Vladimír Kvasnička
Iveta Dirgová - Luptáková

Úvod do matematiky pre informatikov

Katedra aplikovanej informatiky a matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita sv. Cyrila a Metóda v Trnave
2015

Úvod

Táto kniha – učebnica „*Úvod do matematiky pre informatikov*" je venovaná základným elementárnym pojmom matematiky, ktoré sú potrebné pre zvládnutie bakalárskeho štúdia informatiky v zimnom semestri 1. ročníka (v rámci 2-hodinovej prednáška). V 12 kapitolách je obsiahnutý úvod do logiky (menovite rôzne typy dôkazov), teóriu množín, komplexné čísla, lineárnu algebru a základné partie diferenciálneho a integrálneho počtu spolu s úvodom do teórie diferenciálnych rovníc. Každá kapitola je sprevádzaná množstvom jednoduchých ilustračných príkladov, z ktorých vybrané sa riešia na 2-hodinovom cvičení. Odporúčame čitateľom venovať týmto príkladom pre samoštúdiu dostatočnú pozornosť, podobné príklady sa budú vyskytovať aj pri kontrolných písomkách v priebehu a na záver semestra.

Ďakujeme oponentom doc. RNDr. Márie Markošovej, PhD. (z FMFI UK) a doc. RNDr. Michalovi Šabovi, PhD. (z FChPT STU) za vypracovanie posudkov na tento učebný text.

November 2015

Vladimír Kvasnička a Iveta Dirgová - Luptáková

Obsah

1. kapitola

Metódy matematického dôkazu – deduktívny dôkaz, základné pravidlá usudzovania, matematická indukcia

1.1 Význam dôkazu v matematike

V matematike, podobne ako aj v informatike, vystupujú do popredia dve otázky: (1) Za akých podmienok je matematický dôkaz korektný a (2) aké metódy môžu byť použité pri konštrukcii matematických dôkazov. V tejto kapitole budeme hľadať odpovede na tieto dve otázky, budeme špecifikovať rôzne formy matematických dôkazov.

Veta (teorém, výrok, skutočnosť, fakt, argument, alebo výsledok) je výrok o ktorom môže byť ukázané pomocou metód logiky, že je pravdivý. V tejto súvislosti hovoríme o *dôkaze* vety, ktorý spočíva v postupnosti jednotlivých „medzikrokov“, ktoré sú odvodené buď z množiny jednoduchých postulátov, nazývaných *axiómy*, alebo z predchádzajúcich viet (pomocných viet, často nazývaných lemy) danej postupnosti. Komplikované dôkazy sú obvykle jasnejšie formulované, keď ich dôkaz je rozdelený na jednotlivé medzikroky, ktoré sú formulované ako samostatné vety. Tieto medzikroky - vety v postupnosti sú vytvárané pomocou *pravidiel odvodzovania* (*pravidiel usudzovania*), ktoré z niekoľkých pravdivých tvrdení - argumentov vytvorí nové pravdivé tvrdenie - argument.

Metódy dôkazu diskutované v tejto kapitole sú dôležité nielen pre tvorbu korektných dôkazov matematických viet v matematike, ale aj v samotnej informatike. V teoretickej informatike sa napr. študujú rôzne metódy verifikácie korektnosti programu, alebo či operačný systém je bezpečný. V umelej inteligencii pri odvodzovaní nových faktov z danej databázy poznatkov (množiny výrokových formúl, ktorá sa vo výrokovej logike nazýva teória) je dôležité mať zabezpečené, aby daná databáza bola konzistentná (korektná), teda aby z nej súčasne nevyplýval nejaký výrok a taktiež aj jeho negácia. Môžeme teda konštatovať, že zvládnutie metód matematického dôkazu je dôležité nielen v matematike, ale aj v informatike.

Nižšie uvedená forma dôkazu sa nazýva *deduktívny dôkaz*, ktorý obsahuje:

- *systém elementárnych pojmov*, ktoré sú používané pri formulácii základných zložiek deduktívneho dôkazu
- *systém axióm* (základné elementárne poznatky, ktoré sú pokladané za evidentné),
- *pravidlá odvodzovania* (pomocou ktorých sa uskutočňuje dôkaz).
- *vety* (deduktívne poznatky - argumenty), ktoré boli odvodené z axióm pomocou pravidiel odvodzovania a ktoré podstatne zjednodušujú a skracujú dôkazy ďalších nových deduktívnych poznatkov.

Poznamenajme, že tak v matematike, ako aj v informatike, sa v ojedinelých prípadoch používa aj ***induktívne usudzovanie*** (dôkaz), ktoré je založené na pozorovaní určitých skutočností, ktoré sa často opakujú v analogických situáciách. Tieto pozorované skutočnosti sú „induktívne“ zovšeobecnené. Nové pojmy, ktoré boli zavedené týmto „induktívnym“ spôsobom sa neskoršie buď dokážu deduktívne v rámci daného systému pojmov, alebo sa postulujú ako nové špeciálne axiómy. Tieto ojedinelé situácie v dejinách matematiky vždy znamenali vznik nových oblastí matematiky, ktoré nie sú striktne deduktívne dokázateľné zo známych pojmov a reprezentujú akty kreatívnosti v matematike, ktoré taktiež znamenajú, že matematika nie je len veda deduktívneho charakteru, kde sa dá každý pojem odvodiť z iných jednoduchších poznatkov[1].

1.1.1 Ilustratívny príklad axiomatického systému

Uvažujme jednoduchý axiomatický systém, ktorý obsahuje tri *elementárne pojmy* – ´vrchol´, ´hrana´, ´ležať na´ a dve *axiómy*

A_1. Každý vrchol leží aspoň na jednej hrane.
A_2. Pre každú hranu existujú práve dva vrcholy, ktoré na nej ležia.
A_3. Máme práve 5 vrcholov.

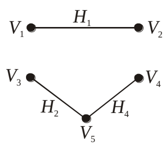
Tento axiomatický systém môže mať rôzne interpretácie. Interpretácia, v ktorej sú axiómy pravdivé výroky, sa nazýva *model* axiomatického systému. Už použitá terminológia navodzuje zavedenie modelu *grafu,* kde vrchol je bod a hrana je čiara obsahujúca na svojich koncoch dva vrcholy, pozri obr. 1.1. Dokážeme tieto dve vety, ktoré vyplývajú z axiomatického systému.

