Opravná písomka z Mat. Logiky (25. 6. 2015)

Príklad 1. Zostrojte syntaktický strom formuly, nájdite všetky jej podformuly a použitím binárneho stromu zistite pre ktoré interpretácie je formula pravdivá.

$$\big((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\big)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

Príklad 2. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ p\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ q\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}p\Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ p\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ q\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{?},\quad \frac{\begin{array}{l}\neg p\Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{?}.$$

Príklad 3. Ako je definovaný Peircov symbol $\downarrow$, ktorý je nazývaný ako NOR, dokážte ekvivalencie

$$\neg p\equiv(p\downarrow p)$$

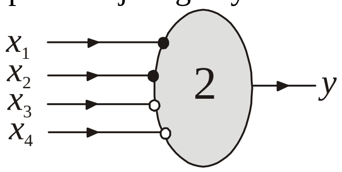
$$(p\wedge q)\equiv(p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$$

$$(p\vee q)\equiv(p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$$

Príklad 4. Ako sú definované DNF a KNF a prepíšte do DNF a KNF formulu

$$\big((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\big)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

Príklad 5. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



Príklad 6. Zostrojte neurónovú sieť pomocou logických neurónov, ktorá simuluje Boolovu funkciu

$$(\alpha_1+\alpha_2)\times\alpha_3=\beta_1\beta_2$$

Príklad 7. Pomocou metódy sémantických tabiel zistite, či formula je tautológia, kontradikcia, alebo len splniteľná

$$(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\Rightarrow\big(p\Rightarrow(q\wedge r)\big)$$

Príklad 8. Pomocou rezolučnej metódy zistite, či platí $T\vDash\alpha$ pre

$T=\{p\Rightarrow q, q\Rightarrow r\}$, $\alpha=p\Rightarrow r$

Príklad 9. Zvoľte takú interpretáciu, aby ste dokázali, že formula nie je tautológia

$$\big(\forall x\,(P(x)\vee Q(x))\big)\Rightarrow\big(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\big)$$

Príklad 10. Nájdite riešenie čo najvšeobecnejšie riešenie sylogizmov

(a) každý študent je včelár
každý informatik je včelár
———
?

(b) žiadny informatik nie je študent
každý včelár je študent
———
?

(c) každý jogín je Ind
každý jogín je svalnatý
———
?

Poznámka: Čas na písomku je 90 min, každý príklad je hodnotený 8 bodmi, t. j. max. počet bodov je 80

Riešenie

Príklad 2. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}}{q},\quad \frac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ q \end{matrix}}{\varnothing},\quad \frac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ \neg p \end{matrix}}{\varnothing},\quad \frac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{matrix}}{\neg p},\quad \frac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ p \end{matrix}}{\varnothing},\quad \frac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ q \end{matrix}}{\varnothing},\quad \frac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \end{matrix}}{q},\quad \frac{\begin{matrix} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \end{matrix}}{p}.$$

Príklad 3. Ako je definovaný Peircov symbol $\downarrow$, ktorý je nazývaný ako NOR, definovaný je takto

$$\boxed{p \downarrow q =_{\text{def}} \neg(p \vee q)}$$

Dokážte tieto tri ekvivalencie

(1) $\neg p \equiv (p \downarrow p)$

(2) $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

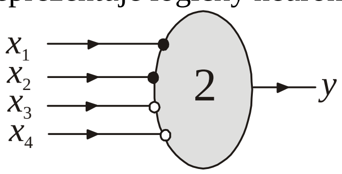
(3) $(p \vee q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

Príklad 4. Ako sú definované DNF a KNF a prepíšte do DNF a KNF formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r))$

(1) DNF: $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)) \equiv (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$

(2) KNF: $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r))$

Príklad 5. Zistite akú Boolovu funkciu reprezentuje logický neurón a napíšte jej NDF formu



#	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	1	0	0	0
6	0	1	0	1	0
7	0	1	1	0	0
8	0	1	1	1	0
9	1	0	0	0	0
10	1	0	0	1	0
11	1	0	1	0	0
12	1	0	1	1	0
13	1	1	0	0	1
14	1	1	0	1	0
15	1	1	1	0	0
16	1	1	1	1	0

$$y = x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4$$

Príklad 6. Zostrojte neurónovú sieť pomocou logických neurónov, ktorá simuluje Boolovu funkciu

