9. kapitola

Viachodnotové logiky

- *trojhodnotová Łukasiewiczova logika a*
- *Zadehova fuzzy logika*

Úvodné poznámky o viachodnotových logikách

- V klasickej logike existujú prípady, keď dichotomický pravdivostný charakter nepostihuje všetky situácie nášho každodenného života. Nie každý výrok sme schopný jednoznačne klasifikovať ako pravdivý alebo nepravdivý. Uvažujme výrok „na Marse existuje život“, ktorý môže byť časťou zloženého výroku – implikácie: „ak na Marse existuje život, potom musí byť podobný životu na Zemi“.

- Snaha dosiahnuť čo najväčšiu zhodu medzi bežným jazykom a logikou, viedli k vytvoreniu celej rady nových netradičných logík, ktoré sú nazývané *neklasické logiky*, v ktorých sú buď zavádzané nové logické spojky, alebo sú skúmané výroky o ktorých nemôžeme s určitosťou povedať, či sú pravdivé alebo nepravdivé a ktorým pripisujeme ďalšie pravdivostné hodnoty.

- Obor pravdivostných hodnôt je v klasickej logike reprezentovaný dvoj-prvkovou množinou {0,1}, môžeme rozšíriť o ďalšie hodnoty, ktorých počet nie je zhora ohraničený. Pôvodná formulácia viachodnotových logík bola založená na princípu trojhodnotovosti. Jej tvorca, poľský logik Łukasiewicz, ukázal, že v bežnom živote často používame legitímne výroky , ktoré nemožno ohodnotiť pomocou jednej z dvoch pravdivostných hodnôt a preto je špecifikovaná treťou pravdivostnou hodnotou, ktorú interpretujeme ako „*neviem*“.

- Neskoršie dokonca bola zostrojená viachodnotová neklasická logika s rozšíreným oborom pravdivostných hodnôt na celý uzavretý interval [0,1]. Tento prístup nazývame "fuzzy" logika, ktorá bola formulovaná koncom 60. rokov americkým kybernetikom a informatikom L. Zadehom.

Trojhodnotová Łukasiewiczova logika

Poľský filozof a logik
Jan Łukasiewicz (1878-1956)

- Poľský filozof a logik Jan Łukasiewicz v r. 1920 poukázal na skutočnosť, že v prirodzenom jazyku sa často stretávame so zmysluplnými výrokmi, ktorých pravdivosť nevieme dobre vyhodnotiť (ako príklad takého výroku je „*na planéte Mars existuje život*“ alebo „*budúci týždeň bude pekné počasie*“). Łukasiewicz navrhol túto situáciu riešiť tak, že množina pravdivostných hodnôt {0,1} je rozšírená na trojhodnotovú množinu {0,½,1}, kde nová pravdivostná hodnota ½ je interpretovaná ako „neviem“.

- V informatike takéto rozšírenie klasickej výrokovej logiky môže byť významné v prípadoch, keď objekty sú popísané binárnymi údajmi, v niektorých prípadoch nám buď chýbajú potrebné údaje alebo existujú principiálne dôvody pre ich neexistenciu, takže chýbajúce údaje doplníme neutrálnou pravdivostnou hodnotou ½.

Funkčné vyjadrenie pravdivostných hodnôt logických spojok v 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logike

logická spojka	funkčné vyjadrenie pravdivostnej hodnoty
$\neg p$	$val(\neg p) = 1 - val(p)$
$p \wedge q$	$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}$
$p \vee q$	$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}$
$p \Rightarrow q$	$val(p \Rightarrow q) = min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}$

Pravdivostné hodnoty logických spojok pre trojhodnotovú Łukasiewiczovu logiku

Konjunkcia

$p \wedge q$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

Implikácia

$p \Rightarrow q$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

Disjunkcia

$p \vee q$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

Negácia

p	$\neg p$
0	1
½	½
1	0

Príklad

Zistite pomocou tabuľkovej metódy, či formula $(p \wedge q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow p \vee q)$ je ***tautológia***.

#	p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$	$(p \wedge q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow p \vee q)$
1	0	0	0	1	0	1	1
2	0	½	0	1	½	1	1
3	0	1	0	1	1	1	1
4	½	0	0	1	½	1	1
5	½	½	½	1	½	1	1
6	½	1	½	1	1	1	1
7	1	0	0	1	1	1	1
8	1	½	½	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1

Platnými formulami v trojhodnotovej Łukasiewiczovej logike sú tieto formuly:

(1) Zákon totožnosti $(p \Rightarrow p)$.

(2) Zákon dvojitej negácie $(\neg\neg p \equiv p)$.

(3) De Morganov zákon pre konjunkciu $(\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q))$.

(4) De Morganov zákon pre disjunkciu $(\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q))$.

(5) Zákon tranzitívnosti implikácie $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

(6) Distribúcia konjunkcie $((p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$.

(7) Distribúcia disjunkcie $((p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$.

(8) Zákon kontrapozície $((p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p))$

(9) Zákon modus ponens $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

(10) Zákon modus tollens $\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$

Príklad

Dokážte pomocou tabuľkovej metódy, že formuly pre zámenu implikácie disjunkciou (ktoré platia v klasickej výrokovej logike)

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q) \text{ a } (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

nie sú tautológie (t. j. nemôžu sa využívať v tejto logike).

(1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

#	p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$
1	0	0	1	1	1	1
2	0	½	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1
4	½	0	½	½	½	1
5	½	½	1	½	½	½
6	½	1	1	½	1	1
7	1	0	0	0	0	1
8	1	½	½	0	½	1
9	1	1	1	0	1	1

(2) $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

#	p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
1	0	0	1	1	1	1
2	0	½	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1
4	½	0	½	½	½	1
5	½	½	½	½	1	1
6	½	1	½	1	1	1
7	1	0	0	0	0	1
8	1	½	0	½	½	1
9	1	1	0	1	1	1

To znamená, že druhá formula $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ je tautológia, zatiaľ čo prvá formula $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ nie je tautológia, potom formula $(\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$ nie je tautológia. Hlavný dôsledok tejto skutočnosti je, že formula $(\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$ sa ***nesmie používať*** pri úprave formúl 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky.

Sémantické vyplývanie

Nech $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_a\}$ je ***teória*** trojhodnotovej Łukasiewiczovej logiky, ktorá obsahuje *a* formúl, ktoré majú *n* premenných. Modelom tejto teórie je množina interpretácii premenných $x_1, x_2, ..., x_n$, $[\![\Phi]\!] = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_b\}$, kde $\tau_i \in \{0, 1/2, 1\}^n$(pre *i* = 1,2,…,b), pre ktoré platí, že pravdivostná hodnota každej funkcie $\varphi_i \in \Phi$ je nenulová, $(\forall \tau \in [\![\Phi]\!])(\forall i \in \{1,2,...,a\})(val_\tau(\varphi_i) > 0)$. Minimálnu hodnotu týchto pravdivostných hodnôt pre danú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$ označíme

$$val_\tau([\![\Phi]\!]) = val_\tau(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_a) = \min_{i \in \{1,...,a\}} \{val_\tau(\varphi_i)\}$$

Tieto úvahy sú zosumarizované pomocou tejto definície.

Definícia. *Ľubovoľná neprázdna množina formúl,* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_a\}$, *sa nazýva* ***teória***. *Ak pre teóriu* Φ *existuje taká interpretácia* τ *, pre ktorú všetky formuly vyhovujú podmienke* $val_\tau(\varphi_i) > 0$, *pre* $i = 1, 2, ..., a$, *potom táto interpretácia* τ *sa nazýva* ***model teórie***. *Teória* Φ *sa nazýva* ***konzistentná***, *ak má model. Ak teória nemá model, potom sa nazýva* ***nekonzistentná***

Podľa teória Φ je konzistentná, ak pre každú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$ platí $val_\tau([\![\Phi]\!]) > 0$; alebo, ak teória Φ je nekonzistentná, potom existuje aspoň jedna interpretácia τ pre ktorú platí $val_\tau([\![\Phi]\!]) = 0$

$$(\Phi\ je\ konzistentá\ teória) =_{def} \forall(\tau \in [\![\Phi]\!]) val_\tau([\![\Phi]\!]) > 0$$

$$(\Phi\ je\ nekonzistentá\ teória) =_{def} \exists\left(\tau \in \{0, ½, 1\}^n\right) val_\tau([\![\Phi]\!]) = 0$$

Definícia. Hovoríme, že formula ψ ***sémantický vyplýva*** z teórie Φ, $\Phi \vDash \psi$, vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu $\tau \in [\![\Phi]\!]$ platí

$$\left(\Phi \vDash \psi\right) =_{def} \forall \tau \in [\![\Phi]\!] \left(val_\tau\left([\![\Phi]\!]\right) \leq val_\tau\left(\psi\right) \right)$$

Predpokladajme, že $\Phi \vDash \psi$, t. j. funkcia ψ sémanticky vyplýva z konzistentnej teórie $\Phi = \left\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_a\right\}$, potom formula $\chi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_a \Rightarrow \psi$ je tautológia, o čom sa môžeme priamo presvedčiť výpočtom pravdivostnej hodnoty funkcie χ. Nech $\tau \in \left\{0,1/2,1\right\}^n$ je ľubovoľná interpretácia premenných, potom

$$val_\tau\left(\chi\right) = val_\tau\left(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi\right) = \begin{cases} 1 & \left(pre\ val_\tau\left(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\right) \leq val_\tau\left(\psi\right)\right) \\ 0 & \left(ináč\right) \end{cases}$$

To znamená, že funkcia χ je tautológia (t. j. $\forall\tau\left(val_\tau\left(\chi\right)=1\right)$) ak pre každé $\tau\in[\![\Phi]\!]$ je splnená podmienka $val_\tau\left(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\right)\leq val_\tau\left(\psi\right)$, táto podmienka musí byť splnená, pretože vyplýva z predpokladu sémantického vyplývania $\Phi\vDash\psi$. Tieto vlastnosti môžeme zosumarizovať do formy nasledujúcej vety.

Veta.
(1) Ak je teória Φ ***konzistentná***, potom existuje taká formula ψ, že z teórie Φ sémanticky vyplýva buď $\Phi\vDash\psi$ alebo $\Phi\vDash\neg\psi$, ale nie súčasne oboje, formálne

$$\Phi \text{ } \textit{je konzistentná} \Rightarrow \left(\exists\psi\right)\left(\left(\Phi\vDash\psi\right)\oplus\left(\Phi\vDash\neg\psi\right)\right).$$

(2) Ak je teória Φ ***nekonzistentná***, potom pre každú formula ψ platí, že sémanticky vyplýva z teórie Φ, $\Phi\vDash\psi$, formálne

$$\Phi \text{ } \textit{je nekonzistentná} \Rightarrow \left(\forall\psi\right)\left(\Phi\vDash\psi\right)$$

Podobne, ako v dvojhodnotovej výrokovej logike, platí aj v trojhodnotovej Łukasiewiczovej logike platí ekvivalencia

