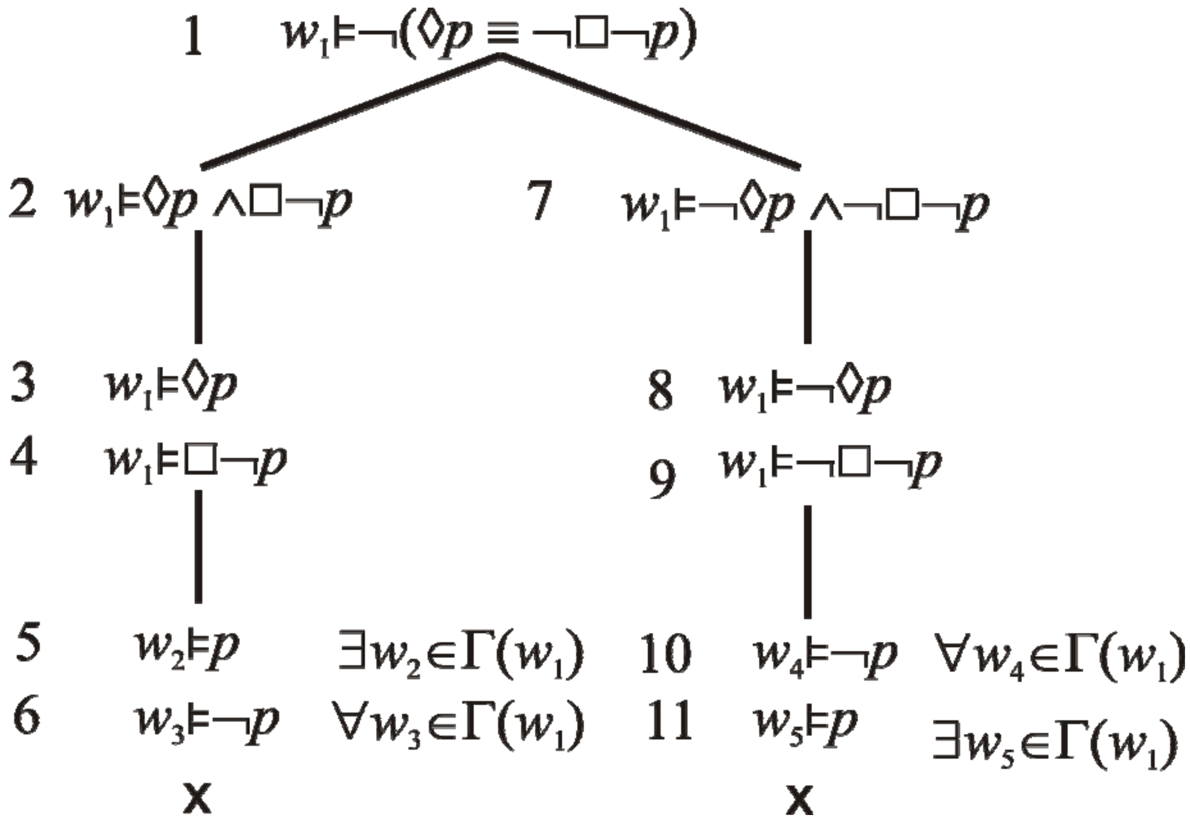
(A) *Modálna spojka 'nutne'* (B) *Modálna spojka 'možne'*

V dolnej časti diagramu vpravo sú uvedené objekty z množiny *W* (možné svety), pre ktoré formula platí.

Príklad

Metódou sémantického tabla ukáže, že formula $\varphi = \left(\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p)\right)$ je tautológia.

Vzniknuté sémantické tablo



Jednotlivé vetvy sú uzavreté, ciže formula $\varphi = \left(\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p)\right)$ je tautológia.

Príklad

Metódou sémantického tabla dokážte, že formula $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$ je tautológia,

.

