Cvičenia

Cvičenie 9.1. Zostrojte charakteristické funkcie crisp množín, ktoré reprezentujú intervaly reálnych čísel

(a) $(-\infty,\infty)$

$$\mu_I(x)=1 \quad (\forall x\in R)$$

(b) $\langle 0,\infty)$

$$\mu_I(x)=\begin{cases}1 & (\forall x\in\langle 0,\infty))\\ 0 & (\forall x\in(-\infty,0))\end{cases}$$

(c) $\langle -1,0\rangle\cup(1,10)$

$$\mu_I(x)=\begin{cases}1 & (\forall x\in\langle -1,0\rangle\cup(1,10))\\ 0 & (\forall x\in(-\infty,-1)\cup(0,1\rangle\cup\langle 10,\infty))\end{cases}$$

(d) $(-1,0)\cup(0,1)$

$$\mu_I(x)=\begin{cases}1 & (\forall x\in(-1,0)\cup(0,1))\\ 0 & (\forall x\in(-\infty,-1\rangle\cup\{0\}\cup\langle 1,\infty))\end{cases}$$

(e) $\langle -2,2\rangle\setminus\langle -1,1\rangle$

$$\mu_I(x)=\begin{cases}1 & (\forall x\in\langle -2,-1)\cup(1,2\rangle)\\ 0 & (\forall x\in(-\infty,-2)\cup\langle -1,1\rangle\cup(2,\infty))\end{cases}$$

Cvičenie 9.2. Dokážte pomocou charakteristických funkcií crisp množín, že operácie prieniku a zjednotenia sú asociatívne a že platia De Morganove zákony (pozri tab. 10.1). Spôsob dôkazu je reprezentovaný sekvenciou formúl (10.5).

(a) Dokážeme $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$$\mu_{A\cup(B\cup C)}(x)=max\{\mu_A(x),\mu_{B\cup C}(x)\}=max\{\mu_A(x),max\{\mu_B(x),\mu_C(x)\}\}$$

Použijeme algebraickú identitu

$$max\{a,max\{b,c\}\}=max\{max\{a,b\},c\}$$

ktorú dokážeme tak, že postupne preveríme všetkých 6 možných vzájomných usporiadaní čísel *a*, *b* a *c*, tak napr. pre $a<b<c$ dostaneme

$$max\{a,max\{b,c\}\}=c=max\{max\{a,b\},c\}=c$$

Podobne pre $c<b<a$

$$max\{a,max\{b,c\}\}=a=max\{max\{a,b\},c\}=a$$

atď. Použitím algebraickej identity prepíšeme ľavú charakteristickú funkciu $\mu_{A\cup(B\cup C)}(x)$ do tvaru $\mu_{A\cup(B\cup C)}(x)=max\{max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\mu_C(x)\}=\mu_{(A\cup B)\cup C}(x)$, čo bolo potrebné dokázať.

(b) Dokážeme $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$$\mu_{A\cap(B\cap C)}(x)=min\{\mu_A(x),\mu_{B\cap C}(x)\}=min\{\mu_A(x),min\{\mu_B(x),\mu_C(x)\}\}$$

Použijeme algebraickú identitu

$$min\{a,min\{b,c\}\}=min\{min\{a,b\},c\}$$

ktorú môžeme dokázať podobným spôsobom ako predošlú identitu, jej použitím dostaneme

$$\mu_{A\cap(B\cap C)}(x) = min\{min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} = \mu_{(A\cap B)\cap C}(x)$$

a tým sme dokázali požadovanú množinovú identitu.

(c) Dokážeme $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

$$\mu_{\overline{A\cap B}}(x) = 1-\mu_{A\cap B}(x) = 1\text{-}\,min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Použijeme algebraickú identitu

$$1-min\{a,b\} = max\{1-a, 1-b\}$$

ktorú dokážeme pre dva rôzne prípady $a\leq b$ a $b<a$. Jej použitím prepíšeme charakteristickú funkciu do tvaru

$$\mu_{\overline{A\cap B}}(x) = 1-\mu_{A\cap B}(x) = max\{1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\}$$

QED.