Veta 1.1. Každý graf má aspoň tri hrany.

Podľa axiómy A_1 každý vrchol leží aspoň na jednej hrane, čiže pre ľubovolný vrchol V_1 existuje taká hrana H_1, na ktorej daný vrchol leží. Týmto máme zabezpečenú existenciu hrany H_1, ktorá podľa axiómy A_2 leží na dvoch vrcholoch, tento druhý vrchol označíme V_2. Pre zostávajúce tri vrcholy V_3, V_4 a V_5 musia existovať aspoň dve hrany H_2 a H_3, ktoré ležia na týchto troch vrcholoch.

Veta 1.2. Každý graf má jeden vrchol, ktorý leží aspoň na dvoch hranách.

Dôkaz tejto vety priamo vyplýva zo spôsobu dôkazu vety 1.2. Pretože v druhej časti grafu máme tri vrcholy a dve hrany, musí existovať aspoň jeden vrchol, ktorý leží na dvoch hranách, čo bolo potrebné dokázať (QED). Model , ktorý ilustruje tieto dve vety je znázornený na obr. 1.1.



Obrázok 1.1. Grafový model jednoduchého axiomatického systému z vety 1.1. Diagram znázorňuje model, ktorý obsahuje 3 hrany, pričom práve jeden vrchol leží na dvoch hranách.

Z našich predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že môžeme deduktívny systém rozšíriť o nový elementárny pojem „komponenta“, ktorý popisuje takú časť grafu, z ktorej vrcholy nie sú spojené cestou pozostávajúcou z postupnosti hrán s vrcholmi z ostatných častí. Z obrázku 1.1 vyplýva jednoduchá veta.

Veta 1.3. Ak má graf dve komponenty, potom jedna z komponent obsahuje len jednu hranu.

Z definície komponenty vyplýva, že množina vrcholov je separovaná na dve disjunktné podmnožiny vrcholov, ktoré nie sú prepojené spoločnou hranou a pre každú hranu existujú práve dva vrcholy, ktoré na nej ležia. Z týchto dvoch skutočností vyplýva, že toto disjunktné

[1] To že matematika nie je veda čisto deduktívna má aj iné hlboké dôvody.

rozdelenie množiny vrcholov je možné len na dve podmnožiny, ktoré obsahujú dva a tri vrcholy. Podmnožina s dvoma vrcholmi reprezentuje komponentu.

1.2 Pravidlá usudzovania vo výrokovej logike

Pravidlá usudzovania vo výrokovej logike tvoria schému

$$\left\vert\begin{array}{l} predpoklad_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ predpoklad_n \\ \hline záver \end{array}\right. \qquad (1.1)$$

ktorá obsahuje *n predpokladov* a jeden *záver*. Táto schéma usudzovania je totožná so symbolom *logického dôkazu* [xx]

$$\{predpoklad_1, \ldots, predpoklad_n\} \vdash záver \qquad (1.2)$$

Tabuľka 1.1. Schémy usudzovania výrokovej logiky

Schéma usudzovania	Teorém výrokovej logiky	Názov schémy
$\left\vert\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee q \end{array}\right.$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	adícia
$\left\vert\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline p \end{array}\right.$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	simplifikácia (zjednodušenie)
$\left\vert\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}\right.$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	konjunkcia
$\left\vert\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}\right.$	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	modus ponens
$\left\vert\begin{array}{l} \neg q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \neg p \end{array}\right.$	$\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$	modus tollens
$\left\vert\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}\right.$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	hypotetický sylogizmus
$\left\vert\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}\right.$	$(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	disjunktívny sylogizmus
$\left\vert\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \hline \neg q \Rightarrow \neg p \end{array}\right.$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	inverzia implikácie
$\left\vert\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow \neg q \\ \hline \neg p \end{array}\right.$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p)$	reductio ad absurdum

alebo formálne

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi \qquad (1.2b)$$

Táto formula logického dôkazu môže byť prepísaná do formy

$$\vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi \tag{1.3a}$$

alebo v ekvivalentnom tvare, kde konjunkcie sú nahradené implikáciami

$$\vdash \varphi_1 \Rightarrow \left(\varphi_2 \Rightarrow \left(\Rightarrow ...\left(\varphi_n \Rightarrow \varphi\right)\right)\right) \tag{1.3b}$$

Tabuľka 1.1 obsahuje 8 obvyklých schém usudzovania výrokovej logiky, pričom každá schéma je doprevádzaná aj zákonom (tautológiou) výrokovej logiky (v tvare formuly (1.3b)) a obvyklým historickým názvom. Hovoríme, že predpoklady sú *konzistentné* vtedy a len vtedy, ak existuje aspoň jedna interpretácia pravdivostných hodnôt výrokových premenných, pre ktorú sú všetky predpoklady pravdivé. V opačnom prípade je množina predpokladov *nekonzistentná* (*kontradiktórna*) a je charakterizovaná tým, že z nej súčasne logicky vyplýva nejaký záver a aj jeho negácia.

Príklad 1.1. Majme dva predpoklady: prvý predpoklad je výrok *´prší´* a druhý predpoklad je implikácia *´ak prší, potom je cesta mokrá´* . Použitím pravidla usudzovania modus ponens, z pravdivosti týchto dvoch predpokladov vyplýva pravdivý záver *´cesta je mokrá´*, čo môžeme formálne vyjadriť pomocou schémy

$$\left| \frac{\begin{array}{l} \textit{prší} \\ \textit{ak prší, potom cesta je mokrá} \end{array}}{\textit{cesta je mokrá}} \right. .$$

Príklad 1.2. Použitím schémy usudzovania adície k pravdivému výroku *´teplota je pod bodom mrazu´* môžeme pomocou disjunkcie priradiť ľubovolný výrok (pravdivý alebo nepravdivý), napr. *´prší´*, dostaneme pravdivý záver *´teplota je pod bodom mrazu alebo prší´*

$$\left| \frac{\textit{teplota je pod bodom mrazu}}{\textit{teplota je pod bodom mrazu alebo prší}} \right.$$