1 $w_1 \vDash \neg(\Box p \Rightarrow \Diamond p)$

2 $w_1 \vDash \Box p$

3 $w_1 \vDash \neg \Diamond p$

4 $w_2 \vDash p \quad \forall w_2 \in \Gamma(w_1)$

5 $w_1 \vDash \Box \neg p$

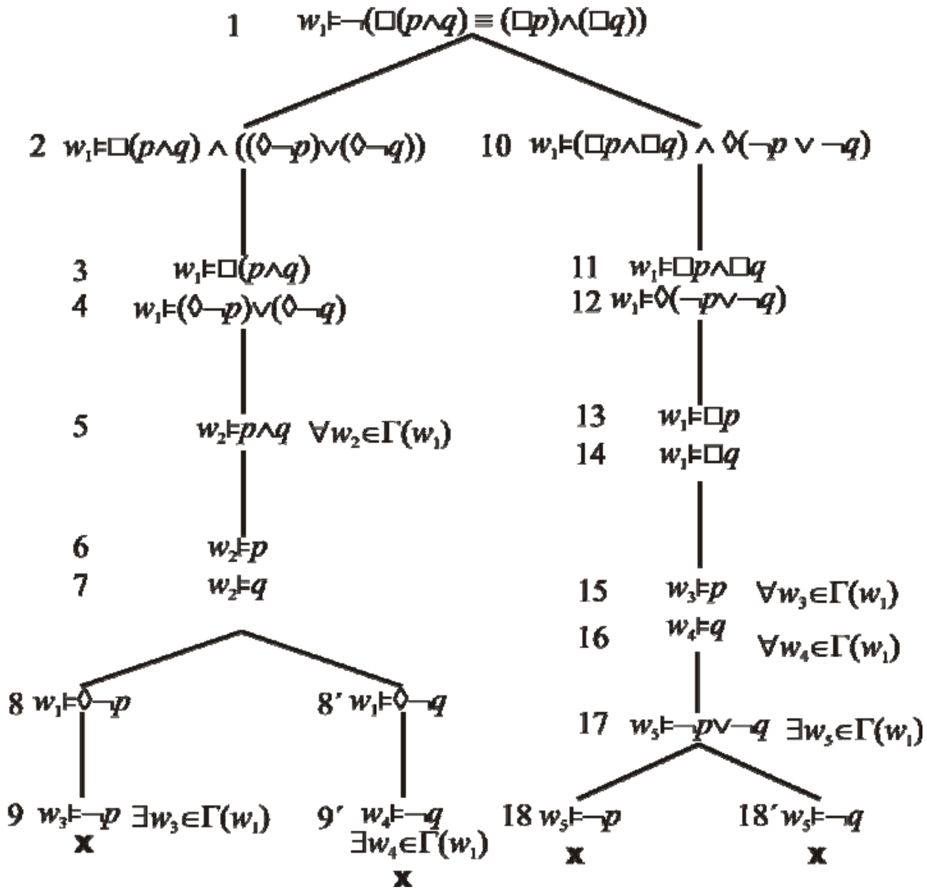
6 $w_3 \vDash \neg p \quad \forall w_3 \in \Gamma(w_1)$

x

Pretože jediná vetva je uzavretá, formula φ je tautológia

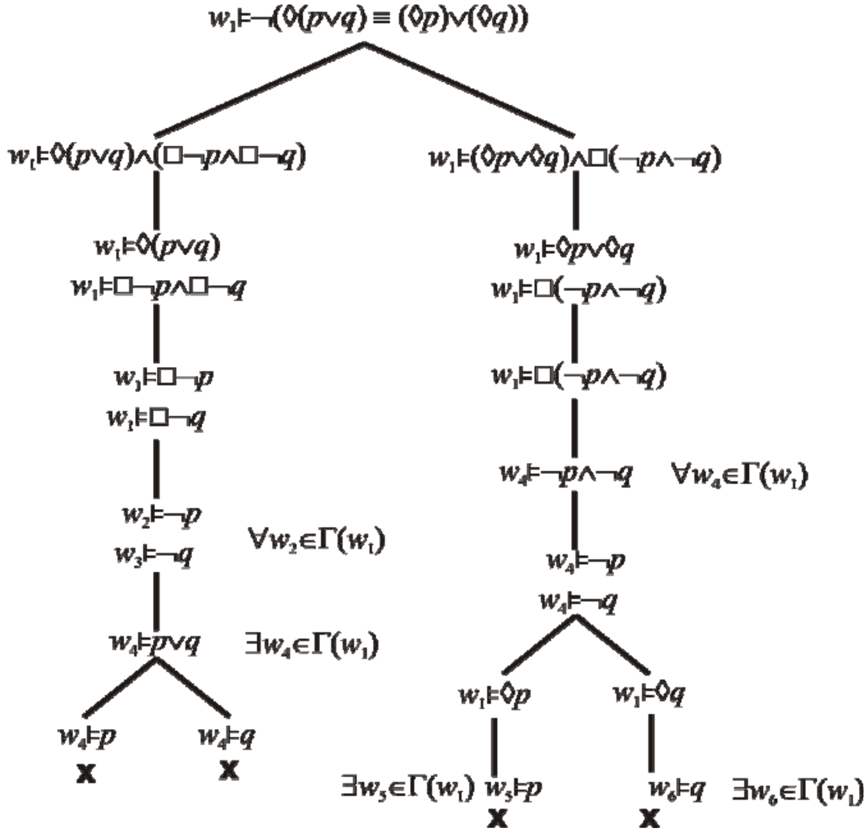
Príklad

Metódou sémantického tabla zistíme, že formula $\varphi = \Big(\big(\Box\,(p \wedge q)\big) \equiv \big((\Box\, p) \wedge (\Box\, q)\big)\Big)$ je tautológia,



Všetky vetve sú uzavreté, potom formula φ je tautológia.