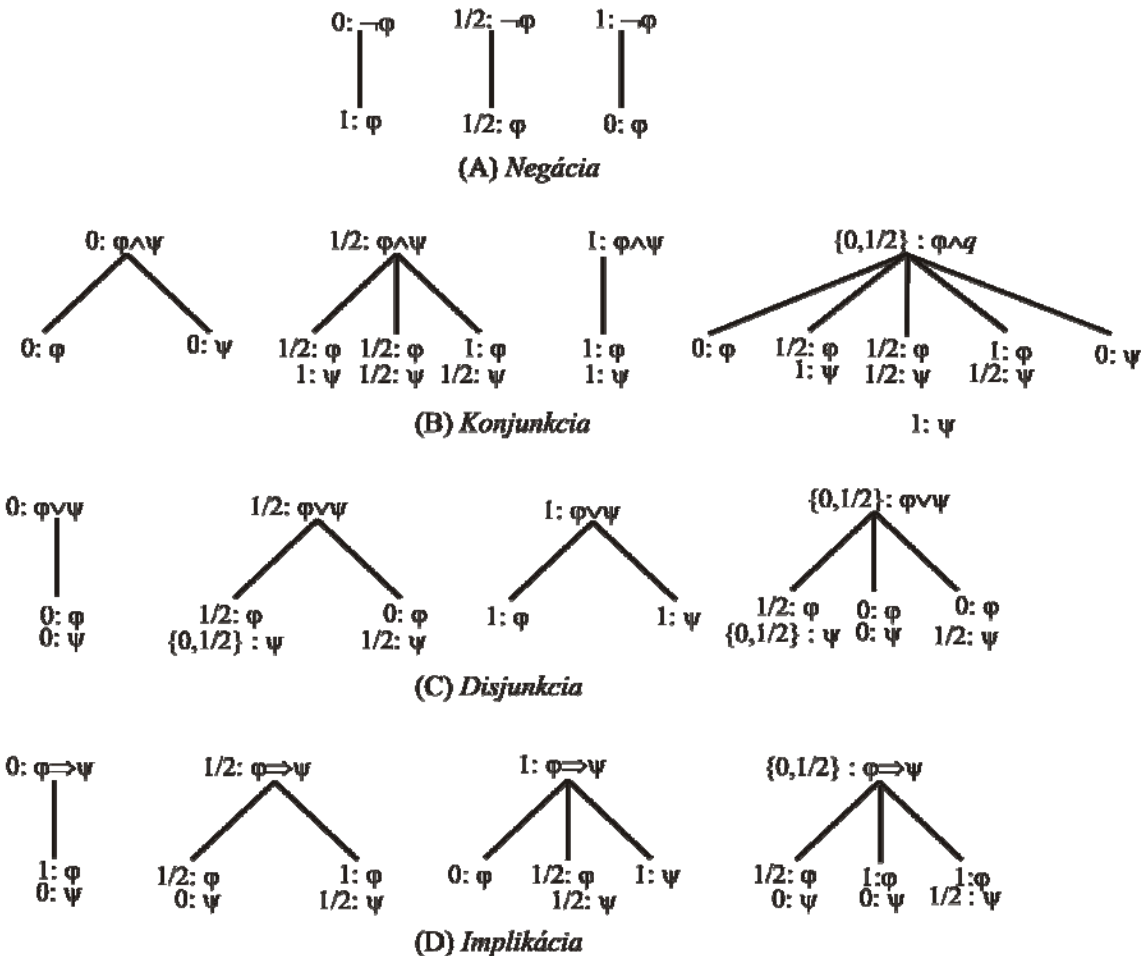
$$\left(\Phi\vDash\psi\right)\equiv\left(\Phi\vdash\psi\right)$$

t. j. táto logika je ***úplná***.

Ohodnotené sémantické tablá pre trojhodnotovú Łukasiewiczovú logiku

Metóda ohodnotených sémantických je aplikovateľná aj v rámci 3-hodnotovej výrokovej logiky. Táto metóda môže byť použitá na zistenie toho, či existujú také pravdivostné hodnoty premenných, aby formula φ mala pravdivostnú hodnotu rovnú požadovanej hodnote $val(\varphi)=\alpha\in\{0,½,1\}$, čo budeme značiť $\alpha:\varphi$. V sémantickom table sled hrán medzi vrchol tabla a koncovými vrcholmi (listami) sa nazývajú vetva. Ak vetva obsahuje výrokové premenné, ktoré nemajú kontradiktórne ohodnotenie, potom danú vetvu nazývame otvorenú; v opačnom prípade, ak obsahuje dvojicu rovnakých premenných, ktoré sú ohodnotené rôznymi pravdivostnými hodnotami (napr 0 : *p* a ½ : *p*), potom vetvu nazývame uzavretá.

Veta. Formula φ je tautológia, ak sémantické tablo priradené ohodnotenej formule $\{0,½\}:\varphi$ obsahuje len uzavreté vetvy.



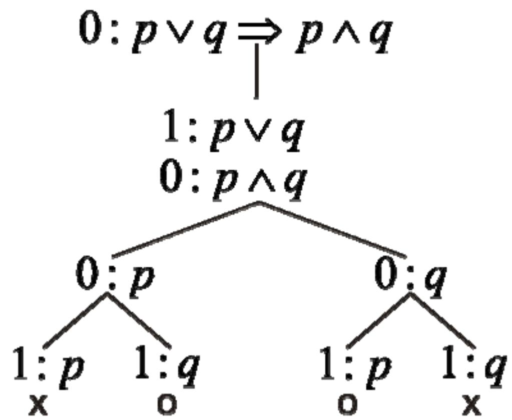
Základné módy tvorby stromu sémantického tabla, kde každá formula je ohodnotená pravdivostnou hodnotou. Tieto expanzie jednotlivých logických spojov vyplývajú bezprostredne z tabuliek pravdivostných hodnôt všetkých logických spojok 3-hodnotovej logiky.

Príklad

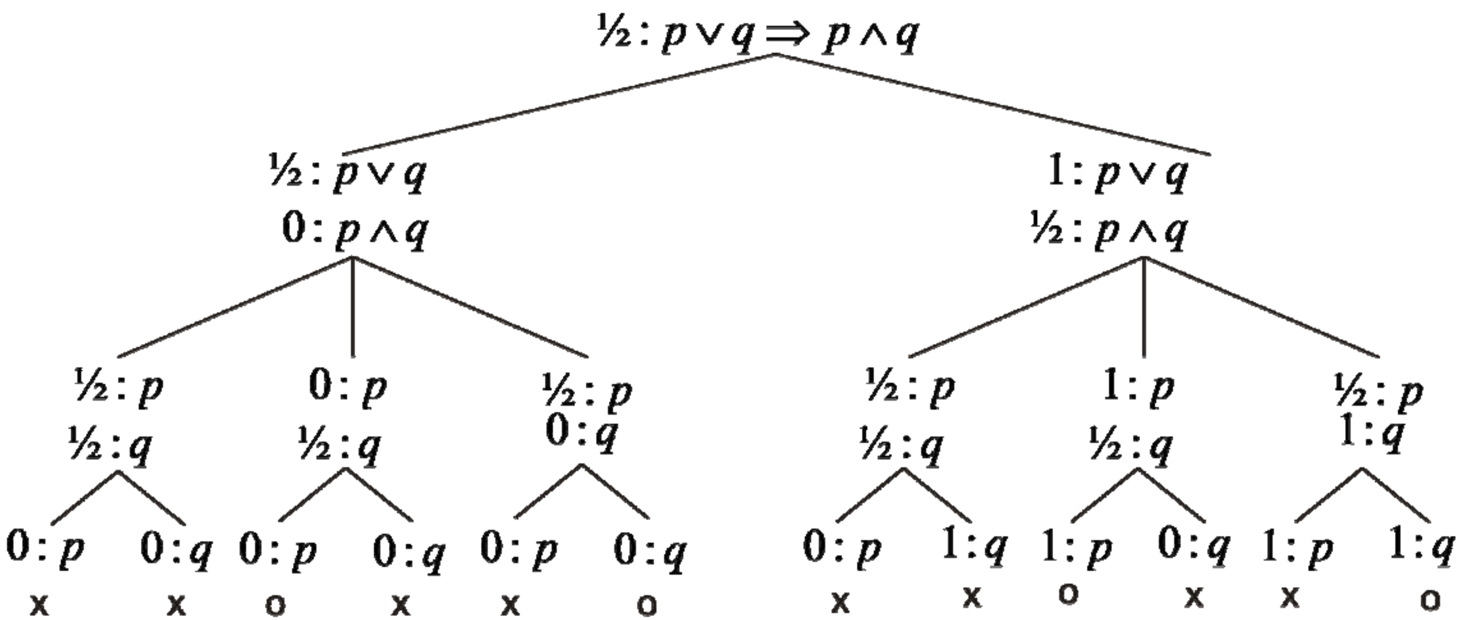
Pre lepšie pochopenie postupu konštrukcie sémantického tabla študujme jednoduchú formulu $\varphi = \left(p \vee q \Rightarrow p \wedge q\right)$, ktorej tabuľka pravivostných hodnôt má tvar

Pravdivostné hodnoty formuly $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$

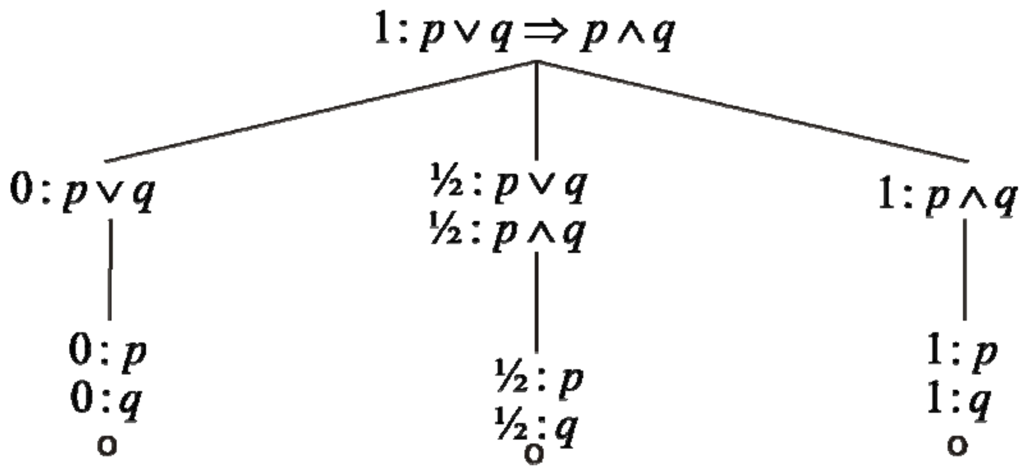
	p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\vee q\Rightarrow p\wedge q$
1	0	0	0	0	1
2	0	½	½	0	½
3	0	1	1	0	0
4	½	0	½	0	½
5	½	½	½	½	1
6	½	1	1	½	½
7	1	0	1	0	0
8	1	½	1	½	½
9	1	1	1	1	1


0: p∨q ⇒ p∧q
1: p∨q
0: p∧q
0: p
0: q
1: p
1: q
1: p
1: q
x
o
o
x

A


½: p∨q ⇒ p∧q
½: p∨q
0: p∧q
1: p∨q
½: p∧q
½: p
½: q
0: p
½: q
½: p
0: q
½: p
½: q
1: p
½: q
½: p
1: q
0: p
0: q
0: p
0: q
0: p
0: q
0: p
1: q
1: p
0: q
1: p
1: q
x
x
o
x
x
o
x
x
o
x
x
o

B

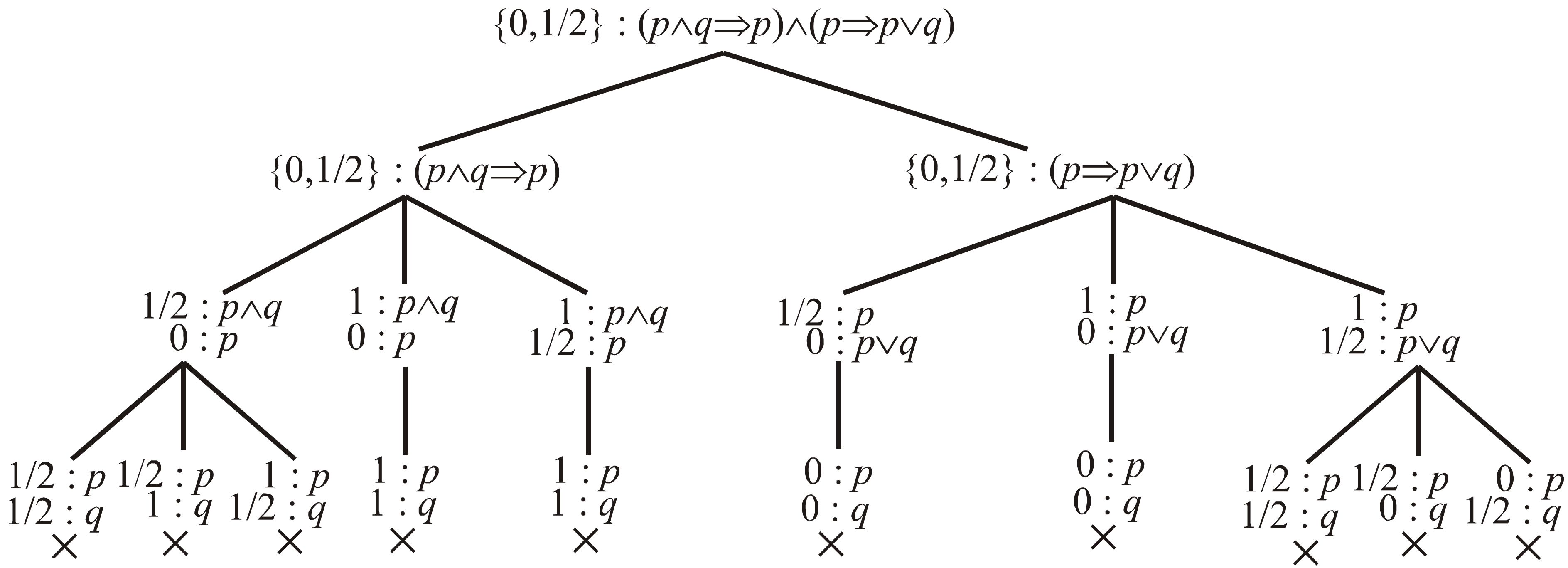


C

Tri sémantické tablá priradené ohodnoteným formulám $\alpha : p \vee q \Rightarrow p \wedge q$, kde $\alpha \in \{0, ½, 1\}$. Vetvy, ktoré obsahujú rovnakú výrokovú premennú ohodnotenú dvoma rôznymi spôsobmi sú uzavreté; v opačnom prípade, keď rovnaké premenné sú ohodnotené rovnakou hodnotou, vetvy sú otvorené. Každá otvorená vetva sa ľahko identifikuje s príslušným riadkom v tabulke pravdivostných hodnôt.