Príklad 1.3. Uvažujme dva výroky *´ak dnes bude pršať, potom sa nepôjdem kúpať´* a *´ak sa nepôjdem kúpať, potom navštívim príbuzného´*. Použitím schémy usudzovania nazvanej hypotetický sylogizmus dostaneme z týchto dvoch predpokladov záver *´ak dnes bude pršať, potom navštívim príbuzného´*

$$\left| \frac{\begin{array}{l} \textit{ak dnes bude pršať, potom sa nepôjdem kúpať} \\ \textit{ak sa nepôjdem kúpať, potom navštívim príbuzného} \end{array}}{\textit{ak dnes bude pršať, potom navštívim príbuzného}} \right.$$

Túto schému môžeme sformalizovať pomocou výrokov

p=´dnes prší´

q=´kúpem sa´

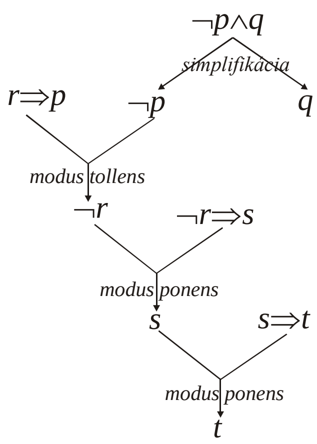
r= ´navštívim príbuzného´

potom schéma má tento formálny tvar mierne modifikovaného hypotetického sylogizmu

$$\left| \frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r} \right.$$

ktorá je odvodená z pôvodnej schémy hypotetického sylogizmu substitúciou, kde výroková premenná q je substituovaná negáciou $\neg q$.

V poslednom príklade 1.3 boli už použité výrokové premenné, ktoré nám umožnia vykonať formalizáciu celého procesu dôkazu pomocou postupnosti elementárnych krokov. Obrátime našu pozornosť na formulu (1.2b) logického vyplývania výrokovej formuly φ z predpokladov, ktoré sú reprezentované formulami φ_1, φ_2,..., φ_n. Logické vyplývanie ilustrujeme jednoduchým príkladom.



Obrázok 1.2. Strom odvodenia pre logický dôkaz z príkladu 1.4.

Príklad 1.4. Postulujme, že množina predpokladov obsahuje tieto formuly – zložené výroky:

φ_1 = ′*dnes poobede nie je slnečno a je chladnejšie ako včera*′

φ_2 = ′*pôjdeme sa kúpať len vtedy, ak bude slnečno*′

φ_3 = ′*ak sa nepôjdeme kúpať, potom sa budeme člnkovať na rieke*′

φ_4 = ′*ak sa budeme člnkovať na rieke, potom sa vrátime domov podvečer*′

požadovaný záver má tvar

φ = ′*budem doma podvečer*′

Pomocou výrokových premenných

p = ′*dnes poobede je slnečno*′

q = ′*je chladnejšie ako včera*′

r = ′ *pôjdeme sa kúpať* ′

s = ′ *budeme člnkovať na rieke*′

t = ′ *vrátime sa domov podvečer*′

vykonáme formalizáciu schémy logického vyplývania do tvaru

$$\{\neg p \wedge q, r \Rightarrow p, \neg r \Rightarrow s, s \Rightarrow t\} \vdash t$$

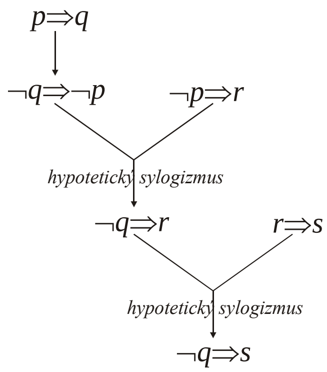
Ukážeme, že táto schéma je platná pomocou postupnosti elementárnych krokov, kde budeme používať schémy usudzovania z tab. 1.1.

1.	$\neg p \wedge q$	predpoklad$_1$
2.	$r \Rightarrow p$	predpoklad$_2$
3.	$\neg r \Rightarrow s$	predpoklad$_3$
4.	$s \Rightarrow t$	predpoklad$_4$
5.	$\neg p$	simplifikácia predpokladu$_1$
6.	q	simplifikácia predpokladu$_1$
7.	$\neg r$	medzivýsledok 5 a modus tollens na predpoklad$_2$
8.	s	medzivýsledok 7 a modus ponens na predpoklad$_3$
9.	t	medzivýsledok 8 a modus ponens na predpoklad$_4$

V úvodnej časti kapitoly 1.1 bolo poznamenané, že dôkaz je možné charakterizovať ako postupnosť formúl, kde posledná formula sa rovná požadovanému záveru, môžeme teda písať

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \Rightarrow p) \rightarrow (\neg r \Rightarrow s) \rightarrow (s \Rightarrow t) \rightarrow (\neg p) \rightarrow (q) \rightarrow (\neg r) \rightarrow (s) \rightarrow (t)$$

Túto postupnosť formúl môžeme reprezentovať aj pomocou „stromu dôkazu" znázorneného na obr. 1.2.



Obrázok 1.3. Strom odvodenia pre logický dôkaz z príkladu 1.5.

Príklad 1.5. Nech množina predpokladov obsahuje tieto zložené výroky:

φ_1 = ´*ak mi pošleš email, potom program dokončím*´

φ_2 = ´*ak mi nepošleš email, potom pôjdem spať včasnejšie*´

φ_3 = ´*ak pôjdem spať včasnejšie, potom sa ráno zobudím odpočinutý*´

požadovaný záver má tvar

φ = ´*ak nedokončím program, potom sa ráno zobudím odpočinutý*´

Pomocou výrokových premenných

p = ´*pošleš mi email* ´

q = ´*program dokončím*´

r = ´*pôjdem spať včasnejšie*´

s = ´*ráno sa zobudím odpočinutý*´

vykonáme formalizáciu schémy logického vyplývania do tvaru

$$\{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow r, r \Rightarrow s\} \vdash \neg q \Rightarrow s$$

Pomocou postupnosti elementárnych krokov, kde budeme používať schémy usudzovania z tab. 1.1, ukážeme, že táto schéma je platná

