Cvičenia

Cvičenie 7.1. Pomocou definičných vzťahov (7.8a-b) dokážte tautologičnosť ekvivalencií (7.6a-b)

(a) Dôkaz $w \vDash \neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$: Pre $w \vDash \Box\varphi$ platí (7.8a)

$$\neg\left(w \vDash \Box\varphi\right) = w \nvDash_{def} \Box\varphi = \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \nvDash \varphi\right) & \left(pre\, \Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 0 & \left(pre\, \Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases} = w \nvDash \Diamond\neg\varphi$$

(b) Dôkaz $\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$: Pre $w \nvDash \Diamond\varphi$ platí (7.8b)

$$\neg\left(w \vDash \Diamond\varphi\right) = w \nvDash \Diamond\varphi =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} \left(w' \nvDash \varphi\right) & \left(pre\, \Gamma(w) \neq \varnothing\right) \\ 1 & \left(pre\, \Gamma(w) = \varnothing\right) \end{cases} = w \vDash \Box\neg\varphi$$

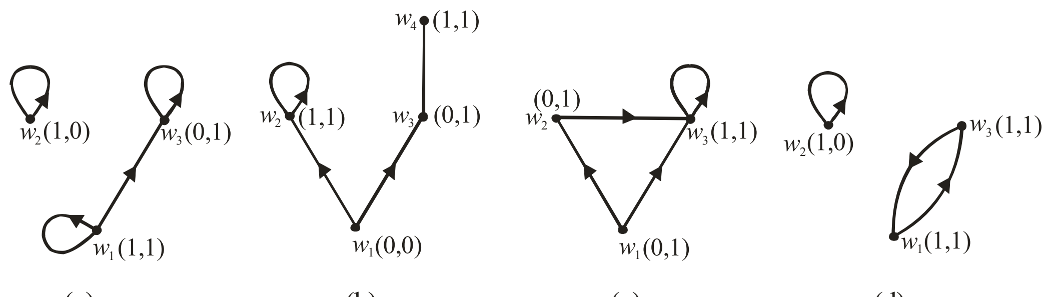
Cvičenie 7.2. Ukážte, že pre model M (8.7), kde pre každé $w \in W$, množiny dostupných svetov sú prázdne, $\Gamma(w) = \varnothing$, každá formula φ je nutná a nie je možná, t. j. pre ľubovoľnú formulu φ platí $\Box\varphi \equiv 1$ a $\Diamond\varphi \equiv 0$.

Návod: Modálne operátory nech sú definované pomocou relácií (7.6), pričom symboly konjunkcie a disjunkcie sú pre n komponent zovšeobecnené takto

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv 1 \wedge p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \equiv \begin{cases} p_1 \wedge \ldots \wedge p_n & \left(pre\, n \geq 1\right) \\ 1 & \left(pre\, n = 0\right) \end{cases}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv 0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_n \equiv \begin{cases} p_1 \vee \ldots \vee p_n & \left(pre\, n \geq 1\right) \\ 0 & \left(pre\, n = 0\right) \end{cases}$$

Cvičenie 7.3. Pre rôzne relácie špecifikované orientovaným grafom zostrojte pravdivostné hodnoty formúl: $\Box p$, $\Box q$, $\Diamond p$, $\Diamond q$, $\Box(p \wedge q)$, $\Box(p \vee q)$, $\Box(p \Rightarrow q)$, $\Diamond(p \wedge q)$, $\Diamond(p \vee q)$, $\Diamond(p \Rightarrow q)$.



(a) (b) (c) (d)

Cvičenie 7.4. Pomocou sémantického tabla falzifikujte tautologičnosť formúl, pomocou otvorených ciest navrhnite takú pravdivostnú interpretáciu premenných p a q, aby výsledná pravdivostná hodnota vo svete w_1 bola nepravda.

(a) $w \nvDash \left(\Diamond p \wedge \Diamond q\right) \Rightarrow \Diamond\left(p \wedge q\right)$,

(b) $w \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond q$,

(c) $w \nvDash (\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q) \Rightarrow \Diamond\Box(p \wedge q)$.