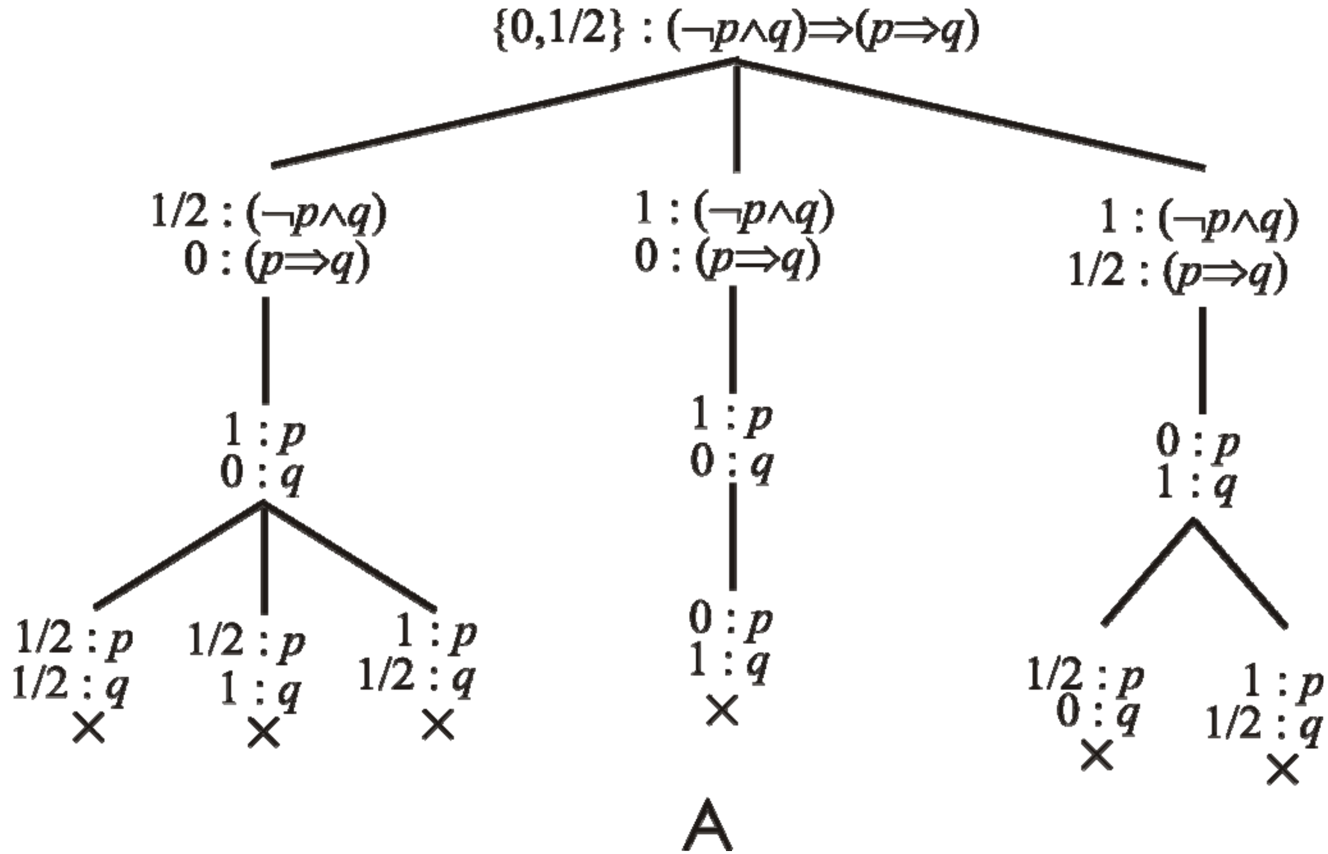
Príklad

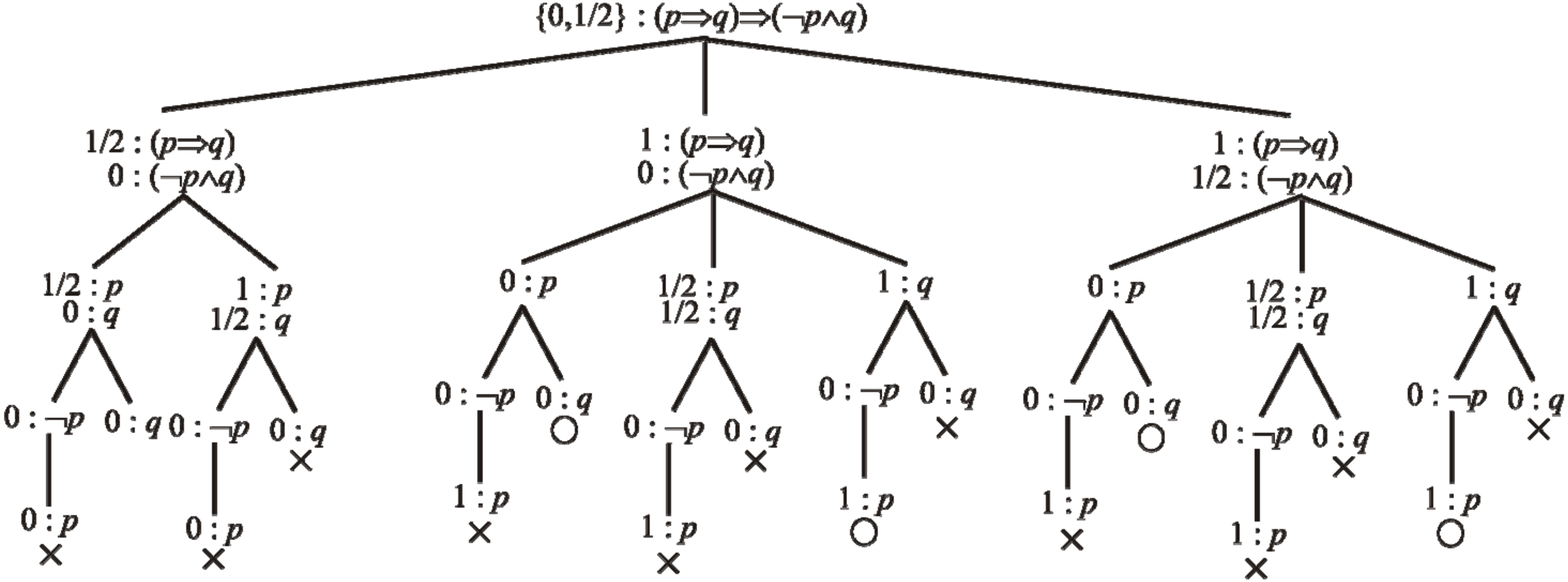
Zistite pomocou metódy sémantického tabla, či formula $(p \wedge q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow p \vee q)$ je tautológia, ohodnotené sémantické tablo $\{0,½\}(p \wedge q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow p \vee q)$ produkuje tablo



Príklad

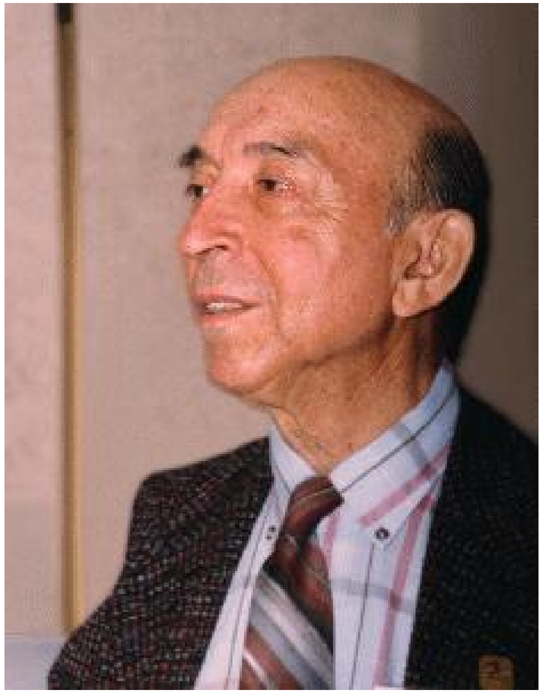
Zistite, či formule $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ a $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ sú tautológie.




{0,1/2} : (p⇒q)⇒(¬p∧q)
1/2 : (p⇒q)
0 : (¬p∧q)
1 : (p⇒q)
0 : (¬p∧q)
1 : (p⇒q)
1/2 : (¬p∧q)
1/2 : p
0 : q
1 : p
1/2 : q
0 : p
1/2 : p
1/2 : q
1 : q
0 : p
1/2 : p
1/2 : q
1 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : ¬p
0 : q
0 : p
0 : p
1 : p
1 : p
1 : p
1 : p
1 : p
1 : p

B

Fuzzy logika a fuzzy množiny



Lotfi A. Zadeh (∗1921), University of California Berkeley

Úvodné poznámky

- Náš svet je plný ***nejasne ohraničených pojmov***, s ktorými však vieme pomerne dobre intuitívne narábať prostredníctvom nášho prirodzeného jazyka.
- Špecifikácia pojmu „mladý“. Okamžite zistíme, že obsah tohto pojmu je ***silne závislý od subjektívnej interpretácie*** a len veľmi ťažko by sme našli úplnú zhodu v interpretácií tohto pojmi od dvoch rôznych ľudí.
- Práve takéto a ***podobné problémy sú študované pomocou fuzzy množín***, ktorá ponúka teoretický aparát, ktorý umožňuje jednoduché modelovanie týchto problémov a ich implementáciu na počítačoch.