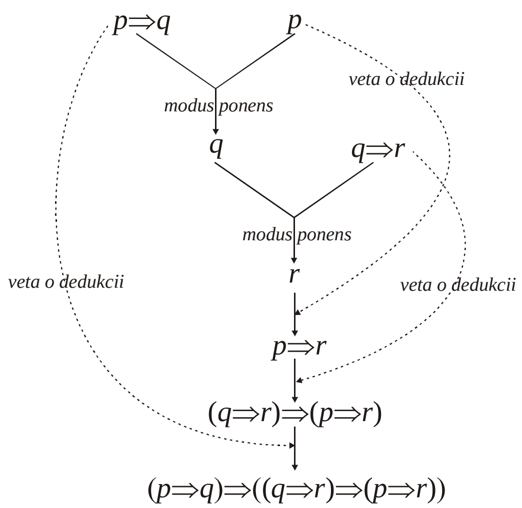
1.	$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
2.	$\neg p \Rightarrow r$	predpoklad$_2$
3.	$r \Rightarrow s$	predpoklad$_3$
4.	$\neg q \Rightarrow \neg p$	inverzia implikácie na predpoklad$_1$
5.	$\neg q \Rightarrow r$	hypotetický sylogizmus na medzivýsledok 4 a predpoklad$_2$
6.	$\neg q \Rightarrow s$	hypotetický sylogizmus na medzivýsledok 5 a predpoklad$_3$

Diagramatická interpretácia tohto logického dôkazu je vykonaná pomocou stromu dôkazu znázorneného na obr. 1.3.

Uskutočnenie logického dôkazu $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ môže byť podstatne zjednodušené. Ak množinu predpokladov $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ rozšírime o nový „pomocný" predpoklad ψ, potom vo výrokovej logike platí veta o dedukcii, ktorá má tvar

$$\left(\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi\right) \Rightarrow \left(\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash (\psi \Rightarrow \varphi)\right) \quad (1.4)$$

To znamená, že logický dôkaz formuly φ pomocou rozšírenej množiny predpokladov $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \cup \{\psi\}$ je rovnocenný logickému dôkazu formuly $\psi \Rightarrow \varphi$ pomocou pôvodnej množiny predpokladov.



Obrázok 1.4. Strom odvodenia pre logický dôkaz z príkladu 1.6.

Príklad 1.6. Pomocou logického dôkazu založeného na (1.4) dokážeme zákon hypotetického sylogizmu výrokovej logiky

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \cup \{p\} \vdash r$$

kde množina $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ obsahujúca pôvodné predpoklady je rozšírená o pomocný predpoklad *p*.

1.	$p \Rightarrow q$	predpoklad$_1$
2.	$q \Rightarrow r$	predpoklad$_2$
3.	p	pomocný predpoklad
4.	q	modus ponens na predpoklad$_1$ a pomocný predpoklad
5.	r	modus ponens na predpoklad$_2$ a medzivýsledok 4
6.	$p \Rightarrow r$	použitie (1.4) na výsledok 5 a pomocný predpoklad
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	použitie (1.4) na výsledok 6 a predpoklad$_2$
8.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	použitie (1.4) na výsledok 7 a predpoklad$_1$

V krokoch 7 a 8 sme opakovane použili vzťah (1.4), kde sme z množiny predpokladov vždy vyeliminovali jeden predpoklad. Finálny výsledok už platí pre prázdnu množinu predpokladov, čo znamená, že formula je zákonom (tautológiou) výrokovej logiky.

V kapitole 1.1 bolo zdôraznené postavenie viet vo formálnom logickom systéme ako efektívnej skratky logických dôkazov, kde sa už nemusí opakovať to, čo už raz bolo dokázané. Tento prístup výstavby formálnych systémov pomocou viet a ich využívania patrí medzi základné črty formálnych systémov, ktorých výstavba sa uskutočňuje hlavne pomocou prepojenej siete viet, ktoré sú dokazované pomocou už dokázaných viet v predošlých krokoch.

Nech ψ je veta (tautológia) , potom logický dôkaz $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi$ môže byť rozšírený o vetu ψ takto

$$\left(\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \vdash \varphi\right) \Rightarrow \left(\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi\right) \qquad (1.5)$$

Význam tohto rozšírenia spočíva v tom, že zahrnutie vhodnej vety môže podstatne zjednodušiť dôkaz vety.

Príklad 1.7. Dokážte zákon rezolventy

$$(p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$$

pomocou zákona hypotetického sylogizmu

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

a pomocou vety o disjunktnom tvare implikácie

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$

formálne

$$\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))\} \cup \{(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)\} \vdash ((p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)))$$

Logický dôkaz pozostáva z tejto postupnosti medzivýsledkov:

1.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	predpoklad$_1$
2.	$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$	pomocný predpoklad - veta
3.	$(\neg p \vee q) \Rightarrow ((\neg q \vee r) \Rightarrow (\neg p \vee r))$	prepis 1 pomocou vety 2
4.	$(\neg q \vee p) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (\neg q \vee r))$	prepis 3 pomocou zámeny $p \rightleftarrows q$
5.	$(p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$	prepis 4 pomocou substitúcie $\neg q / q$

Úplne analogickým spôsobom by sme mohli dokázať, že zákon rezolventy je možné prepísať na zákon hypotetického sylogizmu, z čoho plynie, že tieto dva zákony sú navzájom ekvivalentné

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))) \equiv ((p \vee q) \Rightarrow ((\neg p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)))$$

1.2.1 Chybné pravidlá usudzovania

Existujú jednoduché modifikácie schém usudzovania modus ponens a modus tollens, ktoré nie sú korektné. Prvá nekorektná schéma sa nazýva *potvrdenie dôsledku*

$$\begin{array}{|l} q \\ p \Rightarrow q \\ \hline p \end{array} \qquad (1.6a)$$

Druhá sa nazýva *popretie predpokladu*

$$\begin{array}{|l} \neg p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \neg q \end{array} \qquad (1.6b)$$

Prvá schéma „popretie predpokladu“ je ilustrovaná príkladom

$$\begin{array}{|l} \textit{vydala som sa} \\ \underline{\textit{ak som pekná, tak } \text{sa} \textit{ vydám}} \\ \textit{som pekná} \end{array}$$

Záver nie je korektný, môže sa vydať aj vtedy, keď nie je pekná. Druhá schéma „potvrdenie dôsledku“ môže byť ilustrovaná podobným príkladom

$$\begin{array}{|l} \textit{nie som pekná} \\ \underline{\textit{ak som pekná, tak } \text{sa} \textit{ vydám}} \\ \textit{nevydám sa} \end{array}$$

