Záverečná písomka z ML, konaná dňa 10. 6. 2015

1. príklad: Odpovedzte na tieto otázky :

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?

2. príklad: Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana a Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš.

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena a Tomáš.

(c) Jano odpočíval alebo Jano pracoval.

3. príklad: Pre formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)$ zostrojte: syntaktický strom a množinu jej podformúl,

4. príklad. Dokážte, že z teórie $T = \{(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow r)\}$ sémanticky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow q \wedge r$, t. j. $\{(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow r)\} \vDash (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

.

Príklad 5. Pomocou rezolventy rozhodnite, či množiny $T_1 = \{\neg p, p \vee \neg q, r \vee q, \neg r\}$ a $T_2 = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$ sú konzistentá alebo nekonzistentné

6. príklad. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formuly:

$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

Príklad 7.

Nájdite riešenie sylogizmov pomocou prirodzenej dedukcie (ak je potrebné, uveďte aj nutné vedľajšie podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý S je V
každý I je V
?

(b) žiadny I nie je S
každý V je S
?

(c) každý J je I
každý J je S
?

Príklad 8.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
(a) $\vdash p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash \left(p \Rightarrow (q \wedge r)\right)$

Príklad 9.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula predikátovej logiky

$$\varphi = (\forall x)\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \Rightarrow \left((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\right)$$

je tautológia.

Príklad 10.
Dokáže priamo z definície, že negácie kvantifikátorov sú určené formulami

$$\neg(\forall x)\, p(x) \equiv (\exists x)\neg p(x)$$
$$\neg(\exists x)\, p(x) \equiv (\forall x)\neg p(x)$$

Poznámka: každý príklad sa hodnotí 8 bodmi (max. počet bodov je 80), čas na písomku je 90 min.,

Riešenie

1. príklad: Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:

(a) čo je formula?
(b) čo je tautológia, kontradikcia, splniteľná formula?
(c) čo je teória a čo je model?
(d) čo znamenajú výrazy $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ a $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vDash \varphi$?

Riešenie:

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny $\{p, q, r, \ldots\}$ a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

formula ::= premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) |
(formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

(b) Formula sa nazýva tautológia (kontradikcia) vtedy a len vtedy, ak pre každú interpretáciu premenných je pravdivá; formula sa nazýva splniteľná vtedy a len vtedy, keď existuje aspoň jedna interpretácia premenných, pre ktorú je pravdivá.

(c) Teóriou sa nazýva každá neprázdna množina formúl. Hovoríme, že teória má model vtedy a len vtedy, ak existuje taká interpretácia, že všetky formuly z teórie sú pravdivé.

(d) Formula φ sa nazýva logický dôsledok množiny formúl $\boldsymbol{T}$ (čo označíme $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak $\varphi \in \boldsymbol{T}$ alebo je bezprostredným dôsledkom $\boldsymbol{T}$ alebo je bezprostredným dôsledkom $\boldsymbol{T}$ rozšírenej o niektoré jej dôsledky.

Formula φ sa nazýva tautologický dôsledok teórie $\boldsymbol{T}$ (čo označíme $\boldsymbol{T} \vDash \varphi$) vtedy a len vtedy, ak každý model teórie $\boldsymbol{T}$ je aj modelom formuly φ (t. j. formula φ je v ňom pravdivá).

2. príklad: Prepíšte vetu z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky, vykonajte nad formulou negáciu, takto získanú formulu preložte do prirodzeného jazyka.

(a) Ak na výlet pôjde Jana a Eva, potom na výlet nepôjde Tomáš.

Riešenie:

p = na výlet pôjde Jana
q = na výlet pôjde Eva
r = na výlet pôjde Tomáš

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = ((p \wedge q) \Rightarrow \neg r) \equiv (\neg(p \wedge q) \vee \neg r)$

$\boxed{\neg\varphi = (p \wedge q) \wedge r}$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Na výlet pôjde Jana, Eva a Tomáš.

(b) Ak na výlet pôjde Eva, potom na výlet nepôjdu Helena a Tomáš.

Riešenie:

p = na výlet pôjde Eva
q = na výlet pôjde Helena
r = na výlet pôjde Tomáš

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = (p \Rightarrow \neg(q \wedge r)) \equiv (\neg p \vee \neg(q \wedge r))$

$\boxed{\neg\varphi = (p \wedge (q \wedge r))}$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: Na výlet pôjde Eva, Helena a Tomáš.

(c) Jano odpočíval alebo Jano pracoval.

Riešenie:

p = Jano odpočíval

q = Jano pracoval

Výrok sa vyjadrí pomocou formuly

$\varphi = (p \vee q)$

$\neg\varphi = (\neg p \wedge \neg q)$

Verbálna formulácia $\neg\varphi$: $\boxed{\text{Jano neodpočíval a nepracoval.}}$

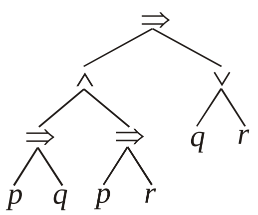
3. príklad: Pre formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)$ zostrojte:

(a) syntaktický strom a množinu jej podformúl,

(b) sémantické tablo a duálne sémantické tablo.