(d) Dokážeme $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$

$$\mu_{\overline{A\cup B}}(x) = 1-\mu_{A\cup B}(x) = 1\text{-}\,max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = min\{1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\}$$

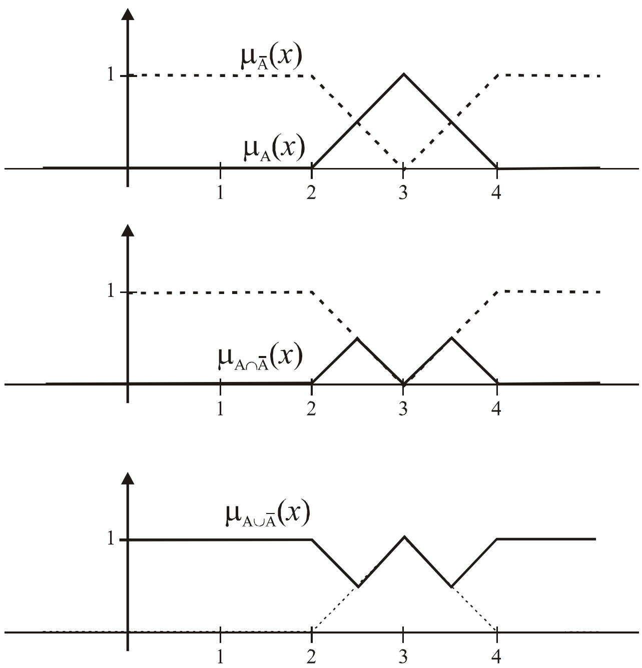
kde sme použili identitu

$$1-max\{a,b\} = min\{1-a, 1-b\}$$

Cvičenie 9.3. Nech A je fuzzy množina, ktorej charakteristická funkcia je definovaná takto

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (\text{pre } x\leq 1) \\ x-1 & (\text{pre } 1<x\leq 2) \\ -x+3 & (\text{pre } 2<x\leq 3) \\ 0 & (\text{pre } x>3) \end{cases}$$

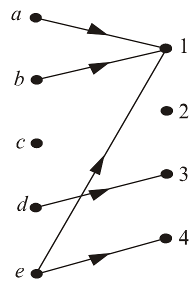
Nakreslite charakteristické funkcie fuzzy množín $A\cap\overline{A}$ a $A\cup\overline{A}$. V prípade, že A je crisp množina, ako by boli určené množiny $A\cap\overline{A}$ a $A\cup\overline{A}$ (porovnaj s formulami 10.9 a 10.10)?



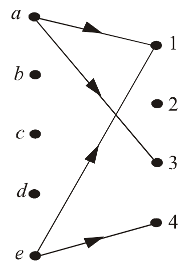
V prípade, že A je crisp množina, množiny $A\cap\overline{A}$ a $A\cup\overline{A}$ by boli určené formulami (10.9) a (10.10).

Cvičenie 9.4. Znázornite relácie $R\subseteq A\times B$, kde $A=\{a,b,c,d,e\}$ a $B=\{1,2,3,4\}$ pre

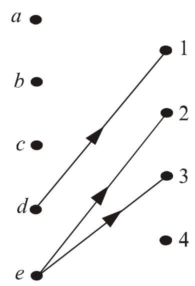
(a) $R=\{(a,1),(b,1),(d,3),(e,4),(e,1)\}$