- Termín „***fuzzy logika***“ vznikol ako vedľajší produkt rozvoja teórie ***fuzzy množín***, ktoré boli zavedené americkým (narodeného v azarbejdžanskom Baku) kybernetikom Lotfi A. Zadeh, keď v roku 1965 publikoval prácu *Fuzzy sets* v časopise *Information and Control*.
- Fuzzy množiny tvoria ***neobyčajne efektívny teoretický r***ámec pre modelovanie vágnosti pojmov, pomocou ktorého je možné špecifikovať nejasne ohraničené pojmy.
- Zadehove idey sa rýchlo ujali a stali sa ***štandardnou súčasťou nielen informatiky ale aj kybernetiky*** (vedy o riadení a regulácii procesov) ako efektívny inžiniersky prostriedok pre formalizáciu, modelovanie a riadenie systémov, ktoré sú popísané pomocou vágnych pojmov.

fuzz·y (f¾z“¶) *adj.* **fuzz·i·er**, **fuzz·i·est**. **1.** Covered with fuzz. **2.** Of or resembling fuzz. **3.** Not clear; indistinct: *a fuzzy recollection of past events.* **4.** Not coherent; confused: *a fuzzy plan of action.* [Perhaps from Low German *fussig*, spongy. See **pü-** below.] **--fuzz“i·ly** *adv.* **--fuzz“i·ness** *n.*

Fuzzy girl

Fuzzy množiny

Ilustratívny príklad kopy piesku

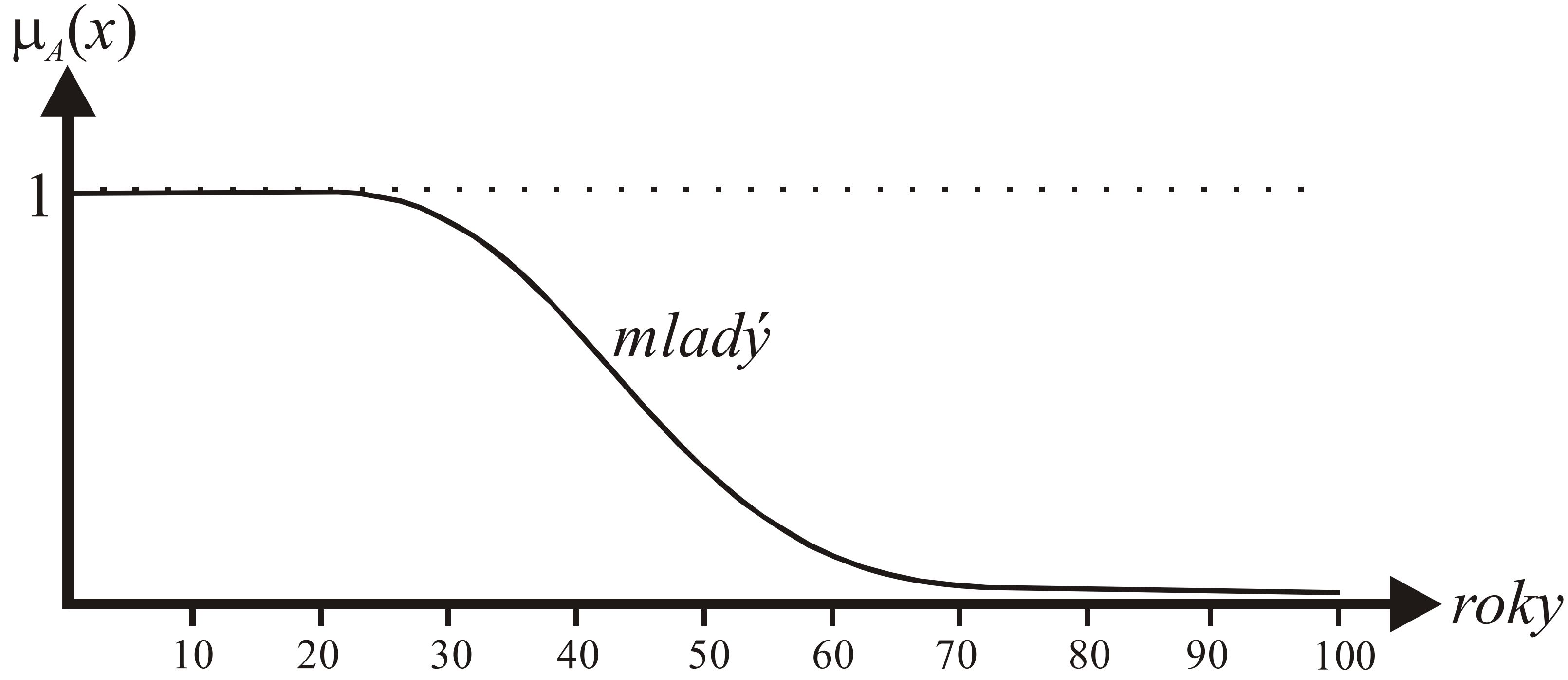
Nech U je univerzum tvorené zo zrniek piesku, $U = \{z_1, z_2, ..., z_n ...\}$, kde z_i je i-té zrnko piesku. Rekurentne budeme vytvárať podmnožinu $K = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ tak, že k nej budeme pridávať jedno zrnko piesku, $K \leftarrow K \cup \{z_{p+1}\}$. Od určitého počtu zrniek piesku (kardinality), množinu K môžeme nazývať *kopa*.

(1) Taxatívne kritérium kopy

$$|K| \geq \vartheta \quad \Rightarrow \quad K \text{ je kopa}$$

(2) Taxatívne kritérium pre kopu piesku je silne zaťažené subjektívnym pohľadom jej tvorcu na to čo, aké množstvo zrniek piesku sa považuje za kopu.

Priebeh charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ fuzzy množiny *A* „mladý“.



Koncepcia fuzzy množín nám poskytuje možnosť ako formalizovať „fuzzy“ pojem mladosti. Nech U je univerzum tvorené prirodzenými číslami od 1 do 100, $U = \{1, 2, ..., 100\}$. Fuzzy množina A vyjadrujúca adjektívum „mladý“ je špecifikovaná charakteristickou funkciou s oborom funkčných hodnôt z uzavretého intervalu $[0,1]$

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

s kvalitatívnym priebehom znázorneným na obrázku Alternatívny názov charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ je stupeň príslušnosti prvku - argumentu x do fuzzy množiny „mladý“

Definícia
Fuzzy množina A je definovaná

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in U\}$$

kde U je univerzum a $\mu_A(x)$ je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti x do A).

Poznámka. Pojem fuzzy množiny A splýva s pojmom jej charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$, ktorá ju spolu s univerzom U jednoznačne určuje. Zápis $x \in A$ (čítame ako x je A) sa v teórii fuzzy množín interpretuje pomocou príslušnej charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ tak, že stupeň príslušnosti elementu x do fuzzy množiny A je učený hodnotou $\mu_A(x)$.

Operácia na fuzzy množinamy

$$A = \{(x, \mu_A(x)) ; x \in U\} \text{ a } B = \{(x, \mu_B(x)) ; x \in U\}$$

(1) *Zjednotenie* fuzzy množín

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)); x \in U\}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

(2) *Prienik* fuzzy množín

$$A \cap B = \left\{ \left(x, \mu_{A \cap B}(x) \right); x \in U \right\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\}$$

(3) *Doplnok* fuzzy množiny

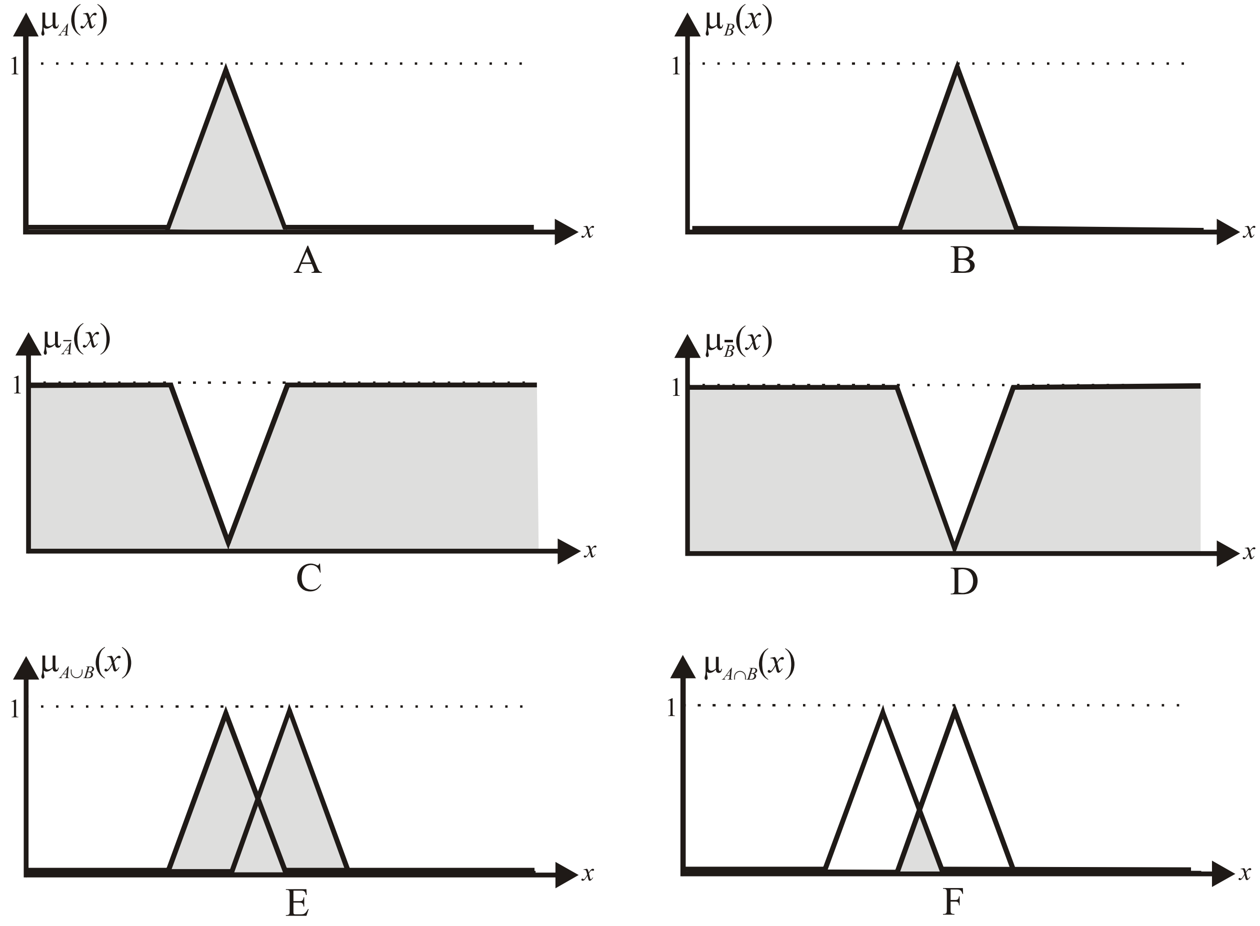
$$\overline{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\overline{A}}(x) \right); x \in U \right\}$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

(4) *Podmnožina* fuzzy množín

$$A \subseteq B =_{def} \forall \left(x \in U \right) \left(\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \right)$$

Priebehy charakteristických funkcií fuzzy množín A a B, ich komplementov , prieniku a zjednotenia.



Ktoré vzťahy platné pre klasické „crisp“ množiny platia aj pre fuzzy množiny?

(1) ***Zákon vylúčenia tretieho*** $A \cup \overline{A} = U$ pre fuzzy množiny je neplatný.

$$\mu_{A \cup \overline{A}}(x) = max\left\{\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)\right\} = max\left\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x)\right\} = 1$$

Táto podmienka evidentne nie je splnená pre fuzzy množiny, kde môže nastať prípad $0 < \mu_A(x) < 1$, potom napr. pre $\mu_A(x) = 0.9$ dostaneme $0.9 = 1$, čo je spor.

(2) ***Zákon sporu*** $A \cap \overline{A} = \varnothing$ je pre fuzzy množiny neplatný

$$\mu_{A \cap \overline{A}}(x) = min\left\{\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)\right\} = min\left\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\right\} = 0$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade tento vzťah neplatí pre fuzzy množiny, kde $0 < \mu_A(x) < 1$.