Chyba v usudzovaní je podobná ako v predchádzajúcom príklade. O nekorektnosti schém usudzovania (1.6a-b) sa ľahko presvedčíme tak, že im priradíme formuly výrokovej logiky

$$q \Rightarrow \left(\left(p \Rightarrow q \right) \Rightarrow p \right) \tag{1.7a}$$

$$\neg p \Rightarrow \left(\left(p \Rightarrow q \right) \Rightarrow \neg q \right) \tag{1.7b}$$

Pre prvú formulu existuje interpretácia premenných $\tau = \left(p/0, q/1 \right)$, pre ktorú má prvá formula (1.7a) pravdivostnú hodnotu ´0´. Táto interpretácia môže byť použitá aj pre druhú formulu (1.7b) k ukázaniu, že formula má pravdivostnú hodnotu ´0´. To znamená, že obe formuly (1.7a-b) nie sú tautológie, čiže nemôžu byť zákonmi výrokovej logiky.

Ako svedčia mnohé kognitívno-psychologické výskumy [xx], obe tieto schémy, aj keď sú chybné, sa často využívajú v bežnom usudzovaní, možno ich teda pokladať za „klasické chyby“ nášho každodenného uvažovania.

1.3 Pravidlá usudzovania v predikátovej logike

Predikátová logika môže byť chápaná ako zovšeobecnenie výrokovej logiky o tzv. kvantifikátory (všeobecný a existenčný). Základné schémy usudzovania v predikátovej logike sú uvedené v tab. 1.2.

Tabuľka 1.2. Schémy usudzovania predikátovej logiky

Schéma usudzovania	Teorém predikátovej logiky	Názov schémy
$\begin{array}{\|l} \underline{\forall x\, P(x)} \\ P(c) \end{array}$	$\left(\forall x\, P(x) \right) \Rightarrow P(c)$	Konkretizácia univerzálneho kvantifikátora
$\begin{array}{\|l} \underline{P(c) \textit{ pre každé } c} \\ \forall x\, P(x) \end{array}$	$P(c) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x) \right)$	Zovšeobecnenie pomocou univerzálneho kvantifikátora
$\begin{array}{\|l} \underline{\exists x\, P(x) \qquad\qquad\qquad} \\ P(c) \textit{ pre nejaký element } c \end{array}$	$\left(\exists x\, P(x) \right) \Rightarrow P(c)$	Konkretizácia existenčného kvantifikátora
$\begin{array}{\|l} \underline{P(c) \textit{ pre nejaký element } c} \\ \exists x\, P(x) \end{array}$	$P(c) \Rightarrow \left(\exists x\, P(x) \right)$	Zovšeobecnenie pomocou existenčného kvantifikátora

Konkretizácia univerzálneho kvantifikátora.

Ak nejakú vlastnosť $P(x)$ má každý objekt (indivíduum) z univerza U, potom $\forall x\, P(x)$, potom túto vlastnosť musí mať aj ľubovoľný konkrétny objekt c z tohto univerza,

$$\left(\forall x\, P(x)\right) \Rightarrow P(c) \tag{1.8}$$

Táto formula je priamym dôsledkom intuitívnej interpretácie univerzálneho kvantifikátora ako konjunkcie vlastnosti $P(x)$ pre každý objekt x z konenčného iuniverza

$$\forall x\, P(x) =_{def} \bigwedge_{x \in U} P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge \ldots \wedge P(u) \tag{1.9}$$

Ak na túto formulu (predpoklad) použijeme schému usudzovania simplifikácie z tab. 1.1, potom vlastnosť P má menovite každý objekt z U

$$\begin{array}{|l} \forall x\, P(x) \\ \hline P(a) \\ P(b) \\ \ldots\ldots\ldots \\ P(c) \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{1.10}$$

Potom musí platiť aj implikácia (1.8). Ako ilustračný príklad tejto vlastnosti univerzálneho kvantifikátora uvedieme klasický príklad konkretizácie zo stredovekej logiky

$$\begin{array}{|l} \textit{každý človek je smrteľný} \\ \textit{Sokrates je človek} \\ \hline \textit{Sokrates je smrteľný} \end{array}$$

kde Sokrates patrí do univerza U (obsahujúceho všetkých ľudí) platnosti kvantifikátora $\forall$. Toto schéma usudzovanie môžeme zovšeobecniť takto

$$\begin{array}{|l} \forall (x \in U)\, P(x) \\ c \in U \\ \hline P(c) \end{array} \tag{1.11}$$

Zovšeobecnenie pomocou univerzálneho kvantifikátora

Ak sa nám podarí dokázať, že vlastnosť P má každý objekt z nejakého univerza U, potom vzhľadom k tomuto univerzu môžeme definovať univerzálny kvantifikátor $\forall$

$$P(a) \wedge \ldots \wedge P(c) \wedge \ldots = \bigvee_{x \in U} P(x) =_{def} \forall x\, P(x) \tag{1.12}$$

Ak použijeme na túto formulu schému usudzovania konjunkcie z tab. 1.1, potom

$$\begin{array}{|l} P(a) \\ \ldots\ldots\ldots \\ P(c) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hline \forall x\, P(x) \end{array} \tag{1.13}$$

potom musí platiť aj

$$P(t) \Rightarrow \left(\forall x\, P(x)\right) \tag{1.14}$$

s poznámkou, že t je ľubovoľný objekt z univerza U. Zovšeobecnenie pomocou univerzálneho kvantifikátora sa často používa v matematike implicitne, pretože dôkaz vlastnosti $P(c)$ bol vykonaný pre ľubovoľný objekt c a nie len pre určitý špecifický objekt.

V mnohých prípadoch mimo matematiku použitie zovšeobecnenia podľa schémy usudzovania (1.13) (alebo predikátovej formuly (1.14)) tvorí základ tzv. *induktívneho* *zovšeobecnia,* v ktorom sa snažíme parciálne poznatky zovšeobecniť pre každý objekt postulovaného univerza *U*. V tejto súvislosti potom vystupuje do popredia podľa rakúsko-anglického filozofa Karla Poppera problém falzifikácie všeobecného výroku $\forall x\, P(x)$. Stačí nájsť jeden objekt $o \in U$ pre ktorý neplatí vlastnosť *P*, $\neg P(o)$, potom všeobecný výrok $\forall x\, P(x)$ je neplatný, $\neg\forall x\, P(x)$.