(b) $R=\{(a,3),(a,1),(e,4),(e,1)\}$



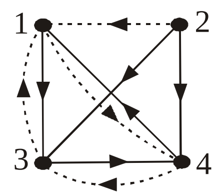
(c) $R=\{(d,1),(e,2),(e,3)\}$



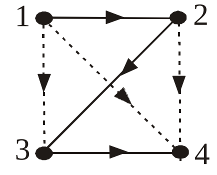
Cvičenie 9.5. Nech $R\subseteq A\times A$, kde $A=\{1,2,3,4,5\}$, doplňte reláciu *R* tak, aby bola tranzitívna (ak $(i,j),(j,k)\in R$, potom $(i,k)\in R$)

(a) $R=\{(1,3),(2,4),(2,3),(3,4),(4,1)\}$

Doplnená relácia je

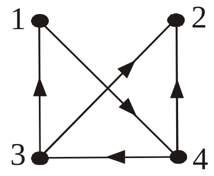


(b) $R=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

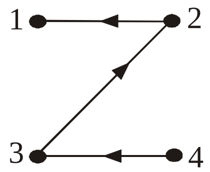


Cvičenie 9.6. Zostrojte inverzné relácie R^{-1} k reláciam *R*, ktoré sú definované v cvičení 9.8.

(a) $R^{-1}=\{(3,1),(4,2),(3,2),(4,3),(1,4)\}$



(b) $R^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$



Cvičenie 9.7. Nech $X=\{1,2,3,4\}$, pre dvojicu $x,y\in X$ binárna fuzzy relácia „približne rovný“ je definovaná vzťahom

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1 & (x=y)\\ 0.8 & (|x-y|=1)\\ 0.3 & (|x-y|=2)\\ 0.1 & (|x-y|=3)\end{cases}$$

Zostrojte tabuľku tejto fuzzy relácie.

x \ y	1	2	3	4
1	1	0.8	0.3	0.1
2	0.8	1	0.8	0.3
3	0.3	0.8	1	0.8
4	0.1	0.3	0.8	1

Cvičenie 9.8. Nech $X=\{1,2,...,6\}$ je množina, pre dvojicu $x,y\in X$ binárna fuzzy relácia $R\subseteq X\times X$ je definovaná vzťahom

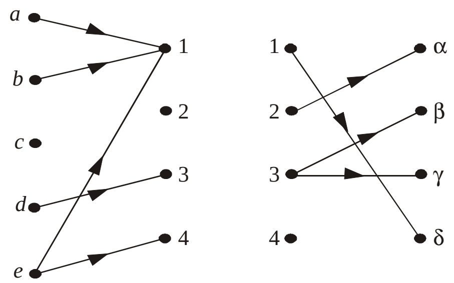
$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}0 & (x-y\le 0)\\ \dfrac{x-y}{20} & (0<x-y<2)\\ 1 & (x-y\ge 2)\end{cases}$$

Zostrojte tabuľku tejto fuzzy relácie.

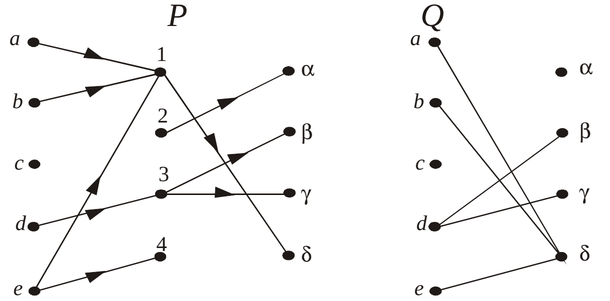
x \ y	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0.05	0	0	0	0	0
3	1	0.05	0	0	0	0
4	1	1	0.05	0	0	0
5	1	1	1	0.05	0	0
6	1	1	1	1	0.05	0

Cvičenie 9.9. Majme tri množiny $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ a $C=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Relácie $P\subseteq A\times B$ a $Q\subseteq B\times C$, zostrojte reláciu $R=P\circ Q$ a $\tilde{R}=Q^{-1}\circ P^{-1}$ pre