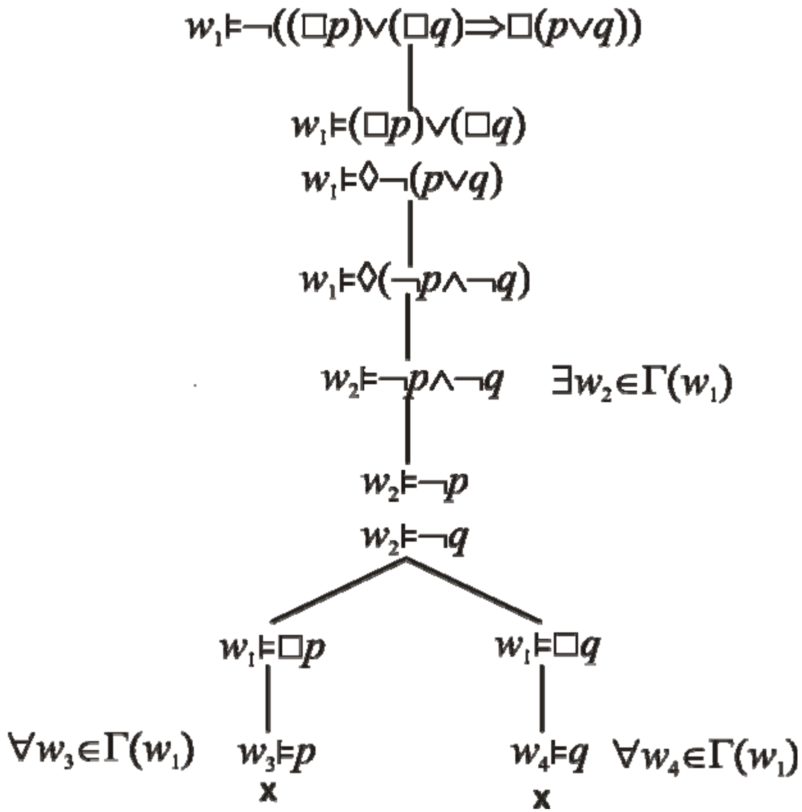
Príklad 7.4. Pomocou sémantického tabla Dokážte tautologičnosti formuly $\varphi = \left(\Diamond\left(p \vee q\right) \equiv \left(\Diamond p\right) \vee \left(\Diamond q\right)\right)$.



Všetky vetvy tabla sú uzavreté, formula φ je tautológia

Príklad

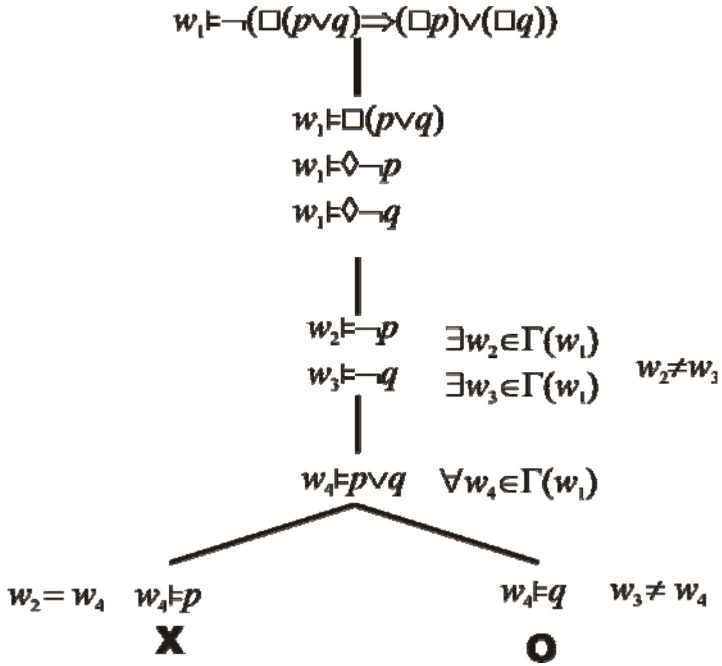
Pomocou sémantického tabla dokážte tautologičnosti formuly. $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box (p \vee q)$.