Cvičenie 7.5. Pomocou všeobecnej diskusie dokážte, že formula je tautológia (t. j. je pravdivá v každom svete, $(\forall w \in W)(w \vDash \varphi)$).

(a) $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$

(b) $\varphi = (\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$

(c) $\varphi = (\Diamond(p \vee q) \Rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q))$

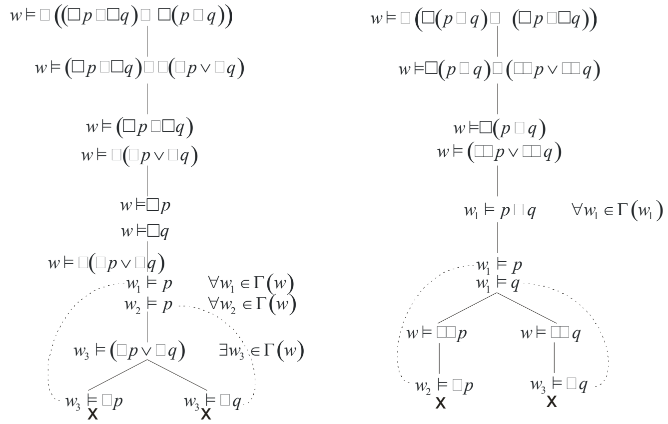
Návod: Nech formula $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$ je pravdivá v aktuálnom svete $w \in W$, potom (1) podformula $\varphi_1 = \Box(p \Rightarrow q)$ je nepravdivá alebo (2) podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá. Uvažujme možnosť (1), to potom znamená, že v dostupnom okolí $\Gamma(w)$ aktuálneho sveta w existuje aspoň jeden dostupný svet w' v ktorom je podformula $\varphi_{11} = p \Rightarrow q$ nepravdivá, čiže v tomto dostupnom svete platí, že premenná p je pravdivá a premenná q je nepravdivá. V možnosti (2) je podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá v aktuálnom svete w, potom v tom istom svete podformula $\varphi_{21} = \Box p$ je nepravdivá alebo podformula $\varphi_{22} = \Box q$ je pravdivá. Potom v okolí $\Gamma(w)$ existuje aspoň jeden svet w'' v ktorom je premenná p nepravdivá a v každom svete w''' z tohto okolia je premenná q je pravdivá (pozri tabuľku, kde druhý a tretí riadok špecifikujú výsledky diskusie o pravdivostných hodnotách premenných).

	w	w'	w''	w'''
p	#	1	0	#
q	#	0	#	1
$P \Rightarrow q$	#	0	1	1
$\Box(p \Rightarrow q)$	0	#	#	#
$\Box p$	0	#	#	#
$\Box q$	0	#	#	#
$\Box p \Rightarrow \Box q$	1	#	#	#
φ	1	#	#	#

Znak # reprezentuje ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu. Týmto sme dokázali, že v ľubovoľnom svete w je formula $\varphi = (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$ pravdivá, čiže je tautológia.

Cvičenie 7.6. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly sú tautológie

(a) $(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$,



(b) $\Box p \vee \Box q \Rightarrow \Box(p \vee q)$,

$$w \vDash \neg(\Box p \vee \Box q \Rightarrow \Box(p \vee q))$$
$$w \vDash (\Box p \vee \Box q) \wedge \Diamond(\neg p \wedge \neg q)$$
$$\begin{array}{c} w \vDash (\Box p \vee \Box q) \\ w \vDash \Diamond(\neg p \wedge \neg q) \end{array}$$
$$w_1 \vDash (\neg p \wedge \neg q) \qquad \exists w_1 \in \Gamma(w)$$
$$\begin{array}{c} w_1 \vDash \neg p \\ w_1 \vDash \neg q \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} & w \vDash \Box p & & w \vDash \Box q & \\ \forall w_2 \in \Gamma(w) & w_2 \vDash p & & w_2 \vDash q & \forall w_4 \in \Gamma(w) \\ & \mathbf{x} & & \mathbf{x} & \end{array}$$