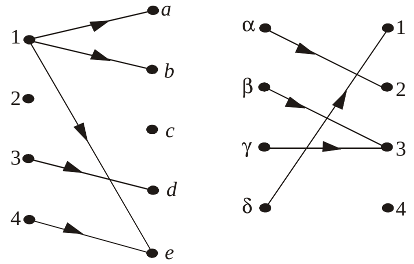
(a) $P=\{(a,1),(b,1),(d,3),(e,4),(e,1)\}$ a $Q=\{(2,\alpha),(3,\beta),(1,\delta),(3,\gamma)\}$



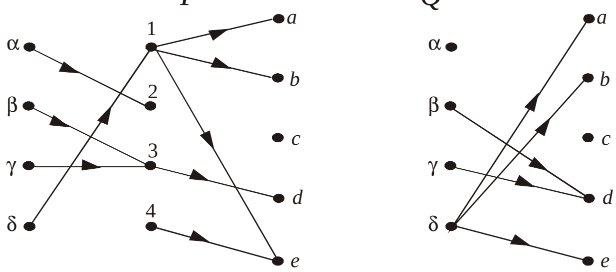
P Q



$P \circ Q$

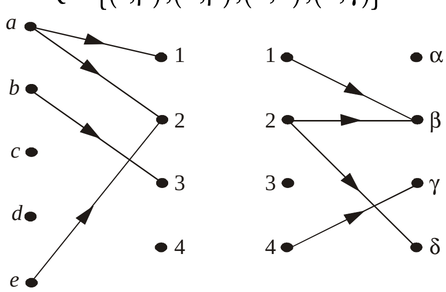


P^{-1} Q^{-1}

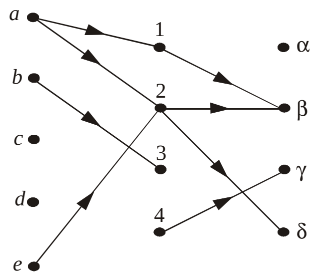


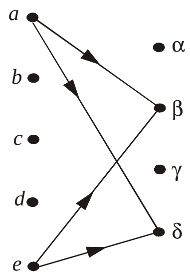
$Q^{-1} \circ P^{-1}$

(b) $P = \{(a,2),(b,3),(a,1),(e,2)\}$ a $Q = \{(1,\beta),(2,\beta),(2,\delta),(4,\gamma)\}$

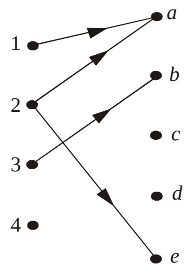


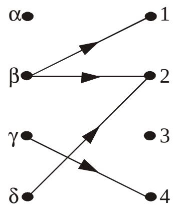
P Q



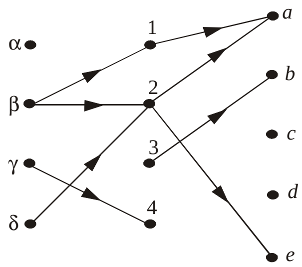


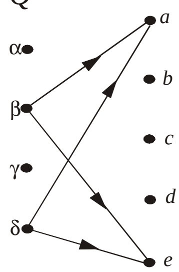
$P \circ Q$





P^{-1} Q^{-1}





$Q^{-1} \circ P^{-1}$

Cvičenie 9.10. Nech $X = \{1,2,3,4\}$, definujme dve binárne relácie „približne rovný“ pomocou charakteristických funkcií takto

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0.8 & (|x-y|=1) \\ 0.3 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}, \quad \mu_Q(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0.7 & (|x-y|=1) \\ 0.4 & (|x-y|=2) \\ 0.1 & (|x-y|=3) \end{cases}$$

Zostrojte zjednotenie a prienik týchto dvoch relácií.