Vetvy tabla sú uzavreté, potom formula φ je tautológia

Príklad

Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla.



Pretože sémantické obsahuje otvorenú vetvu, potom táto môže byť použitá na tvorbu kontraprikladu, ktorý falzifikuje jeho tautologičnosť.

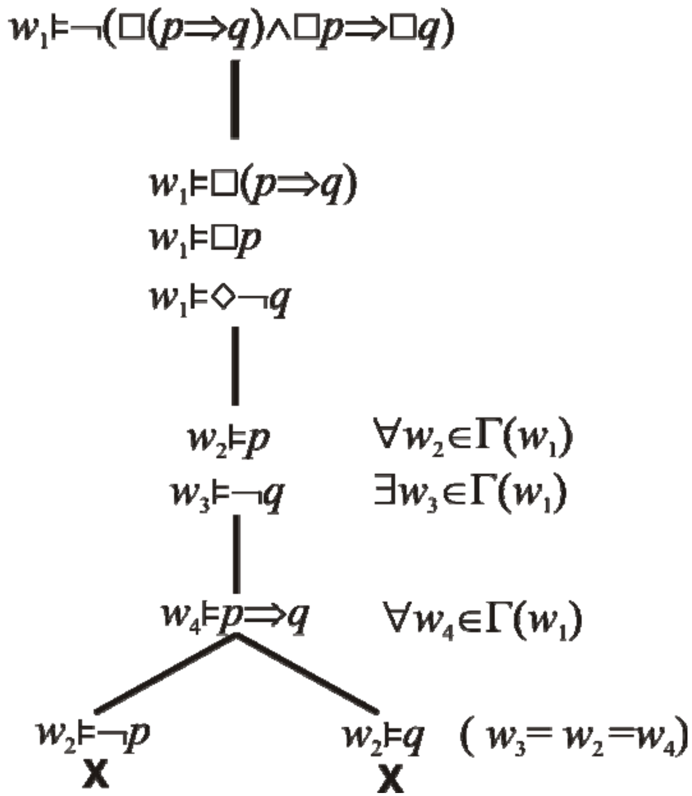
Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

Formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1

Príklad

Pravidlo modus tollens v modálnej logike má tento alternatívny tvar

$$\begin{array}{|l} \Box(p \Rightarrow q) \\ \Box p \\ \hline \Box q \end{array}$$



Prirodzená dedukcia jednoduchej *K* modálnej logiky

Axiomatický systém K-logiky môžeme jednoducho zostrojiť rozšírením štandardného Hilbertovho systému pre výrokovú logiku o *K*-formulu $\square(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\square\varphi \Rightarrow \square\psi)$ a pravidlo nutnosti (necesitácie) $\varphi/\square\varphi$. Pre operatívnosť nášho prístupe k tejto najjednoduchšej modálnej *K*-logiky, rozšírime prístup prirodzenej dedukcie z kapitoly 4 (pozri tab 4.1) o ďalšie dve pravidlá:

1. *Pravidlo K-formuly*

$$\begin{array}{|l} \square\varphi \\ \square(\varphi \Rightarrow \psi) \\ \hline \square\psi \end{array}$$

Ak sme schopní odvodiť formuly $\square\varphi$ a $\square(\varphi \Rightarrow \psi)$, potom je odvoditeľná aj formula $\square\psi$. Poznamenajme, že toto pravidlo nie je nič iné, ako ekvivalentný prepis *K*-formuly $\square(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\square\varphi \Rightarrow \square\psi)$ (pozri príklad).

2. *Pravidlo nutnosti*, ak platí φ, potom platí aj formula □φ

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \Box\varphi \end{array}$$

Pomocou prirodzenej dedukciu môžeme dokázať každú tautológiu *K* modálnej logiky

Diagramatická interpretácia týchto pravidiel a pôvodných pravidiel prirodzenej dedukcie je uvedená v nasledujúcej tabuľke.