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \times \alpha_3 = \beta_1 \beta_2$$

#	α_1	α_2	α_3	$\beta_!$	β_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	1	0

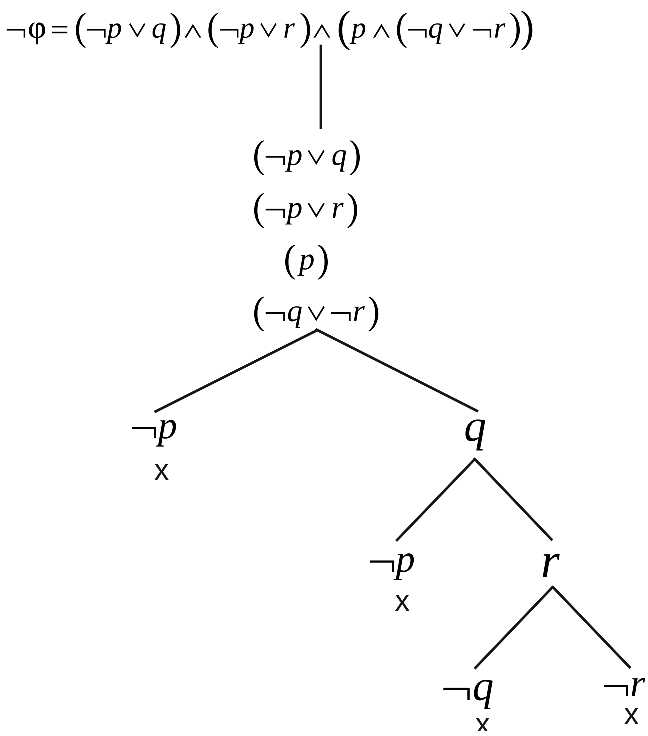
$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \beta_1 = \bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3$$

Príklad 7. Pomocou metódy sémantických tabiel zistite, či formula je tautológia, kontradikcia, alebo len splniteľná

$$\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Rightarrow \left(p \Rightarrow (q \wedge r)\right)$$

K tomu, aby sme zistili, či funkcia φ je tautológia, zostrojíme sémantické table typu DNF pre negáciu ¬φ

$$\neg\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \left(p \wedge (\neg q \vee \neg r)\right)$$



Všetky vetvy sú uzavreté, potom formula φ je tautológia

Príklad 8. Pomocou rezolučnej metódy zistite, či platí $T \models \alpha$ pre

$$T = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}, \ \alpha = p \Rightarrow r$$

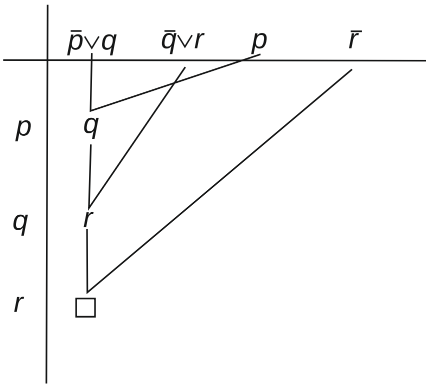
Riešenie. Predpokladajme, že sémantické vyplývanie platí, potom formula

$$\varphi = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

je tautológia alebo formula

$$\bar{\varphi} = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \wedge \bar{r}$$

Je kontradikcia. Ak k dôkazu tejto skutočnosti použijeme rezolventu pre negovanú funkciu $\bar{\varphi}$, potom, v prípade, že metóda produkuje prázdny symbol □, formula $\bar{\varphi}$ je kontradikcia alebo formula φ je tautológia.



Formula φ je tautológia.