$\mu_P(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.8	0.3	0.1
	2	0.8	1	0.8	0.3
	3	0.3	0.8	1	0.8
	4	0.1	0.3	0.8	1

$\mu_Q(x,y)$		y			
		1	2	3	4
	1	1	0.7	0.4	0.1

	2	0.7	1	0.7	0.4
	3	0.4	0.7	1	0.7
	4	0.1	0.4	0.7	1

$\mu_{P\cap Q}(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.7	0.3	0.1
	2	0.7	1	0.7	0.3
	3	0.3	0.7	1	0.7
	4	0.1	0.3	0.7	1

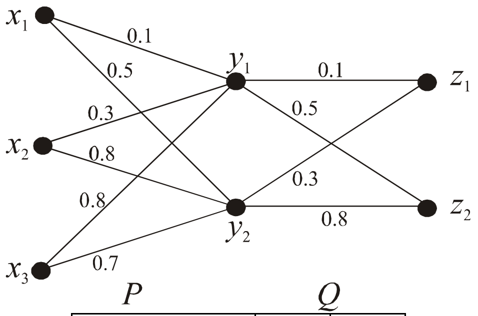
$\mu_{P\cup Q}(x,y)$		y			
		1	2	3	4
x	1	1	0.8	0.4	0.1
	2	0.8	1	0.8	0.4
	3	0.4	0.8	1	0.8
	4	0.1	0.4	0.8	1

Cvičenie 9.11. Nech $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$ a $Z=\{z_1,z_2\}$, definujme dve fuzzy relácie $P\subseteq X\times Y$ a $Q\subseteq Y\times Z$ pomocou tabuliek ich charakteristických funkcií

$\mu_P(x,y)$	y_1	y_2
x_1	0.1	0.5
x_2	0.3	0.8
x_3	0.8	0.7

$\mu_Q(y,z)$	z_1	z_2
y_1	0.1	0.5
y_2	0.3	0.8

Zostrojte relácie $P\circ Q$, P^{-1}, Q^{-1}, $(P\circ Q)^{-1}$ a $Q^{-1}\circ P^{-1}$.



$\mu_{P\circ Q}(x,z)$	z_1	z_2
x_1	0.3	0.5
x_2	0.3	0.8
x_3	0.3	0.7

$\mu_{P^{-1}}(y,x)$	x_1	x_2	x_3

y_1	0.1	0.3	0.8
y_2	0.5	0.8	0.7

$\mu_{Q^{-1}}(z,y)$	y_1	y_2
z_1	0.1	0.3
z_2	0.5	0.8

$\mu_{Q^{-1}\circ P^{-1}}(z,x)$	x_1	x_2	x_3
z_1	0.3	0.3	0.3
z_2	0.5	0.8	0.7

$\mu_{(P\circ Q)^{-1}}(z,x)$	x_1	x_2	x_3
z_1	0.3	0.3	0.3
z_2	0.5	0.8	0.7

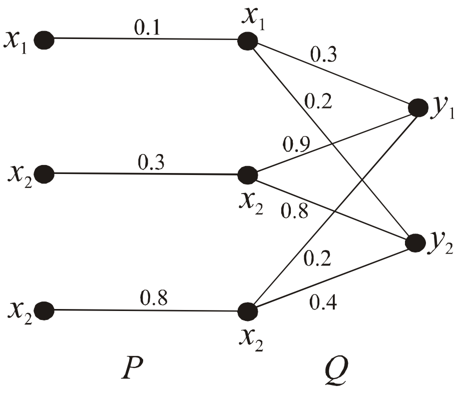
Cvičenie 9.12. Nech $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ a $Y=\{y_1,y_2\}$, definujme diagonálnu fuzzy reláciu $P\subseteq X\times X$ a fuzzy reláciu $Q\subseteq X\times Y$ pomocou tabuliek ich charakteristických funkcií

	$\mu_P(x)$
x_1	0.1
x_2	0.3
x_3	0.8

$\mu_Q(x,y)$	y_1	y_2
x_1	0.3	0.2
x_2	0.9	0.8
x_3	0.2	0.4

Zostrojte kompozíciu $P\circ Q$ a $Q^{-1}\circ P$.