Ako ilustračný príklad budeme študovať univerzum U, ktoré obsahuje všetky labute na našej planéte. Experimentálnym pozorovaním zistíme, že pre veľkú podmnožinu $U' \subset U$ platí, že každá labuť z nej je biela (túto vlastnosť označíme predikátom *B*). Túto skutočnosť môžeme „poctivo" zovšeobecniť pomocou univerzálneho kvantifikátora $\forall'$ definovaného vzhľadom k „poduniverzu" *U′*

$$\forall' x\, B(x) =_{def} \bigwedge_{x \in U'} B(x)$$

V dôsledku určitej netrpezlivosti, pozorovateľ zovšeobecní tento poznatok pre celé univerzum *U*, postuluje platnosť formuly $\forall x\, B(x)$. Falzifikácia tejto vlastnosti spočíva v tom, že nájdeme takú labuť (napr. pod skleneným mostom v Piešťanoch alebo pod vyšehradským železničným mostom v Prahe), ktorá je čierna, potom automaticky platí $\neg\forall x\, B(x)$.

V tejto súvislosti môžeme hovoriť aj o verifikácii vlastnosti $\forall' x\, B(x)$, ďalšími a ďalšími pozorovaniami rozširujeme univerzum *U′* o ďalšie objekty *x*, ktoré majú vlastnosť *B*(*x*). Avšak je potrebné poznamenať, že toto rozširovanie platnosti $\forall' x\, B(x)$ o ďalšie objekty nám neprináša nový poznatok, neustále platí, že „labute sú biele", len máme stále rozsiahlejšie vedomosti o evidentnosti tohto poznatku. Preto falzifikácia, na rozdiel od verifikácie, je zásadne dôležitá pre induktívne zovšeobecňovanie, napomáha nám pri vzniku nových poznatkov (čo ako prvý zdôraznil Karl Popper).

Konkretizácia existenčného kvantifikátora

Ak nejaká vlastnosť platí pre niektoré objekty z univerza *U*, potom musí platiť aj implikácia

$$(\exists x\, P(x)) \Rightarrow P(e) \tag{1.15}$$

alebo pomocou schémy uvažovania

$$\begin{array}{|l} \exists x\, P(x) \\ \hline P(e) \textit{ pre nejaký element } e \end{array} \tag{1.16}$$

Táto vlastnosť konkretizácie existenčného kvantifikátora vyplýva priamo z jeho intuitívnej interpretácie pomocou disjunkcie predikátov nad konečným univerzom

$$\exists x\, P(x) =_{def} \bigvee_{x \in U} P(x) = P(a) \vee \ldots \vee P(c) \vee \ldots \tag{1.17}$$

Disjunkcia výrokov je pravdivá vtedy a len vtedy, ak aspoň jeden jej výrok je pravdivý, potom existuje aspoň jeden objekt *c* pre ktorý je výrok *P*(*c*) pravdivý, t.j. platí implikácia (1.15).

Zovšeobecnenie pomocou existenčného kvantifikátora

Podľa tejto „skromnej“ schémy usudzovania, ak nejaká vlastnosť P platí aspoň pre jeden objekt c z univerza U, potom túto skutočnosť môžeme zovšeobecniť pomocou existenčného kvantifikátora $\exists$

$$P(e) \Rightarrow \bigvee_{x \in U} P(x) =_{def} \exists x\, P(x) \tag{1.18}$$

kde sme použili schému usudzovania s názvom adícia z tab. 1.1. Túto implikáciu môžeme vyjadriť pomocou schémy usudzovania

$$\begin{array}{|l} P(e) \text{ pre nejaký element } e \\ \hline \exists x\, P(x) \end{array} \tag{1.19}$$

Spojením (1.15) a (1.18) dostaneme

$$P(e) \equiv \exists x\, P(x) \tag{1.20}$$

Podľa tejto formuly, pravdivosť výroku P(e) je ekvivalentná pravdivosti výroku s existenčným kvantifikátorom $\exists x\, P(x)$.

Príklad 1.8. Ukážte, že predpoklady a záver

φ1 = ‘každý kto navštevuje prednášky z diskrétnej matematiky je študentom informatiky‘

φ_2 = ‘Mária navštevuje prednášky z diskrétnej matematiky’

φ = ‘Mária je študentom informatiky’

sú správne.

Tieto tri výroky prepíšeme do tvaru

$$\begin{array}{|l} \varphi_1 = \forall x \left(P(x) \Rightarrow I(x) \right) \\ \varphi_2 = P(Maria) \\ \hline \varphi \ \ = I(Maria) \end{array}$$

kde $P(x)$ je predikát ‘objekt x navštevuje prednášku z diskrétnej matematiky’ a $I(x)$ je predikát ‘objekt x je študentom informatiky’. Korektnosť riešenia overíme postupnosťou formúl

$$\begin{array}{r|ll} 1. & \forall x \left(P(x) \Rightarrow I(x) \right) & \text{predpoklad}_1 \\ 2. & P(Maria) & \text{predpoklad}_2 \\ \hline 3. & P(Maria) \Rightarrow I(Maria) & \text{konkretizácia 1} \\ 4. & I(Maria) & \text{modus ponens na 2 a 3} \end{array}$$

Príklad 1.9. Ukážte, že dva predpoklady a záver

φ_1 = ‘*niektorí študenti navštevujúci prednášku nečítali predpísanú učebnicu* ‘

φ_2 = ‘*každý študent navštevujúci prednášku vykonal skúšku*’

φ = ‘*niektorí študenti, ktorí vykonali skúšku, nečítali predpísanú učebnicu*’

sú správne.