Spojka	eliminácia	introdukcia
$\wedge$	$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi \quad \psi}$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\wedge\psi}$
$\vee$	$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \neg\varphi}{\psi}$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi\vee\psi}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \qquad \varphi}{\psi}$	$\dfrac{\psi \qquad \varphi}{\psi\Rightarrow\varphi}$
$\neg$	$\dfrac{\neg\,\neg\varphi}{\varphi}$	$\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \quad \varphi\Rightarrow\neg\psi}{\neg\varphi}$ $\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}$
Pravidlá K-formuly	$\dfrac{\Box\varphi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Box\psi}$ $\dfrac{\Diamond\varphi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Diamond\psi}$	$\dfrac{\Box\neg\psi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Box\neg\varphi}$ $\dfrac{\Diamond\neg\psi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)}{\Diamond\neg\varphi}$

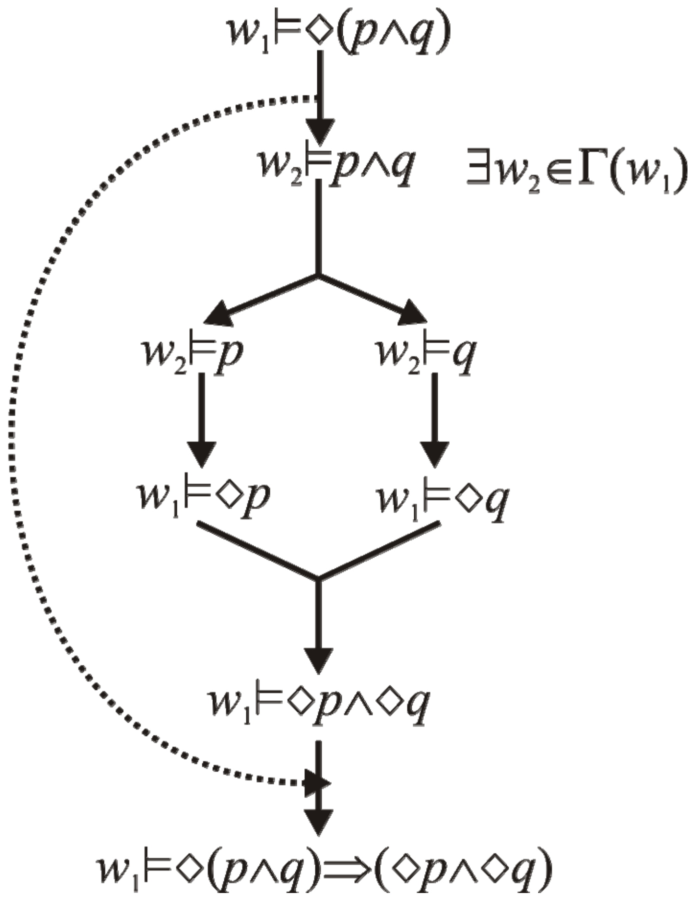
Pravidlo nutnosti	φ $\downarrow$ $\Box\varphi$

Príklad

Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte tautologickosť formuly $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$.

1.	$w_1 \vDash \Diamond(p \wedge q)$	*aktivcia pomocného predpokladu*
2.	$w_2 \vDash p \wedge q$	$E\Diamond, \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$
3.	$w_2 \vDash p$	$E \wedge$
4.	$w_2 \vDash q$	$E \wedge$
5.	$w_1 \vDash \Diamond p$	$I\Diamond$
6.	$w_1 \vDash \Diamond q$	$I\Diamond$
7.	$w_1 \vDash \Diamond p \wedge \Diamond q$	$I \wedge$
8.	$w_1 \vDash \Diamond(p \wedge q) \Rightarrow w_1 \vDash \Diamond p \wedge \Diamond q$	*deaktivácia pomocného predpokladu*

Diagramatická verzia tohto dôkazu prirodzenou dedukciou je znázornená na obrázku



Príklad

Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ pomocou prirodzenej dedukcie.

1.	$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q)$	*aktivácia pomocného predpokladu*
2.	$w_1 \vDash \Box p$	E$\vee$ (prvý alebo druhý člen musí byť pravdivý)
3.	$w_2 \vDash p$	$\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$, E$\Box$
4.	$w_2 \vDash p \vee q$	I$\vee$
5.	$w_1 \vDash \Box(p \vee q)$	I$\Box$
6.	$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow w_1 \vDash \Box(p \vee q)$	
7.	$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$	

Diagramatické znázornenie prirodzenej dedukcie z príkladu

$$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q)$$

$$w_1 \vDash \Box p \qquad \textit{pred. pravd. člena } \Box p$$

$$w_2 \vDash p \qquad \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$$

$$w_2 \vDash p$$

$$w_2 \vDash p \wedge q$$

$$w_1 \vDash \Box(p \wedge q)$$

$$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow w_1 \vDash \Box(p \wedge q)$$

$$w_1 \vDash ((\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \wedge q))$$