Zostrojte kompozíciu $P\circ Q$ a $Q^{-1}\circ P$.



	$\mu_{P\circ Q}(y)$
y_1	0.3
y_2	0.4

	$\mu_{Q^{-1}\circ P}(y)$
y_1	0.3
y_2	0.4

Cvičenie 9.13. Zistite či formuly sú tautológie fuzzy logiky:
Zistite či formuly sú tautológie fuzzy logiky:

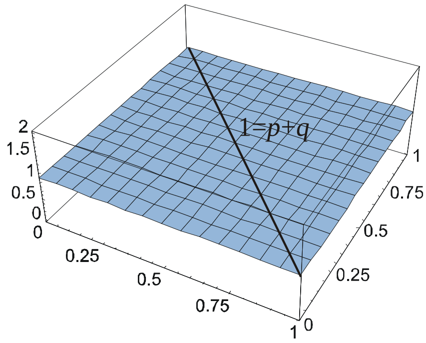
(a) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) = 1$

$p \le (\neg p \Rightarrow q)$

$1-p \le q$, $1 \le q+p$ → $\boxed{p \le 1}$

$1-p > q$, $1 > q+p$ → $p \le (1-(1-p)+q)$ → $p \le p+q$ → $\boxed{0 \le q}$



Formula je tautológia fuzzy logiky.

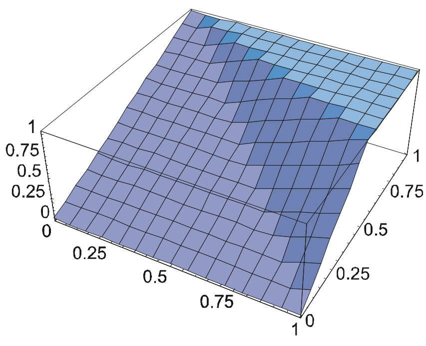
(b) $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow q$

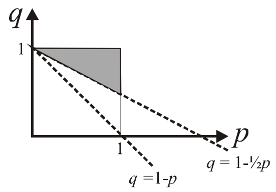
$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow q = 1$

$(p \Rightarrow \neg q) \le q$

$p \le 1-q$ → $1 \le q$ → $\boxed{q=1}$, $\boxed{p=0}$

$p > 1-q$ → $1-p+(1-q) \le q$ → $-1+p+q > 0$, $-2+p+2q \ge 0$ → $q > 1-p$, $q \ge 1-\tfrac{1}{2}p$





Formula nie je tautológia fuzzy logiky.

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) = 1$$

$$(p \Rightarrow q) \le (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

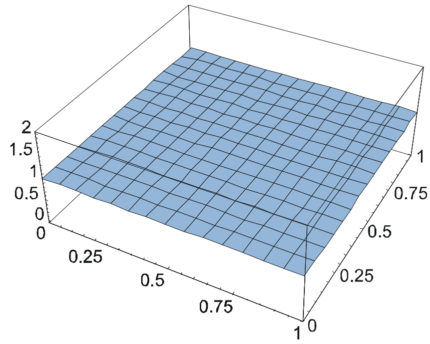
$p \le q$ | $p > q$

$\boxed{1 \le 1}$

$$1\text{-}p+q \le 1\text{-}(1\text{-}q)+(1\text{-}p)$$

$$1\text{-}p+q \le 1\text{-}p+q$$

$\boxed{0 \le 0}$



Formula je tautológia fuzzy logiky.

(d) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q) = 1$$

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \le (p \Rightarrow q)$$

$p \le q$ | $p > q$

$\boxed{1 \le 1}$

$$1\text{-}\neg q+\neg p \le 1\text{-}p+q$$

$$1\text{-}1+q+1\text{-}p \le 1\text{-}p+q$$

$\boxed{1 \le 1}$

Formula je tautológia fuzzy logiky.