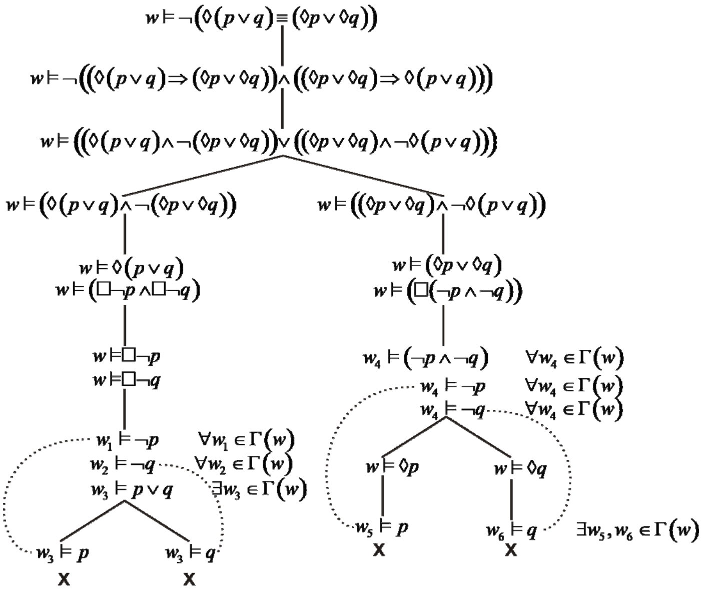
(c) $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$,

$$w \vDash \neg(\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p)$$
$$w \vDash \neg((\Diamond p \Rightarrow \neg\Box\neg p) \wedge (\neg\Box\neg p \Rightarrow \Diamond p))$$
$$w \vDash (\neg(\Diamond p \Rightarrow \neg\Box\neg p) \vee \neg(\neg\Box\neg p \Rightarrow \Diamond p))$$
$$w \vDash ((\Diamond p \wedge \Box\neg p) \vee (\Diamond p \wedge \Box\neg p))$$
$$w \vDash (\Diamond p \wedge \Box\neg p)$$
$$\begin{array}{c} w \vDash \Diamond p \\ w \vDash \Box\neg p \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} w_1 \vDash p & \exists w_1 \in \Gamma(w) \\ w_2 \vDash \neg p & \forall w_2 \in \Gamma(w) \\ \mathbf{X} & \end{array}$$

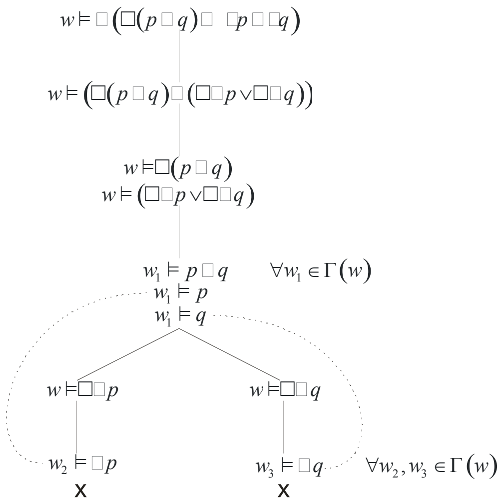
(d) $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,

$$w \vDash \neg(\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q)$$
$$w \vDash (\Diamond(p \wedge q) \wedge (\Box\neg p \vee \Box\neg q))$$
$$\begin{array}{c} w \vDash \Diamond(p \wedge q) \\ w \vDash (\Box\neg p \vee \Box\neg q) \end{array}$$
$$w_1 \vDash (p \wedge q) \qquad \exists w_1 \in \Gamma(w)$$
$$\begin{array}{c} w_1 \vDash p \\ w_1 \vDash q \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccc} & w \vDash \Box\neg p & & w \vDash \Box\neg q & \\ \forall w_2 \in \Gamma(w) & w_2 \vDash \neg p & & w_3 \vDash \neg q & \forall w_3 \in \Gamma(w) \\ & \mathbf{X} & & \mathbf{X} & \end{array}$$