(3) Distributívny zákon $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ je platný pre fuzzy množiny.

$$\begin{aligned}
\mu_{A \cup (B \cap C)}(x) &= max\left\{\mu_A(x), \mu_{B \cap C}(x)\right\} = max\left\{\mu_A(x), min\left\{\mu_B(x), \mu_C(x)\right\}\right\} \\
&= min\left\{max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, max\left\{\mu_A(x), \mu_C(x)\right\}\right\} \\
&= min\left\{\mu_{A \cup B}(x), \mu_{A \cup C}(x)\right\} \\
&= \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x)
\end{aligned}$$

Fuzzy relácie

Binárna ***relácia*** v klasickej (crisp) teórie množín je definovaná ako ľubovolná podmnožina karteziánskeho súčinu dvoch množín

$$\boxed{R=\left\{\left(x,z\right);x\in A\wedge y\in B\right\}\subseteq A\times B}$$

„Crisp“ relácia R je definovaná pomocou ***charakteristickej funkcie*** takto

$$\boxed{R=\left\{\left(x,y\right);x\in A\wedge y\in B\wedge \mu_R\left(x,y\right)=1\right\}}$$

Príklad

$$\underbrace{\{1,2,3\}}_{A}\times\underbrace{\{p,q\}}_{B}=\left\{\left(1,p\right),\left(2,p\right),\left(3,p\right),\left(1,q\right),\left(2,q\right),\left(3,q\right)\right\}$$

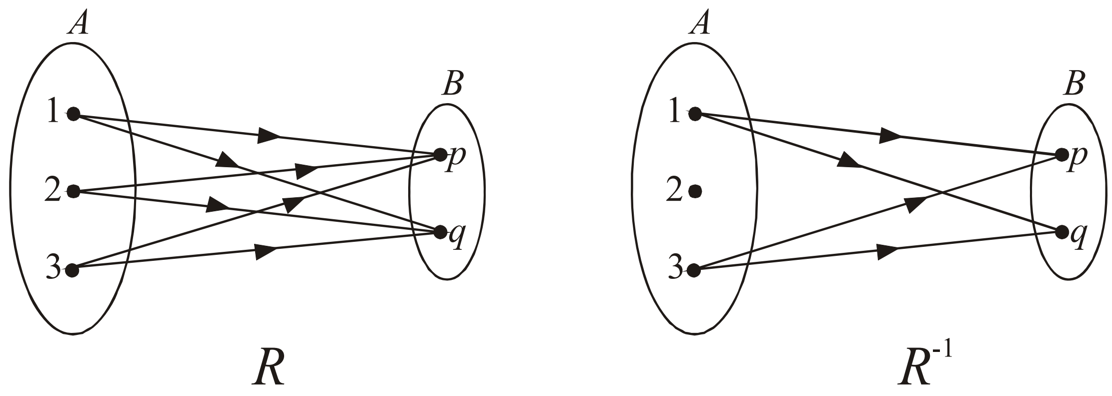
Relácia R je ľubovolná podmnožina tejto množiny , napr.

$$R=\left\{\left(1,p\right),\left(3,p\right),\left(1,q\right),\left(3,q\right)\right\}\subseteq A\times B$$

Inverzná relácia R^{-1} (k relácii R) je definovaná pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x)\in R^{-1}$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y)\in R$

$$\boxed{R^{-1}=\{(y,x);(x,y)\in R\}\subseteq B\times A}$$

Diagramatická reprezentácia inverznej relácie sa zostrojí jednoduchým spôsobom z diagramatickej reprezentácie pôvodnej R tak, že jednotlivé hrany (zobrazenia) zmenia svoju orientáciu.

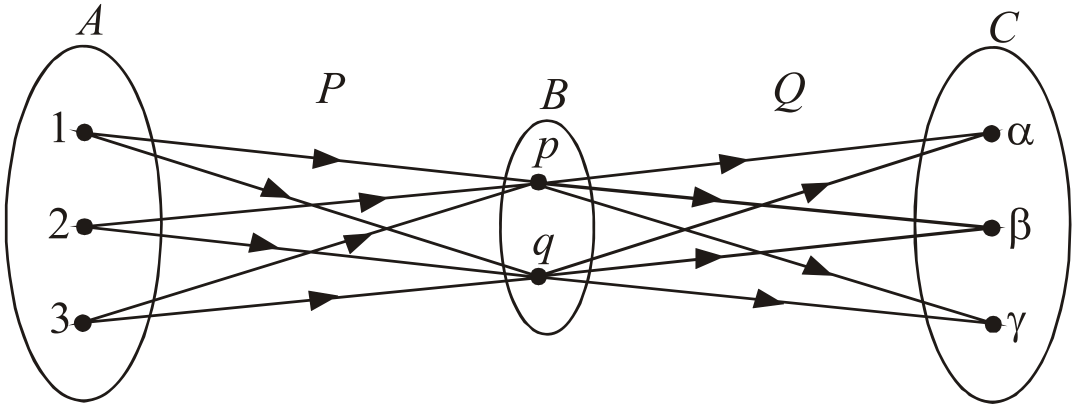


Zložená relácia

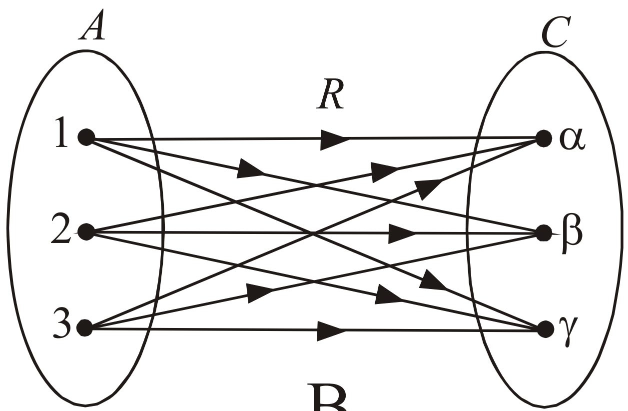
Majme tri množiny A, B a C, pre tieto množiny nech sú definované dve relácie $P \subseteq A \times B$ a $Q \subseteq B \times C$,

Zložená relácia (***kompozícia***) $R = P \circ Q$ je definovaná ako nový relácia $R \subseteq A \times C$ takto

$$\boxed{R = P \circ Q = \left\{ (x,z)\,;\, x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B : (x,y) \in P \wedge (y,z) \in Q \right\}}$$



A

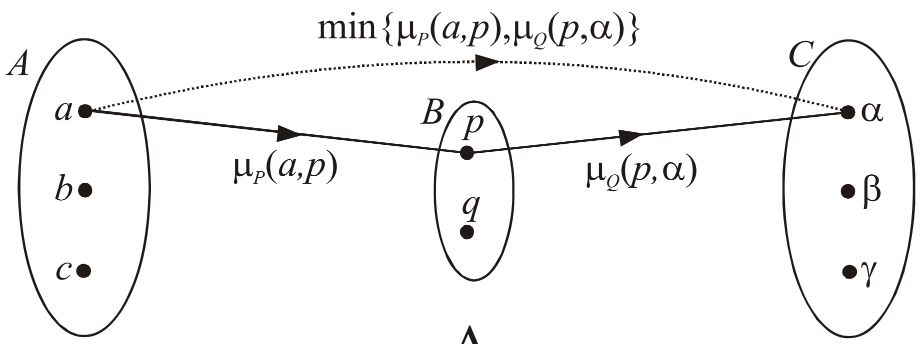


B

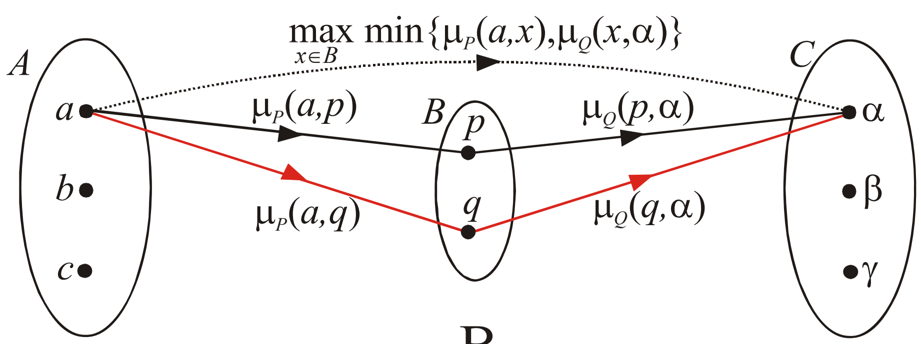
Charakteristická funkcia kompozície $R = P \circ Q$ je určená vzťahom

$$\boxed{\mu_{P \circ Q}(x,z) = \max_{y \in B} min\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\}}$$

Význam tohto vzťahu priamo vyplýva z definície kompozície dvoch relácií P a Q.



A

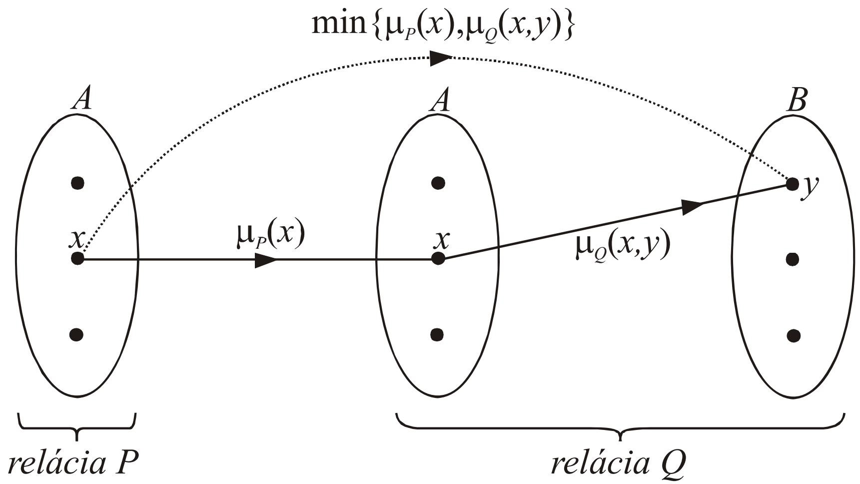


B

Diagonálna relácia

Nech $P \subseteq A \times A$ je ***diagonálna relácia***, ktorej charakteristická funkcia pre nediagonálne elementy je nulová, $\mu_P(x,y)=0$, pre $x \neq y$. Tento typ relácie je formálne určený vzťahom $P=\{(x,x);\, x\in A \wedge \mu_P(x,x)=\mu_P(x)=1\}$. Potom kompozícia diagonálnej relácie $P \subseteq A\times A$ s reláciou $Q \subseteq A\times B$ je určená takto

$$\boxed{\mu_{P\circ Q}(y)=\max_{x\in A} \min\{\mu_P(x),\mu_Q(x,y)\}}$$



Definícia

Fuzzy relácia *R* je definovaná

$$\boxed{R = \left\{ \left((x,y), \mu_R(x,y) \right); (x,y) \in A \times B \right\}}$$

kde *A*, *B* sú dané množiny a $\mu_R(x,y)$je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti dvojice (*x,y*) do relácie *R*).

Kompozícia dvoch fuzzy relácií $P \subseteq A \times B$ a $Q \subseteq B \times C$ je určená analogickými vzťahmi, ktoré boli pôvodne definované pre „crisp“ relácie

$$\mu_{P \circ Q}(x,z) = \max_{y \in B} \min \left\{ \mu_P(x,y), \mu_Q(y,z) \right\}$$

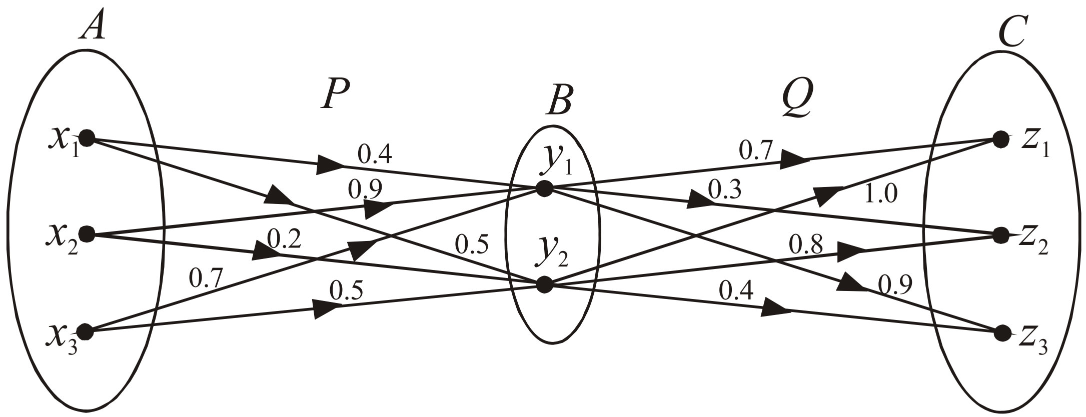
Príklad

Nech fuzzy relácie P a Q sú definované nad dvojicami množín A,B resp. B,C, pričom tieto množiny majú tvar $A=\{x_1,x_2,x_3\}$, $B=\{y_1,y_2\}$, $C=\{z_1,z_2,z_3\}$ a príslušné charakteristické funkcie sú určené tab. 10.2 (pozri taktiež obr. 10.8)

Špecifikácia charakteristických funkcií relácií P a Q

$\mu_P(x,y)$	y_1	y_2
x_1	0.4	0.5
x_2	0.9	0.2
x_3	0.7	0.5

$\mu_Q(x,y)$	z_1	z_2	z_3
y_1	0.7	0.3	0.9
y_2	1.0	0.8	0.4



$$\mu_{P\circ Q}\left(x_1,z_1\right)=max\left\{min\left\{\mu_P\left(x_1,y_1\right),\mu_Q\left(y_1,z_1\right)\right\},min\left\{\mu_P\left(x_1,y_2\right),\mu_Q\left(y_2,z_1\right)\right\}\right\}$$

$$=max\left\{min\left\{0.4,0.7\right\},min\left\{0.5,1.0\right\}\right\}=max\left\{0.4,0.5\right\}=0.5$$

Výsledná charakteristická funkcia relácie $R=P\circ Q$

$\mu_R\left(x,y\right)$	z_1	z_2	z_3
x_1	0.5	0.5	0.4
x_2	0.7	0.3	0.9
x_3	0.7	0.5	0.7

Pretože fuzzy relácia bola definovaná ako fuzzy množina, môžeme nad množinou fuzzy relácií, ktoré sú špecifikované nad rovnakou dvojicou množín A a B definovať operácie zjednotenia a prieniku fuzzy relácií. Nech $P,Q \subseteq A \times B$ sú dve fuzzy relácie s charakteristickými funkciami $\mu_P(x,y)$ resp. a $\mu_Q(x,y)$, potom ich prienik a zjednotenie sú definované v súhlase s definíciami týchto operácii pre fuzzy množiny

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_{P\cap Q}(x,y) &= min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\} \\ \mu_{P\cup Q}(x,y) &= max\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\} \end{aligned}}$$

pre každé $(x,y) \in A \times B$.