Tieto tri výroky prepíšeme do tvaru

$$\begin{array}{|l}
\varphi_1 = \exists x\left(P(x)\wedge\neg N(x)\right)\\
\varphi_2 = \forall x\left(P(x)\Rightarrow S(x)\right)\\
\hline
\varphi\ \ = \exists x\left(S(x)\wedge\neg N(x)\right)
\end{array}$$

kde $P(x)$ je predikát *′objekt x navštevuje prednášku′*, $N(x)$ je predikát *′objekt x čítal predpísanú učebnicu′*, $S(x)$ je predikát *′objekt x vykonal skúšku′*. Korektnosť riešenia overíme postupnosťou formúl

1.	$\exists x\left(P(x)\wedge\neg N(x)\right)$	predpoklad$_1$
2.	$\forall x\left(P(x)\Rightarrow S(x)\right)$	predpoklad$_2$
3.	$P(c)\wedge\neg N(c)$	konkretizácia predpokladu$_1$
4.	$P(c)$	simplifikácia 3
5.	$\neg N(c)$	simplifikácia 3
6.	$P(c)\Rightarrow S(c)$	konkretizácia predpokladu$_2$
7.	$S(c)$	modus ponens na 4 a 6
8.	$S(c)\wedge\neg N(c)$	konjunkcia 5 a 7
9.	$\exists x\left(S(x)\wedge\neg N(x)\right)$	zovšeobecnie 8 pomocou existenčného kvantifikátora

Ako vidieť z uvedených príkladov, dôkazy formúl obsahujúcich kvantifikátory sú zmesou aplikácií schém usudzovania tak z výrokovej, ako aj predikátovej logiky. Táto skutočnosť vyplýva z faktu, že predikátová logika je vlastne zovšeobecnením výrokovej logiky, ktorá je „vnorená“ do predikátovej logiky; všetky zákony výrokovej logiky sú aj zákonmi predikátovej logiky.

1.4 Metódy dôkazu viet

Dôkaz vety je vo všeobecnosti obtiažny a netriviálny problém, ktorý len v ojedinelých prípadoch môže byť vykonaný priamočiarym mechanickým postupom. Preto v matematike vznikli rôzne metódy dôkazu viet, z ktorých uvedieme najdôležitejšie: priamy dôkaz, nepriamy dôkaz, dôkaz sporom a dôkaz vymenovaním prípadov.

Priamy dôkaz

Implikácia $p\Rightarrow q$ môže byť dokázaná tak, že ukážeme, že z predpokladu pravdivosti výroku p vyplýva taktiež aj pravdivosť výroku q. Túto jednoduchú formuláciu priameho dôkazu môžeme upresniť tak, že pri dôkaze vychádzame z axióm a z už dokázaných viet $\{\psi_1,...,\psi_m\}$, potom dôkaz $p\Rightarrow q$ môžeme charakterizovať vzťahom logického dôkazu

$$\{\varphi_1,...,\varphi_n\}\cup\{\psi_1,...,\psi_m\}\cup\{p\}\vdash q \qquad (1.21)$$

V tejto schéme máme na ľavej strane všetky axiómy systému, dokázané potrebné vety (tautológie) a predpoklad p, použitím pravidiel odvodzovania (modus ponens, pravidlá substitúcie,...) z týchto „predpokladov“ odvodíme dôsledok q.

Príklad 1.10. Dokáže vetu „ak n je nepárne prirodzené číslo, potom n^2 je taktiež nepárne číslo“.

Požadovanú vetu zformalizujeme pomocou implikácie

$$\underbrace{(n \text{ je nepárne číslo})}_{p} \Rightarrow \underbrace{(n^2 \text{ je nepárne číslo})}_{q}$$

Použijeme techniku priameho dôkazu, z predpokladu pravdivosti p dokážeme pravdivosť dôsledku q.

Nech n je nepárne prirodzené číslo, potom existuje také nezáporné celé číslo k , že $n = 2k + 1$. Pre kvadrát čísla n platí

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{l} + 1 = 2l + 1$$

čiže aj kvadrát n^2 je nepárne číslo. Týmto sme dokázali platnosť implikácie $p \Rightarrow q$.

Nepriamy dôkaz

Technika nepriameho dôkazu je založená na ekvivalencii (nazývanej zákon inverzie implikácie) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$, podľa ktorej, ak v implikácii vymeníme poradie jej členov, potom musíme negovať aj jej jednotlivé členy. Z tohto zákona vyplýva, že dôkaz implikácie $(p \Rightarrow q)$ je ekvivalentný dôkazu „inverznej“ implikácie $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Príklad 1.11. Dokážte vetu „ak $3n$+2 je nepárne číslo, potom aj n je nepárne číslo“.

Vetu upravíme do tvaru implikácie

$$\underbrace{(3n + 2 \text{ je nepárne číslo})}_{p} \Rightarrow \underbrace{(n \text{ je nepárne číslo})}_{q}$$

Budeme dokazovať inverznú implikáciu

$$\underbrace{(n \text{ je párne číslo})}_{\neg q} \Rightarrow \underbrace{(3n + 2 \text{ je párne číslo})}_{\neg p}$$

Nech n je párne číslo, potom existuje také nezáporné celé číslo k, že n = 2k. Pre takto špecifikované číslo n dostaneme $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$, ktoré je párne. Týmto sme dokázali inverznú implikáciu $\neg q \Rightarrow \neg p$, čiže musí platiť aj „pôvodná“ implikácia $p \Rightarrow q$.

Dôkaz sporom

Tento typ dôkazu je založený na schéme „reductio ad absurdum“ z tab. 1.1

$$\begin{array}{|l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow \neg q \\ \hline \neg p \end{array} \tag{1.22}$$

založenej na zákone výrokovej logiky

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \tag{1.23}$$

Túto schému usudzovania môžeme interpretovať tak, že ak z predpokladu p súčasne odvodíme q a $\neg q$, potom musí byť pravdivá negácia $\neg p$ východieho predpokladu.