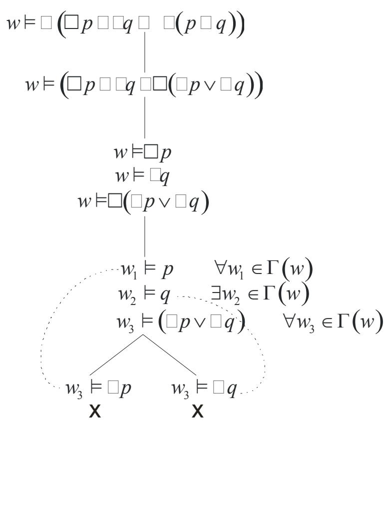
(e) $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$,



(f) $\Box(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,



(g) $\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,



(h) $\Box p \Rightarrow \Box(\neg p \Rightarrow q)$,

$$w \vDash \neg(\Box p \Rightarrow \Box(\neg p \Rightarrow q))$$
$$w \vDash (\Box p \wedge \Diamond(p \wedge \neg q))$$
$$\begin{array}{c} w \vDash \Box p \\ w \vDash \Diamond(p \wedge \neg q) \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} w_1 \vDash p & \forall w_1 \in \Gamma(w) \\ w_2 \vDash (p \wedge \neg q) & \exists w_2 \in \Gamma(w) \end{array}$$
$$\begin{array}{c} w_2 \vDash p \\ w_2 \vDash \neg q \\ \mathbf{x} \end{array}$$

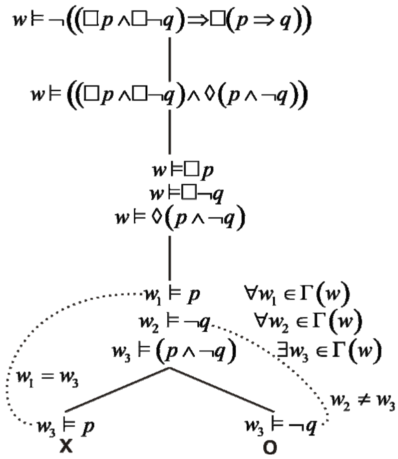
(i) $\Box p \Rightarrow \Box(q \Rightarrow p)$,

$$w \vDash \neg(\Box p \Rightarrow \Box(q \Rightarrow p))$$
$$w \vDash (\Box p \wedge \Diamond(q \wedge \neg p))$$
$$\begin{array}{c} w \vDash \Box p \\ w \vDash \Diamond(q \wedge \neg p) \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} w_1 \vDash p & \forall w_1 \in \Gamma(w) \\ w_2 \vDash q \wedge \neg p & \exists w_2 \in \Gamma(w) \end{array}$$
$$\begin{array}{c} w_2 \vDash q \\ w_2 \vDash \neg p \\ \mathbf{x} \end{array}$$

Cvičenie 7.7. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly nie sú tautológie, pomocou otvorenej vetvy tabla zostrojte protipríklad, ktorý falzifikuje tautologickosť formuly.
(a) $\Box(p \vee q) \Rightarrow \Box p \vee \Box q$,

$$w \vDash \neg(\Box(p \vee q) \Rightarrow \Box p \vee \Box q)$$
$$w \vDash (\Box(p \vee q) \wedge (\Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q))$$
$$\begin{array}{c} w \vDash \Box(p \vee q) \\ w \vDash \Diamond\neg p \\ w \vDash \Diamond\neg q \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} w_1 \vDash (p \vee q) & \forall w_1 \in \Gamma(w) \\ w_2 \vDash \neg p & \exists w_2 \in \Gamma(w) \\ w_3 \vDash \neg q & \exists w_3 \in \Gamma(w) \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} w_1 = w_2 & & w_1 \neq w_3 \\ w_1 \vDash p & & w_1 \vDash q \\ \mathbf{x} & & \mathbf{o} \end{array}$$

(b) $(\Box p \wedge \Box\neg q) \Rightarrow \Box(p \Rightarrow q)$,



(c) $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,

(d) $\Box p \Rightarrow p$,

(e) $\Box p \Rightarrow \Diamond p$,

(f) $p \Rightarrow \Box p$.

Cvičenie 7.8. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte formuly

(a) $(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$

(b) $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$

(c) $\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$