(e) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q) = 1$$

$$\neg(p \vee q) \le (\neg p \wedge \neg q)$$

$$1 - max\{p,q\} \le min\{1\text{-}p, 1\text{-}q\}$$

$p \le q$ | $p > q$

$1\text{-}q \le 1\text{-}q$ | $1\text{-}p \le 1\text{-}p$

$\boxed{1 \le 1}$ | $\boxed{1 \le 1}$

Formula je tautológia fuzzy logiky.

(f) $(p \vee q) \Rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$(p \vee q) \Rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) = 1$

$(p \vee q) \leq \neg(\neg p \wedge \neg q)$

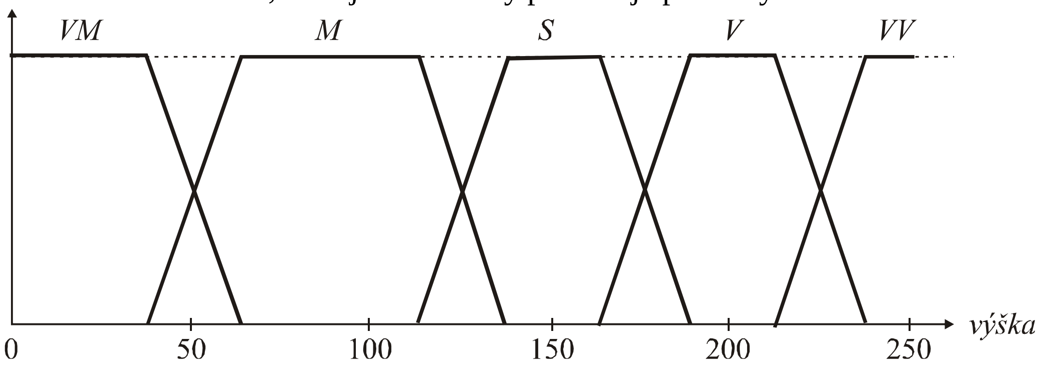
$max\{p, q\} \leq 1 - min\{1\text{-}p, 1\text{-}q\}$

$p \leq q$	$p > q$
$q \leq 1\text{-}(1\text{-}q)$	$p \leq 1\text{-}(1\text{-}p)$
$q \leq q$	$p \leq p$

Formula je tautológia fuzzy logiky.

Cvičenie 9.14. Zostrojte jazykovú premennú X = *výška*, definovanú nad univerzom $X = \{1, 2, ..., 249, 250\}$. Množina slovných hodnôt obsahuje päť slovných hodnôt, $T(\textit{výška}) = \{\textit{veľmi malá}, \textit{malá}, \textit{stredná}, \textit{veľká}, \textit{veľmi veľká}\}$. Pre každú slovnú premennú navrhnite fuzzy množinu s analyticky špecifikovanou charakteristickou funkciou, ktorej kvalitatívny priebeh je podobný ako na obr. 11.6.

Pre každú slovnú premennú navrhnite fuzzy množinu s analyticky špecifikovanou charakteristickou funkciou, ktorej kvalitatívny priebeh je podobný ako na obr. 11.6.



$\mu_{VM}(v) = trap(,0,40,60)$

$\mu_{M}(v) = trap(40,60,120,140)$

$\mu_{S}(v) = trap(120,130,160,180)$

$\mu_{V}(v) = trap(160,180,200,220)$

$\mu_{VV}(v) = trap(220,240,250,)$

Jazyková premenná $(vyska, \{VM, M, S, V, VV\}, U = \{1, 2, ..., 250\}, M)$, kde M je súbor fuzzy množín.