Príklad 9. Zvoľte takú interpretáciu, aby ste dokázali, že formula nie je tautológia
$\left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)\right)$

Skusmo použijeme nasledujúcu interpretáciu univerza U a predikátov $P(x)$ a $Q(x)$

$$U = \{1,2,3,4,...\}$$
$$P(x) = \check{c}\acute{\imath}slo\ x\ je\ p\acute{a}rne$$
$$Q(x) = \check{c}\acute{\imath}slo\ x\ je\ nep\acute{a}rne$$

Potom pre každé $x \in U$ výrok

$$\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right) = \left(P(1) \vee Q(1)\right) \wedge \left(P(2) \vee Q(2)\right) \wedge ...$$

je pravdivý výrok a výroky

$$\forall x P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge ...$$
$$\forall x Q(x) = Q(1) \wedge Q(2) \wedge ...$$

sú nepravdivé, potom zložený výrok pomocou implikácie

$$\underbrace{\left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)}_{1} \Rightarrow \underbrace{\left(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)\right)}_{0}$$

je nepravdivý výrok , t.j. skúmaná formula nemôže byť tautológiou, vyššie uvedeným postupom sme falzifikovali predpoklad tautologičnosti.

Príklad 10. Nájdite čo najvšeobecnejšie riešenie sylogizmov

(a) každý študent je včelár
každý informatik je včelár
?

$$
\begin{array}{ll}
1 & \forall x\left(S(x) \Rightarrow V(x)\right) \\
2 & \forall x\left(I(x) \Rightarrow V(x)\right) \\ \hline
3 & S(t) \Rightarrow V(t) \quad pre\ ka\check{z}d\acute{e}\ t \in U,\ prepis\ 1 \\
4 & I(t') \Rightarrow V(t') \quad pre\ ka\check{z}d\acute{e}\ t' \in U,\ prepis\ 2 \\
5 & I(t) \Rightarrow V(t) \quad pre\ t' = t,\ prepis\ 4 \\
6 & S(t) \vee I(t) \Rightarrow V(t) \quad 3\ a\ 5\ prep\acute{\imath}\check{s}eme\ pou\check{z}it\acute{\imath}m\ formuly\ (dok\acute{a}\check{z}te\ pomocou\ indukcie) \\
 & \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q) \\
7 & \boxed{\forall x\left(S(x) \vee I(x) \Rightarrow V(x)\right)} \quad ka\check{z}d\acute{e}\ S\ alebo\ I\ je\ V
\end{array}
$$

(b) žiadny informatik nie je študent
každý včelár je študent

?

$$
\begin{array}{ll}
1 & \forall x\left(I(x)\Rightarrow \overline{S}(x)\right)\\
2 & \forall x\left(V(x)\Rightarrow S(x)\right)\\
\hline
3 & I(t)\Rightarrow \overline{S}(t) \quad \textit{pre každé } t\in U\textit{, prepis } 1\\
4 & V(t')\Rightarrow S(t') \quad \textit{pre každé } t'\in U\textit{, prepis } 2\\
5 & V(t)\Rightarrow S(t) \quad \textit{pre } t'=t\textit{, prepis } 4\\
6 & \overline{S}(t)\Rightarrow V(t) \quad \textit{inverziou } 3\\
7 & I(t)\Rightarrow V(t) \quad \textit{aplikáciou hypotetického sylogizmu}\\
 & \qquad (p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r) \textit{ na } 3 \textit{ a } 6\\
8 & \boxed{\forall x\left(I(x)\Rightarrow V(t)\right)} \quad \textit{každé } I \textit{ je } V
\end{array}
$$

(c) každý jogín je Ind
každý jogín je svalnatý

?

$$
\begin{array}{ll}
1 & \forall x\left(J(x)\Rightarrow I(x)\right)\\
2 & \forall x\left(J(x)\Rightarrow S(x)\right)\\
\hline
3 & J(t)\Rightarrow I(t) \quad \textit{pre každé } t\in U\textit{, prepis } 1\\
4 & J(t')\Rightarrow S(t') \quad \textit{pre každé } t'\in U\textit{, prepis } 2\\
5 & J(t)\Rightarrow S(t) \quad \textit{pre } t'=t\textit{, prepis } 4\\
6 & J(t)\Rightarrow I(t)\wedge S(t) \quad \textit{spojením } 3 \textit{ a } 5 \textit{ pomocou formuly}\\
 & \qquad \left((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\right)\Rightarrow(p\Rightarrow q\wedge r)\,(\textit{dokážte pomocou indukcie})\\
7 & \boxed{\forall x\left(J(t)\Rightarrow I(t)\wedge S(t)\right)} \quad \textit{každý jogín je Ind a svalnatý}
\end{array}
$$