Riešenie:

(a) Syntaktický strom má tvar



Množina podformúl má tvar

$\{p, q, r, p \Rightarrow q, p \Rightarrow r, q \vee r, (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r), ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \vee r)\}$

Príklad 4.

(a) Dokážte, že z predpokladov $T = \{(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow r)\}$ sémanticky vyplýva formula $\varphi = p \Rightarrow (q \wedge r)$, t. j. reláciu sémantického vyplývania $\{(p \Rightarrow q), (p \Rightarrow r)\}$ Ł $(p \Rightarrow (q \wedge r))$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

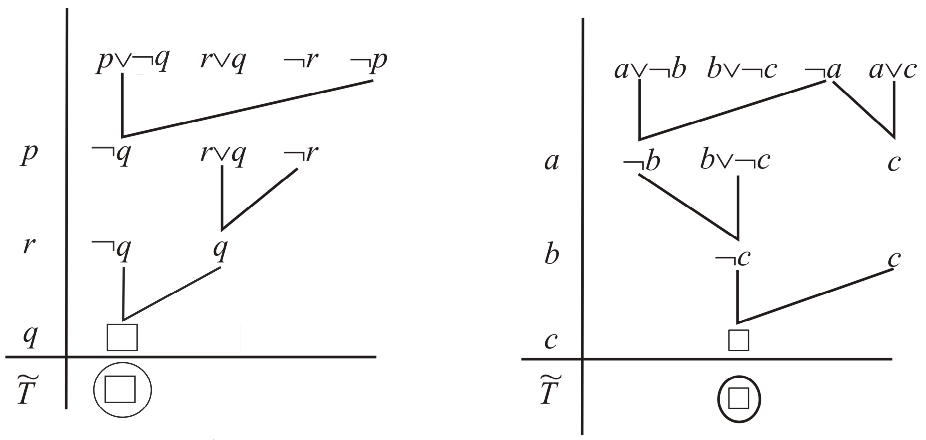
Model teórie má tvar $[\![T]\!] = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$, pre tieto pravdivostné hodnoty je pravdivá aj funkcia

$$\varphi = \bar{p}\bar{q}\,\bar{r} + \bar{p}\bar{q}\,r + \bar{p}q\bar{r} + \bar{p}q\,r + pq\,r = \bar{p}\bar{q}\,(\bar{r} + r) + \bar{p}\bar{r}\,(\bar{q} + q) + \bar{p}q(\bar{r} + r) + \bar{p}\,r\,(\bar{q} + q) + qr\,(\bar{p} + p) =$$

$$= \bar{p}\bar{q} + \bar{p}\bar{r} + \bar{p}\,r + \bar{p}q + qr = \bar{p} + \bar{p}q + qr = p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$\varphi = p \Rightarrow (q \wedge r)$, t. j. platí T Ł φ, QED.

Príklad 5. Pomocou rezolventy rozhodnite, či množiny $T_1 = \{\neg p, p \vee \neg q, r \vee q, \neg r\}$ a $T_2 = \{a \vee \neg b, b \vee \neg c, \neg a, a \vee c\}$ sú konzistentá alebo nekonzistentné



A B

Teórie T_1 a T_2 sú nekonzistentné (produkuje symbol □).

Príklad 6. Pomocou prirodzenej dedukcie odvoďte formulu: $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

1	$(p \Rightarrow q)$	1.predpoklad
2	$(p \Rightarrow r)$	2.predpoklad
3	p	akt.pomoc.predpokladu
4	q	$aplik.\, m.p.\, na\ 1\ a\ 3$
5	r	$aplik.\, m.p.\, na\ 2\ a\ 3$
6	$q \wedge r$	$aplik.\, I \wedge na\ 4\ a\ 5$
7	$p \Rightarrow q \wedge r$	$deakt.\ pomoc.\ predpokladu\ 3$

Príklad 7.

Nájdite riešenie sylogizmov pomocou prirodzenej dedukcie (ak je potrebné, uveďte aj nutné vedľajšie podmienky pre existenciu riešenia)

(a) každý S je V

každý I je V

?

$\forall x [A(x) \Rightarrow V(x)]$

$\forall x [I(x) \Rightarrow V(x)]$

nie je čo dokazovať, **riešenie**: neexistuje

Poznámka k príkladu (a): Existuje riešenie tejto úlohy mimo teórie sylogizmov

1 $\forall x\left[A(x)\Rightarrow V(x)\right]$

2 $\forall x\left[I(x)\Rightarrow V(x)\right]$

---

3 $A(t)\Rightarrow V(t)$ odstránime $\forall$ v (1)

4 $I(t)\Rightarrow V(t)$ odstránime $\forall$ v (1)

5 $\left(A(t)\vee I(t)\right)\Rightarrow V(t)$ použijeme na 3 a 4 tautológiu

$$(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow q)\Rightarrow\left((p\vee r)\Rightarrow q\right)$$

6 $\forall x\left(\left(A(x)\vee I(x)\right)\Rightarrow V(x)\right)$

riešenie: Každé A alebo I je V.