Cvičenie 9.15. Zostrojte reláciu R pre zovšeobecnený modus ponens pomocou štandardnej konjunkcie (Mamdani) pre
(a)

	$\mu_A(x)$
x_1	0.2
x_2	0.3
x_3	0.8

x_4	0.9

	$\mu_B(y)$
y_1	0.5
y_2	0.6
y_3	0.8

$\mu_R(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.2	0.2
x_2	0.3	0.3	0.3
x_3	0.5	0.6	0.8
x_4	0.5	0.6	0.8

(b)

	$\mu_A(x)$
x_1	0.4
x_2	0.3
x_3	0.2

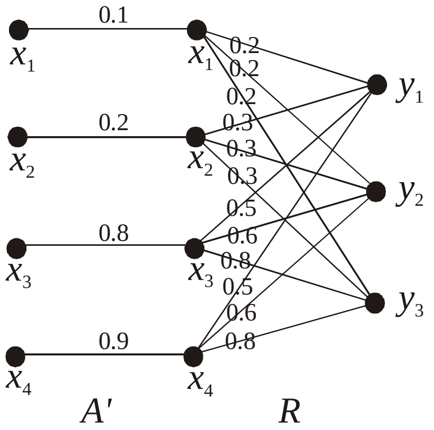
	$\mu_B(y)$
y_1	0.2
y_2	0.4
y_3	0.2
y_4	0.9

$\mu_R(x,y)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.2	0.4	0.2	0.4
x_2	0.2	0.3	0.2	0.3
x_3	0.2	0.2	0.2	0.2

Cvičenie 9.16. Zostrojte pre relácie z predchádzajúceho príkladu odozvu $\mu_{B'}(y)$ na

(a)

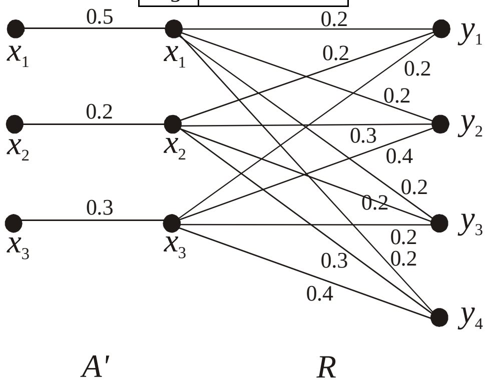
	$\mu_{A'}(x)$
x_1	0.1
x_2	0.2
x_3	0.8
x_4	0.9



	$\mu_{B'}(y)$
y_1	0.5
y_2	0.6
y_3	0.8

(b)

	$\mu_{A'}(x)$
x_1	0.5
x_2	0.2
x_3	0.3



	$\mu_{B'}(y)$
y_1	0.2
y_2	0.4
y_3	0.2
y_4	0.4

Cvičenie 9.17. Zostrojte celkovú reláciu agregáciou parciálnych relácií $P_1: \quad x \in A_1 \rightsquigarrow y \in B_1$ a $P_2: \quad x \in A_2 \rightsquigarrow y \in B_2$, pričom jednotlivé fuzzy premenné sú zadané tabuľkami

	$\mu_{A_1}(x)$
x_1	0.2
x_2	0.1
x_3	0.5
x_4	0.9

	$\mu_{A_2}(x)$
x_1	0.5
x_2	0.2
x_3	0.5
x_4	0.9

	$\mu_{B_1}(y)$
y_1	0.5
y_2	0.7
y_3	0.8

	$\mu_{B_2}(y)$
y_1	0.5
y_2	0.6
y_3	0.9

Parciálne relácie a ich agregácia je

$\mu_{P_1}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.2	0.2
x_2	0.1	0.1	0.1
x_3	0.5	0.5	0.5
x_4	0.5	0.7	0.8

$\mu_{P_2}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0.5	0.5
x_2	0.2	0.2	0.2
x_3	0.5	0.5	0.5
x_4	0.5	0.6	0.9

$\mu_{P_1 \cup P_2}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0.5	0.5
x_2	0.2	0.2	0.2
x_3	0.5	0.5	0.5
x_4	0.5	0.7	0.9