Veta.
Nech P, Q a R sú fuzzy relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$\boxed{\begin{gathered}
\left(P \circ Q\right)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1} \\
\left(P \circ Q\right) \circ R = P \circ \left(Q \circ R\right) \\
P \circ \left(Q \cup R\right) = \left(P \circ Q\right) \cup \left(P \circ R\right) \\
\left(Q \cup R\right) \circ P = \left(Q \circ P\right) \cup \left(R \circ P\right) \\
P \circ \left(Q \cap R\right) = \left(P \circ Q\right) \cap \left(P \circ R\right) \\
\left(Q \cap R\right) \circ P = \left(Q \circ P\right) \cap \left(R \circ P\right)
\end{gathered}}$$

Logické spojky

Vzťah medzi klasickou dvojhodnotovou logikou a teóriou (crisp) množín je veľmi blízky, jednotlivé množinové operácie môžu byť vyjadrené pomocou logických spojok:

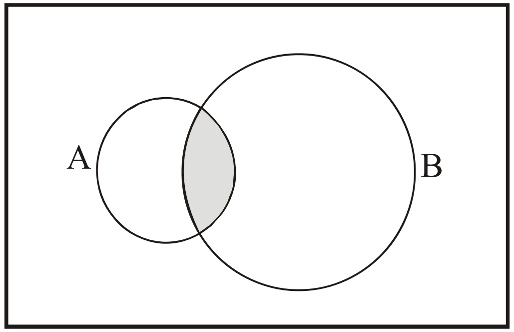
(1) konjunkcia - $A \cap B =_{def} \left\{x; \left(x \in A\right) \wedge \left(x \in B\right)\right\}$

(2) disjunkcia - $A \cup B =_{def} \left\{x; \left(x \in A\right) \vee \left(x \in B\right)\right\}$

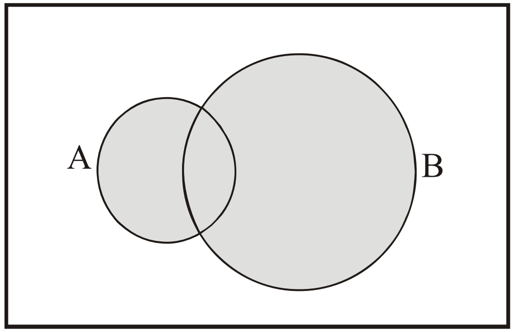
(3) negácia - $\overline{A} =_{def} \left\{x; \neg\left(x \in A\right)\right\}$

(4) implikácia - $A \supset B =_{def} \left\{x; x \in A \Rightarrow x \in B\right\}$

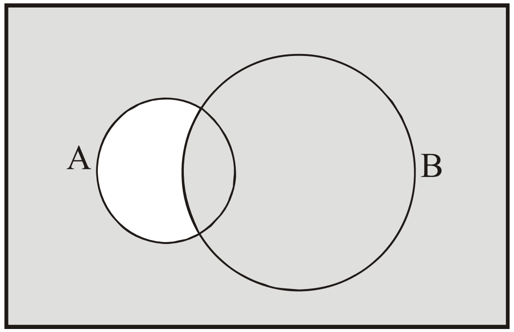
Priradenie medzi množinovými operáciami a výrokovými spojkami konjunkcie, disjunkcie, implikácie a negácie.



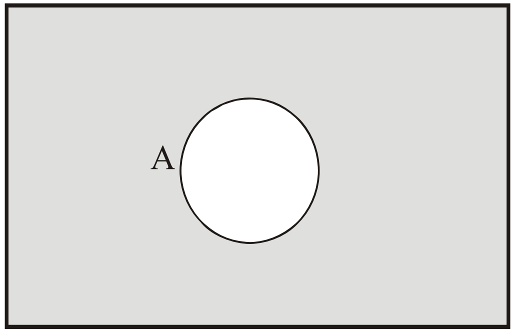
$(A\wedge B)=_{def}(A\cap B)$



$(A\vee B)=_{def}(A\cup B)$



$(A\Rightarrow B)=_{def}(A\supset B)=_{def}(\overline{A}\cup B)$



$\overline{A}=_{def}(\neg A)$

Predpoklad fuzzy logiky

Fuzzy logika je založená na predpoklade, že každému výroku p je priradená pravdivostná hodnta $val\left(p\right)\in[0,1]$ z uzavretého intervalu [0,1].

Fuzzy negácia.

Fuzzy negácia je unárna operácia $\neg:[0,1]\rightarrow[0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

$$\neg\neg p\equiv p$$

$$val\left(p\right)\leq val\left(q\right)\Rightarrow val\left(\neg p\right)\geq val\left(\neg q\right)$$

$$\boxed{val\left(\neg p\right)=1-val\left(p\right)}$$

Fuzzy konjunkcia

Fuzzy konjunkcia je binárna operácia $\wedge:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

(1) komutatívnosť $p \wedge q \equiv q \wedge p$
(2) asociatívnosť $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
(3) okrajová podmienka - identita $p \wedge 1 \equiv p$
(4) $val(q) \leq val(r) \Rightarrow val(p \wedge q) \leq val(p \wedge r)$

$$\boxed{val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}}$$

Fuzzy disjunkcia

Fuzzy disjunkcia je binárna operácia $\wedge:[0,1]^2 \to [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto podmienkam

(1) komutatívnosť $p \vee q \equiv q \vee p$
(2) asociatívnosť $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
(3) okrajová podmienka - identita $p \vee 0 \equiv p$
(4) $val(q) \leq val(r) \Rightarrow val(p \vee q) \leq val(p \vee r)$

$$\boxed{val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}}$$

Operácie konjunkcie a disjunkcie sú duálne vzhľadom k operácii štandardnej negácie (De Morganove vzťahy).

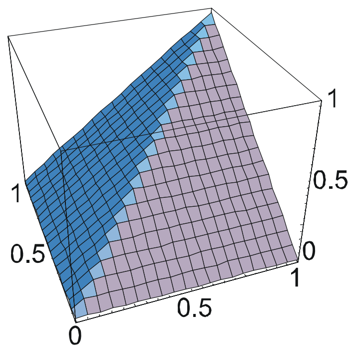
Fuzzy implikácia

Fuzzy implikácia je binárna operácia $\Rightarrow:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ktorá vyhovuje týmto okrajovým podmienkam

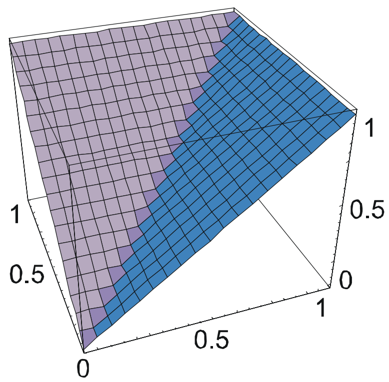
$$val(p \Rightarrow q) = \begin{cases} 1 & (\text{pre}\,(val(p)=0)\,\text{alebo}\,(val(q)=1)) \\ 0 & (\text{pre}\; val(p)=1 \text{ a } val(q)=0) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} val(p \Rightarrow q) &= min\{1, 1-val(p)+val(q)\} \\ &= \begin{cases} 1 & (val(p) \leq val(q)) \\ 1-val(p)+val(q) & (\text{ináč}) \end{cases} \end{aligned}}$$

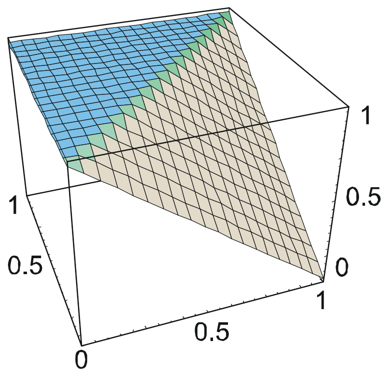
3D grafy logických spojok vo fuzzy logike



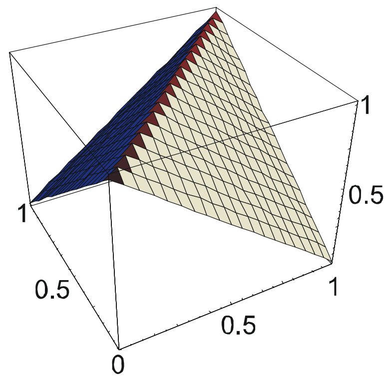
konjunkcia



disjunkcia



implikácia

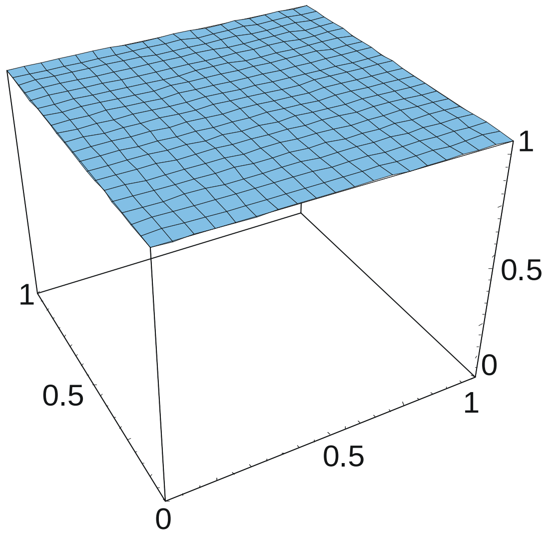


ekvivalencia

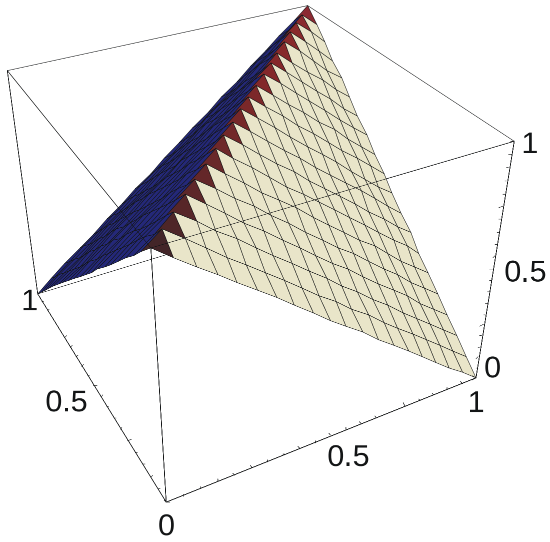
- Implikácia bola pôvodne Zadehom špecifikovaná pomocou negácie a disjunkcie, $(p \Rightarrow q) =_{def} (\neg p \vee q)$. Tento jednoduchý prístup je skoro nepoužiteľný, pretože produkuje ***fuzzy logiku veľmi chudobnú***, kde skoro neexistujú tautológie. Tento nedostatok je odstránený tým, že používane implikáciu zavedenú do logiky Łukasiewiczom v jeho 3-hodnotovej logike.