(b) žiadny I nie je S
každý V je S
?

1 $\forall x\left[I(x)\Rightarrow\neg S(x)\right]$

2 $\forall x\left[V(x)\Rightarrow S(x)\right]$

---

3 $I(t)\Rightarrow\neg S(t)$ odstránenie $\forall$ v (1)

4 $V(t)\Rightarrow S(t)$ odstránenie $\forall$ v (2)

5 $S(t)\Rightarrow\neg I(t)$ inverzia implikácie v (3)

6 $V(t)\Rightarrow\neg I(t)$ hypotetický sylogizmus na (4) a (5)

7 $\forall x\left(V(x)\Rightarrow\neg I(x)\right)$ zavedenie $\forall$ v (6), riešenie

riešenie: žiadny *V* nie je *I*.

(c) každý J je I
každý J je S
?

1 $J(a)$ dodatočný predpoklad

2 $\forall x\left[J(x)\Rightarrow I(x)\right]$

3 $\forall x\left[J(x)\Rightarrow S(x)\right]$

---

4 $J(a)\Rightarrow I(a)$ odstránenie $\forall$ v (2)

5 $J(a)\Rightarrow S(a)$ odstránenie $\forall$ v (3)

6 $I(a)$ modus ponens na (1) a (4)

7 $S(a)$ modus ponens na (1) a (5)

8 $I(a)\wedge S(a)$ introdukcia $\wedge$ na (6) a (7)

9 $\exists x\left(I(x)\wedge S(x)\right)$ zavedenie $\exists$ v (8)

riešenie: niektorý I je S (za predpokladu, že existuje aspoň jeden objekt s vlastnosťou J).

Príklad 8.
Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte
(a) $\vdash p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow (q \wedge r))$

1	$p \wedge q$	akt. pomocného predpokladu
2	p	eliminácia konjunjkcie na 1
3	q	eliminácia konjunkcie na 1
4	$p \vee q$	introdukcia disjunkcie na 2
5	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$	deaktivácia pomocného predpokladu

(b) $\{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r\} \vdash (p \Rightarrow (q \wedge r))$

1	$p \Rightarrow q$	1. predpoklad
2	$p \Rightarrow r$	2. predpoklad
3	p	akt. pomocného predpokladu
4	q	aplikácia m.p. na 1 a 3
5	r	aplikácia m.p. na 2 a 3
6	$q \wedge r$	introdukcia konjunkcie na 4 a 5
7	$p \Rightarrow q \wedge r$	deaktivácia pomocného predpokladu

Príklad 9.
Pomocou sémantického tabla zistite, či formula predikátovej logiky

$$\varphi = (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x))$$

je tautológia.
Riešenie: Negácia formuly φ má tvar

$$\neg\varphi = (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$$

sémantické tablo k tejto formule má tvar

$$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))\wedge(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)\neg Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x)\Rightarrow Q(x))$$
$$(\forall x)P(x)$$
$$(\exists x)\neg Q(x)$$

$P(t)\Rightarrow Q(t)$ $\quad \forall t\in U$
$P(t')$ $\quad \forall t'\in U$
$\neg Q(a)$ $\quad \exists a\in U$

$t = t'$ $\qquad$ $t = a$

$\neg P(t)$ $\qquad$ $Q(t)$
x $\qquad$ x

Sémantické tablo je uzavreté, preto formula φ je tautológia.

Príklad 10.
Dokáže priamo z definície, že negácie kvantifikátorov sú určené formulami

$$\neg(\forall x)\,p(x) \equiv (\exists x)\neg p(x)$$

$$\neg(\exists x)\,p(x) \equiv (\forall x)\neg p(x)$$

Riešenie: Kvantifikátory sú definované takto

$$(\forall x)\,p(x) \equiv_{def} \bigvee_{x\in U} p(x) \equiv p(a)\wedge p(b)\wedge \ldots .\wedge p(u)\wedge \ldots$$

$$(\exists x)\,p(x) \equiv_{def} \bigwedge_{x\in U} p(x) \equiv p(a)\vee p(b)\vee \ldots .\vee p(u)\vee \ldots$$

Použitím De Morganových zákonov pre konjukcia/disjunkciu negácie týchto formúl dostaneme

$$\neg(\forall x)\,p(x) \equiv_{def} \bigvee_{x\in U} \neg p(x) \equiv \neg p(a)\vee\neg p(b)\vee \ldots .\vee \neg p(u)\neg \ldots \equiv (\exists x)\neg p(x)$$

$$\neg(\exists x)\,p(x) \equiv_{def} \bigwedge_{x\in U} \neg p(x) \equiv \neg p(a)\wedge\neg p(b)\wedge \ldots .\wedge \neg p(u)\neg \ldots \equiv (\forall x)\neg p(x)$$

QED.