- Závažný problém fuzzy logiky je **systematické a úplné určenie pravdivostných hodnôt formúl** pre dve alebo viac výrokových premenných. Formula fuzzy logiky s n premmenými $p_1, p_2, ..., p_n$ sa môže chápať ako funkcia n premenných definovaná na hyperkocke $[0,1]^n$.

- Funkcia – formula sa nazýva **tautológia,** ak sa rovná 1 pre ľubovolnú hodnotu argumentov, $F(p_1, p_2, ..., p_n) = 1,$ pre $\forall (p_1, p_2, ..., p_n) \in [0,1]^n$.



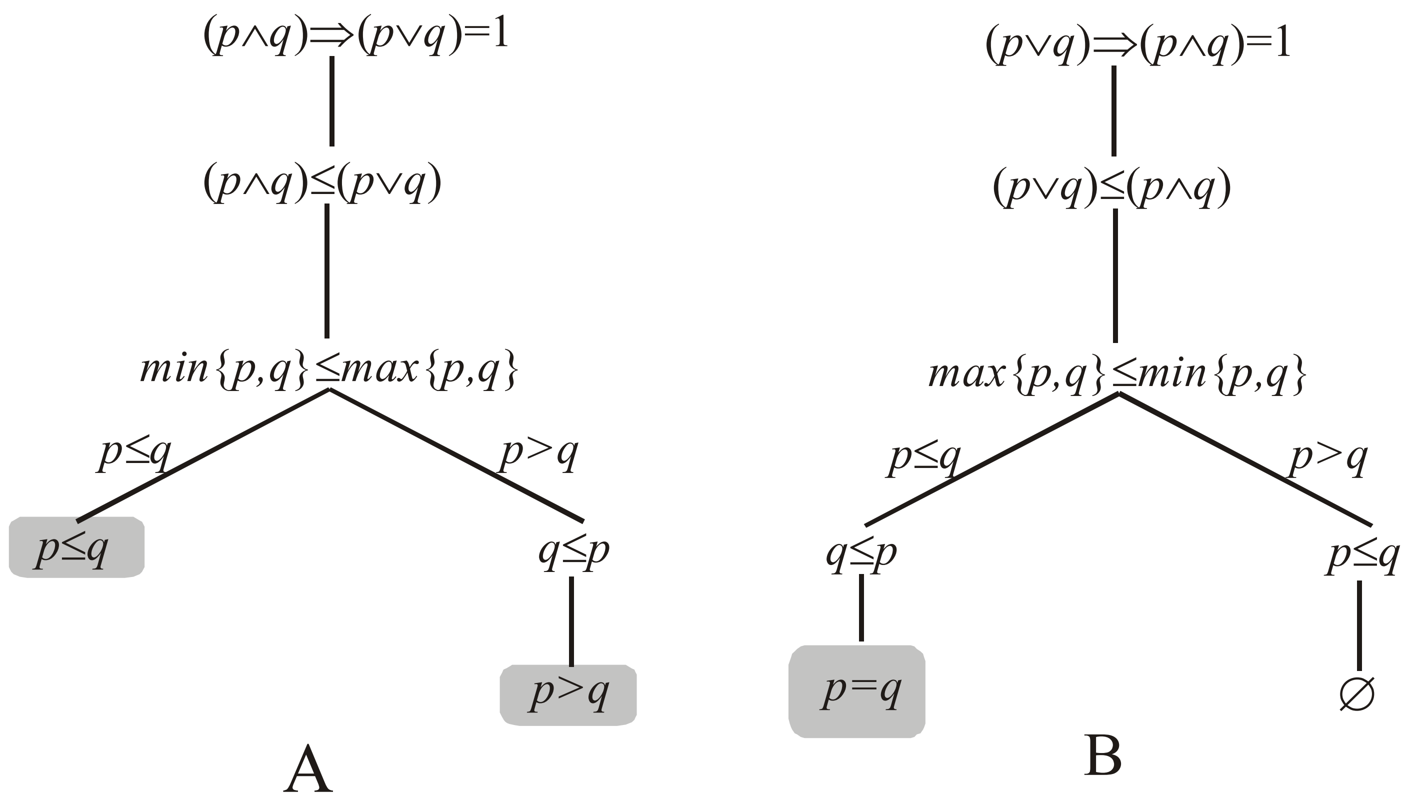
$F(p,q)=((p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q))$



$G(p,q)=((p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q))$

Povrchy výrokových funkcií $F(p,q)$ a $G(p,q)$ pre spojité argumenty $p,q\in[0,1]$. Z priebehov týchto funkcií vyplýva, že funkcia $F(p,q)$ je tautológia, zatiaľ čo, funkcia $G(p,q)$ nie je tautológia.

Sémantické tablá pre formuly fuzzy logiky

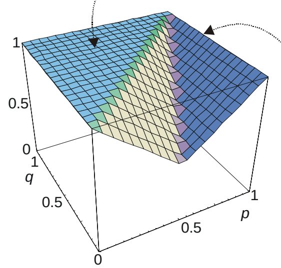


$$F(p,q) = (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$
$$F(p,q) = 1\ \forall p,q \in [0,1]$$

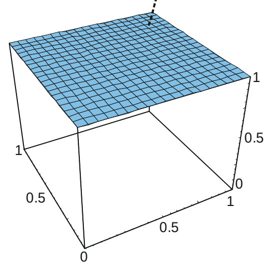
$$G(p,q) = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$
$$G(p,q) = 1\ (len\ pre\ p = q)$$

Príklad

- $(p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q) = 1$
  - $p \wedge (p \Rightarrow q) \leq q$
    - $min\{p, p \Rightarrow q\} \leq q$
      - $p \leq q$: $min\{p, 1\} \leq q$
        - $\boxed{p \leq q}$
      - $p > q$: $min\{p, 1-p+q\} \leq q$
        - $1-p+q \leq q$
          - $1 \leq p$
            - $\boxed{p = 1}$
        - $p \leq q$
          - $\varnothing$



- $(p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q)) = 1$
  - $p \leq (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
    - $(p \Rightarrow q) \leq q$: $\boxed{p \leq 1}$
    - $(p \Rightarrow q) > q$: $p \leq 1-(p \Rightarrow q)+q$
      - $p \leq q$: $p+q \leq 0$
        - $p=0$, $q=0$
      - $p > q$: $q=0$



Usudzovanie vo fuzzy logike

V klasickej logike je jedným zo základných modov usudzovania pravidlo *modus ponens*

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q}$$

Táto schéma môže byť verbálne formulovaná takto

$$\frac{\begin{array}{l} \text{ak } p \text{ je pravdivý výrok a} \\ \text{ak } p \Rightarrow q \text{ je pravdivá implikácia,} \end{array}}{\text{potom } q \text{ je pravdivý výrok}}$$

Modus ponens môže byť alternatívne vyjadrený pomocou výrokovej formuly - tautológie

$$p \wedge \left(\left(p \Rightarrow q \right) \Rightarrow q \right)$$

Pri fuzzy odvodzovaní dôležitým pojmom je *jazyková premenná*, ktorý bol zavedený Zadehom. Jazyková premenná je taký typ premennej, ktorej hodnoty sú slová z prirodzeného jazyka. Ako ilustračný príklad jazykovej premennej uvedieme *vek*, ktorej hodnoty sú špecifikované slovnými hodnotami *mladý*, *stredný* a *starý*.

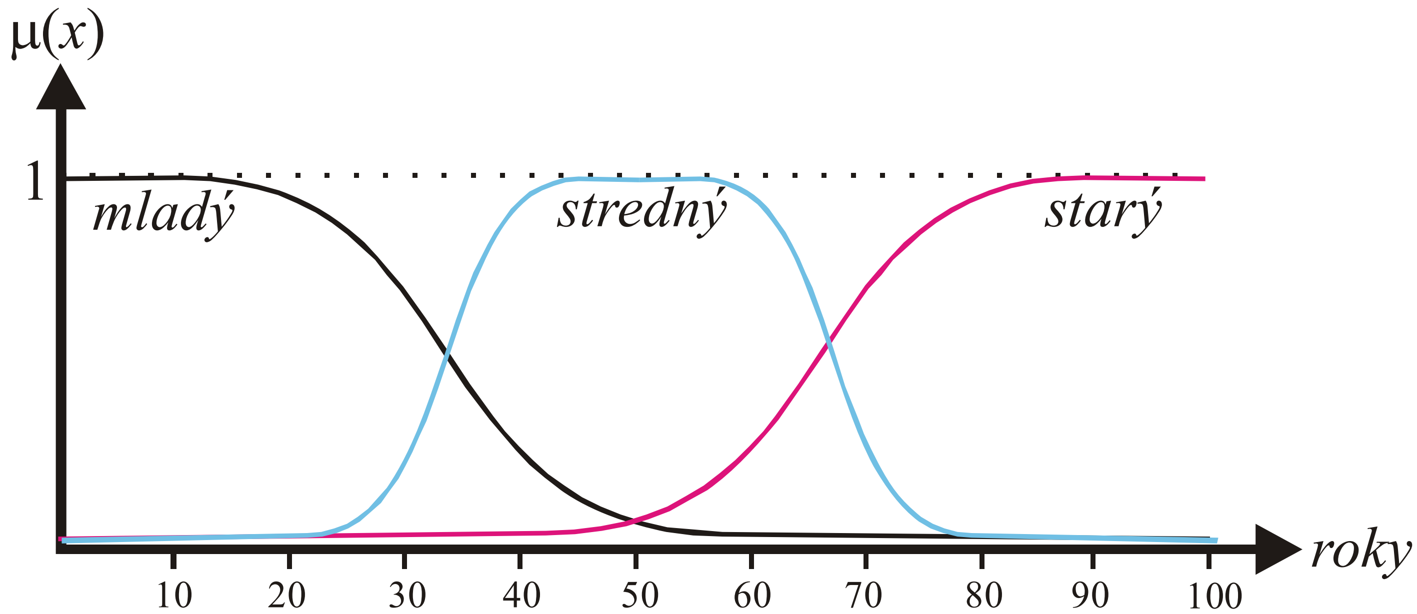
Definícia.
Jazyková (*lingvistická*) *premenná* je určená usporiadanou štvoricou

$$\left(X, T\left(X\right), U, M\right)$$

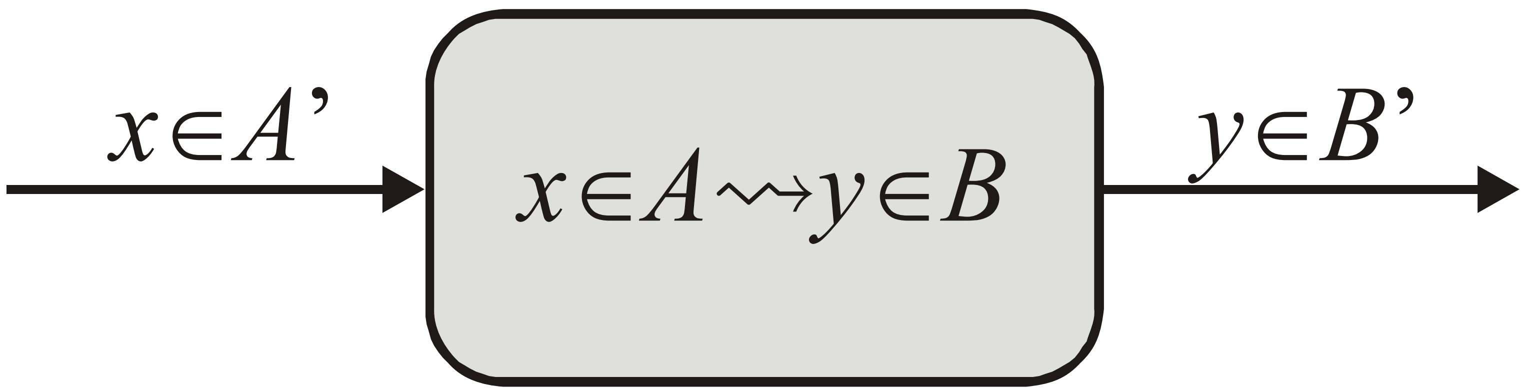
kde X je meno jazykovej premennej, $T\left(X\right)=\left\{A, B, \ldots\right\}$ je množina slovných hodnôt jazykovej premennej, U je univerzum jazykovej premennej, pričom každá slovná premenná $A\in T\left(X\right)$ je špecifikovaná fuzzy množinou $A=\left\{\left(x,\mu_A\left(x\right)\right); x\in U\right\}$, súbor týchto fuzzy množín tvorí množinu *M*.

Príklad

Študujme jazykovú premennú X=*vek*, definovanú nad univerzom rokov reprezentovaným množinou – uzavretým intervalom U =[0,100]. Množina slovných hodnôt obsahuje tri slovné hodnoty, $T\left(vek\right)=\left\{mlad\acute{y},stredn\acute{y},star\acute{y}\right\}$. Každá slovná hodnota je špecifikovaná fuzzy množinou s charakteristickou funkciou



Znázornenie ***zovšeobecneného modus ponens***, ktorý na základe analógie s reláciou $x \in A \rightsquigarrow x \in B\overline{Y}$ vytvára zo vstupnej slovnej premennej A' výstupnú slovnú premennú B', pričom sa predpokladá, že slovné premenné A a A' sú si podobné.



- Uvažujme dve slovné premenné $A \in T(X)$ a $B \in T(Y)$ reprezentované príslušnými fuzzy množinami $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$ a $B = \{(y, \mu_B(Y)); x \in Y\}$.

- Stupeň pravdivosti fuzzy výroku „*x je A*“, formálne vyjadrený vzťahom „$x \in A$“, je popísaný charakteristickou funkciou $\mu_A(x)$; podobne stupeň pravdivosti výroku „$y \in B$“ („*y je B*“) je charakterizovaný charakteristickou funkciou $\mu_B(x)$.

- Tieto dva fuzzy výroky „$x \in A$“ a „$y \in B$“ sú vo vzájomnej (môžeme povedať príčinnej alebo asociačnej) relácii $x \in A \rightsquigarrow x \in B$, podľa ktorej vlastnosť „$x \in A$“ je doprevádzaná výskytom vlastnosti „$y \in B$“ .

Zovšeobecnený modus ponens v relačnom tvare je

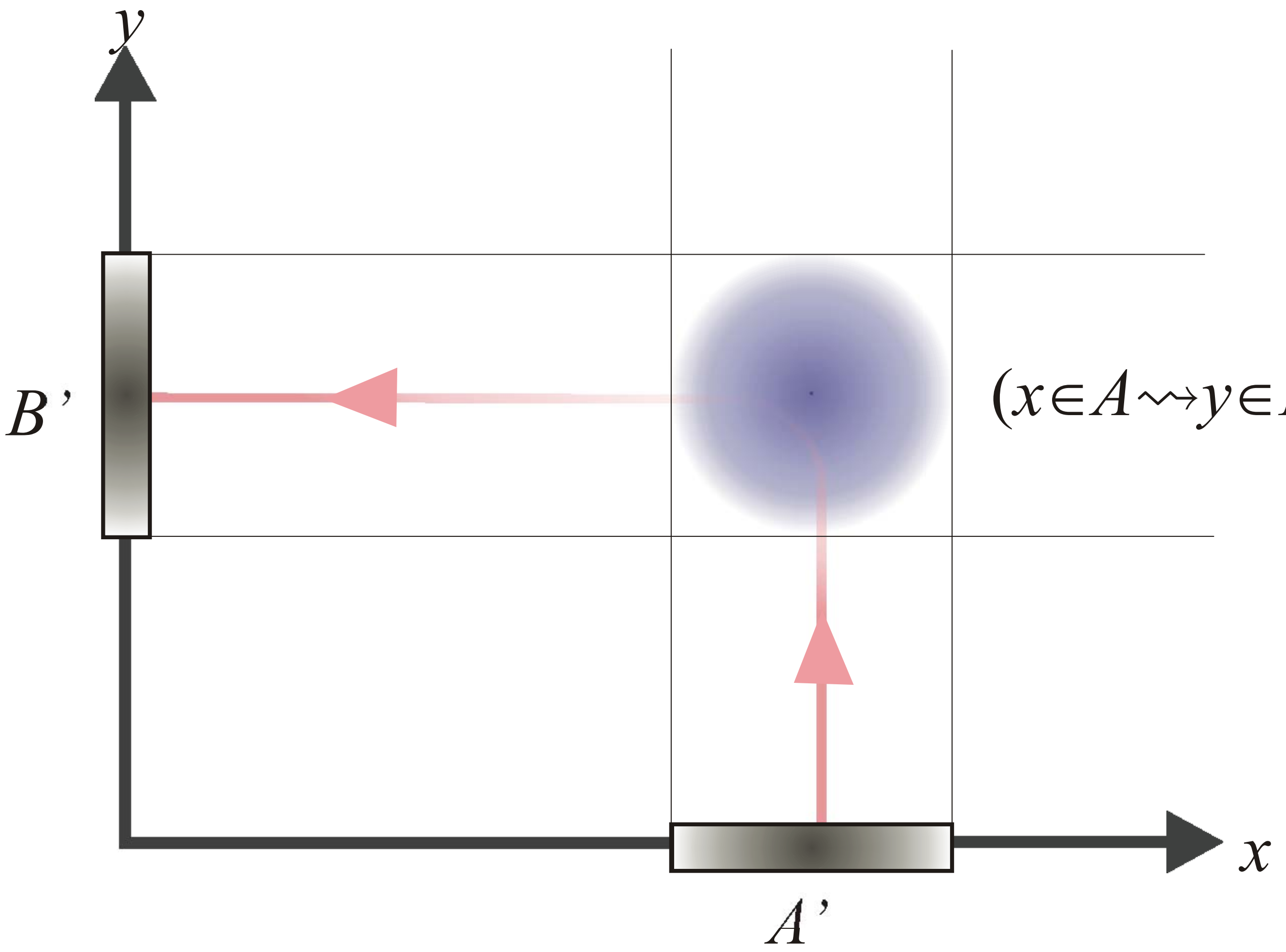
$$\frac{\begin{array}{c} x \in A' \\ x \in A \rightsquigarrow x \in B \end{array}}{x \in B'}$$

kde $A' \in T(X)$ a $B' \in T(Y)$ sú nové slovné premenné, Budeme predpokladať, že nová slovná premenná A' (fuzzy množina) je podobná pôvodnej slovnej premennej A, čo môžeme vyjadriť pomocou charakteristických funkcií napr. takto $\max_x \left| \mu_A(x) - \mu_{A'}(x) \right| < \delta$, kde δ je dané malé kladné číslo.

Tento predpoklad je veľmi dôležitý k odôvodneniu používania zovšeobecneného modus ponens ako nástroja pre odvodenie výstupnej novej slovnej premennej B' zo vstupnej slovnej premennej A' pomocou relácii $x \in A \rightsquigarrow x \in B$ (analógie).

Okrajová podmienka: $A = A' \Rightarrow B = B'$

Znázornenie zobrazenia fuzzy slovnej premennej *A′* na slovnú premennú *B′* pomocou fuzzy relácie *R*(*x*,*y*).



$$(x\in A \rightsquigarrow y\in B) =_{def} R \subseteq X\times Y$$

Rezultujúca charakteristická funkcia $\mu_{B'}(y)$je určená ako kompozícia charakteristickej funkcie $\mu_{A'}(x)$ a charakteristickej funkcie $\mu_R(x,y)$ fuzzy relácie *R*, ktorá reprezentuje vzťah $x \in A \rightsquigarrow x \in B$ (kde symbol $\rightsquigarrow$ znázorňuje fuzzy reláciu *R*)

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in A} \min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\right\}$$

alebo v zjednodušenom tvare $B' = A' \circ R$. Požadujeme, aby kompozícia (11.9a) vyhovovala „*okrajovej podmienke*“, ktorá požaduje, že ak *A´=A* , potom *B´=B, t.j.*

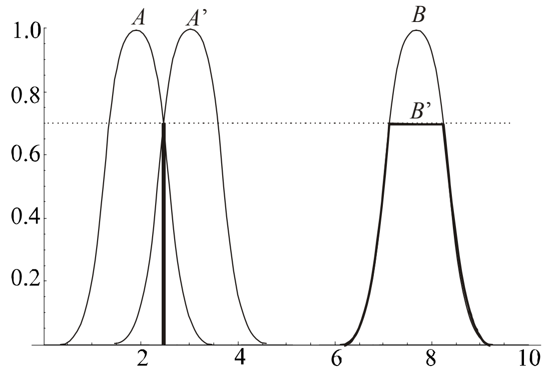
$$\mu_B(y) = \max_{x \in A} \min\left\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\right\}$$

Ebrahim Mamdani, University of London

Realizácia relácie *R*

Kompozície $B' = A' \circ R$ **pre Mamdaniho špecifikáciu relácie** ***R***

$$R = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$



Dokážeme, že pre tento typ relácie je okrajová podmienka kompozície splnená.

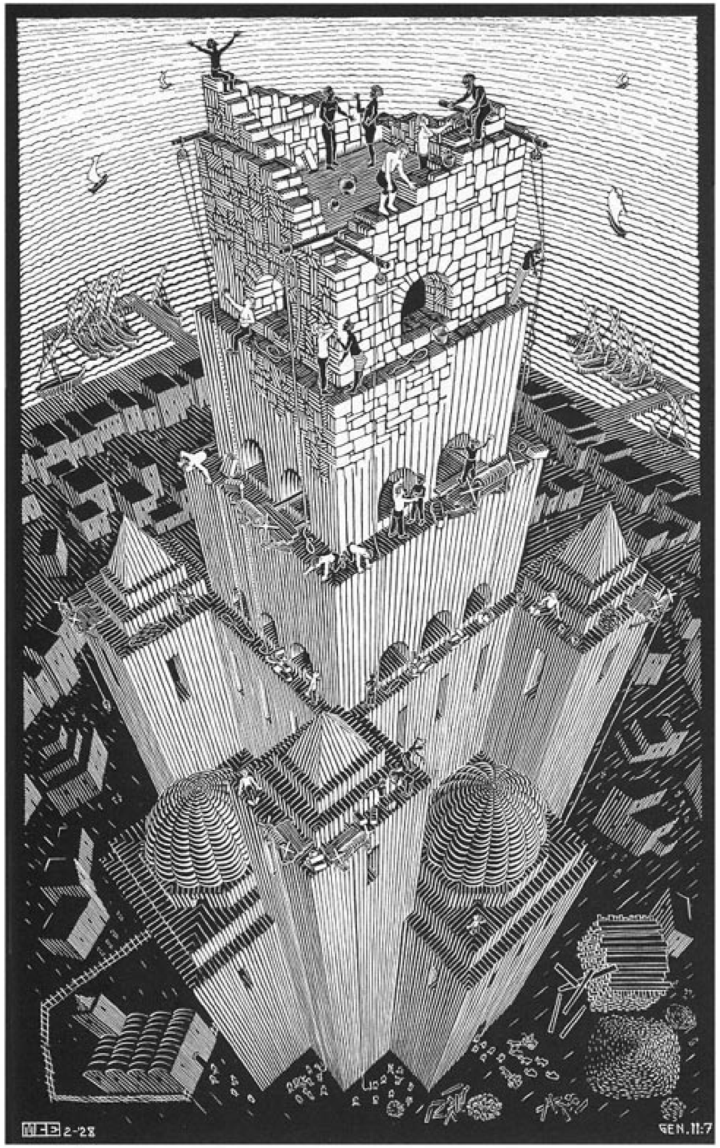
$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in X} min\left\{\mu_{A'}(x), min\left\{\mu_A(x), \mu_B(y)\right\}\right\}$$

Táto formula môže byť jednoducho upravená použitím asociatívnosti operácie *min*

$$\mu_{B'}(y) = min\left\{\underbrace{\max_{x \in X} min\left\{\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\right\}}_{w}, \mu_B(y)\right\}$$

$$= min\left\{w, \mu_B(y)\right\}$$

kde w sa nazýva *váha pravidla* alebo *stupeň zapálenia pravidla*. Potom rezultujúca charakteristická funkcia $\mu_{B'}(y)$ vyhovuje podmienke $\mu_{B'}(y) \leq \mu_B(y)$, pre A=A' dokonca platí $\mu_{B'}(y) = \mu_B(y)$.



The End