Príklad 1.12. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Predpokladajme, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, tento výrok označíme

$$p = '\sqrt{2} \text{ } je\ racionálne\ číslo'$$

Z tohto výroku vyplýva, že číslo $\sqrt{2}$ má tvar α/β, kde α a β sú celé nesúdeliteľné čísla, tento výrok označíme

$$q = '\sqrt{2} = \alpha/\beta, kde\ \alpha,\beta\ sú\ celé\ nesúdeliteľné\ čísla'.$$

t. j. platí implikácia $p \Rightarrow q$. Úpravou matematického výrazu z výroku q dostaneme formulu $\alpha^2 = 2\beta^2$, z ktorej vyplýva, že číslo $\alpha^2 = 2k$ je párne. V príklade 1.10 bola dokázaná veta, že ak celé číslo n je nepárne, potom aj jeho kvadrát n^2 je nepárne číslo. Obrátením tejto implikácie dostaneme, že ak n^2 je párne číslo, potom aj n je párne číslo. Z tejto vety vyplýva, že číslo α je párne. Potom taktiež platí $\beta^2 = 2k^2$, t. j. β^2 je párne číslo, čiže aj β je párne číslo. Týmto sme dokázali, že α, β sú párne čísla, čiže sú súdeliteľné

$$\neg q = '\sqrt{2} = \alpha/\beta, kde\ \alpha,\beta\ sú\ celé\ súdeliteľné\ čísla'$$

t.j. platí implikácia $p \Rightarrow \neg q$. Týmto sme dokázali, že súčasne platia implikácie $p \Rightarrow q$ a $p \Rightarrow \overline{q}$, použitím schémy „reductio ad absurdum“ (1.22) dostaneme, že platí negácia ich predpokladu

$$\neg p = '\sqrt{2} \text{ } je\ iracionálne\ číslo'$$

čo bolo potrebné dokázať.

Dôkaz vymenovaním prípadov

Naším cieľom je dokázať implikáciu

$$(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow q \tag{1.24}$$

Jednoduchými ekvivalentnými úpravami môžeme túto implikáciu prepísať do ekvivalentného tvaru

$$((p_1 \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow q) \equiv ((p_1 \Rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \Rightarrow q)) \tag{1.25}$$

1.	$(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow q$	
2.	$\neg(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \vee q$	prepis 1 pomocou disjunktívneho tvaru implikácie
3.	$(\neg p_1 \wedge \ldots \wedge \neg p_n) \vee q$	použitie De Morganovho zákona 2
4.	$(\neg p_1 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n \vee q)$	použitie distributívneho zákona na 3
5.	$(p_1 \Rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \Rightarrow q)$	prepis 4 pomocou disjunktívneho tvaru implikácie

Formulu (1.25) môžeme prepísať do tvaru schémy usudzovania

$$\begin{array}{|l} (p_1 \Rightarrow q) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p_n \Rightarrow q) \\ \hline (p_1 \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow q \end{array} \tag{1.26}$$

Túto schému usudzovania (dôkaz vymenovaním prípadov) používame vtedy, ak výrok q je dôsledok rôznych prípadov $p_1, \ldots, p_n$.

Príklad 1.13. Dokážte identitu

$$max\left\{a,min\left\{b,c\right\}\right\}=min\left\{max\left\{a,b\right\},max\left\{a,c\right\}\right\}$$

kde a, b a c sú čísla.

Dôkaz tejto identity vykonáme tak, že vykonáme verifikáciu identity pre všetkých 6 rôznych prípadov:

(1) Prípad $a < b < c$

$$max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\} = min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{b},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}$$

$$\underbrace{max\{a,b\}}_{b} = \underbrace{min\{b,c\}}_{b}$$

$$b = b$$

(2) Prípad $b < a < c$

$$max\left\{a,\underbrace{min\{b,c\}}_{b}\right\} = min\left\{\underbrace{max\{a,b\}}_{a},\underbrace{max\{a,c\}}_{c}\right\}$$

$$\underbrace{max\{a,b\}}_{a} = \underbrace{min\{a,c\}}_{a}$$

$$a = a$$

Podobným spôsobom by sme preskúmali aj ostatné štyri možnosti vzájomného usporiadania čísel *a*, *b* a *c*. Týmto spôsobom sme dokázali 6 nezávislých implikácií

$$(a < b < c) \Rightarrow \left(max\{a,min\{b,c\}\} = b\right) \wedge \left(min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\} = b\right)$$

$$(b < a < c) \Rightarrow \left(max\{a,min\{b,c\}\} = a\right) \wedge \left(min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\} = a\right)$$

....

$$(c < b < a) \Rightarrow \left(max\{a,min\{b,c\}\} = a\right) \wedge \left(min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\} = a\right)$$

Týmto „enumeratívnym“ spôsobom sme dokázali danú algebraickú identitu tak, že sme separátne preskúmali všetky možné usporiadania čísel *a*, *b* a *c*.

Príklad 1.14. Dokážte identitu $|a-b| \le |a|+|b|$, kde *a*, *b* sú ľubovolné reálne čísla a $|\,.\,|$ je absolútna hodnota.

(1) $a < b < 0$, potom $a-b < 0$, $a < 0$ a $b < 0$, dokazovaná nerovnosť má tvar $-(a-b) \le -a-b$, alebo $b \le 0$, čo je pravdivý výrok (pre *b* = 0 nerovnosť automaticky platí) .

(2) $a < 0 < b$, potom $a-b < 0$, $a < 0$ a $b > 0$, dokazovaná nerovnosť má tvar $-(a-b) \le -a+b$, čo je pravdivý výrok.

(3) $0 < a < b$, potom $a-b < 0$, $a > 0$ a $b > 0$, dokazovaná nerovnosť má tvar $-(a-b) \le a+b$, alebo $a \ge 0$, čo je pravdivý výrok (pre *a* = 0 nerovnosť automaticky platí).

Podobným spôsobom by sa dokázali aj ostatné tri možnosti ($b < a < 0, b < 0 < a$ a $0 < b < a$).

Nutnosť použitia metódy dôkazu vymenovaním všetkých prípadov sa môže stať v niektorých špeciálnych situáciách limitujúcim faktorom uskutočnenia dôkazu, keď počet možných prípadov je veľké číslo. Potom môžeme prenechať hlavná ťarcha dôkazu počítaču, ktorý systematicky preverí všetky možné prípady. Podobná situácia sa vyskytla počiatkom

90-tych rokov minulého storočia, keď matematik Andrew Wiles po dlhoročnom úsilí dokázal veľkú Fermatovu vetu[2].

1.5 Matematická indukcia

Stojíme pred problémom dokázať $\forall n\, P(n)$, podľa ktorej vlastnosť $P(n)$ platí pre každé prirodzené číslo. Dôkaz vety je možné vykonať metódou matematickej indukcie, ktorá je založená na dvoch východzích predpokladoch $P(1)$ a $\forall n\left(P(n)\Rightarrow P(n+1)\right)$. Ukážeme, že z týchto dvoch predpokladov vyplýva formula $\forall n\, P(n)$.

1.	$P(1)$	
2.	$\forall n\left(P(n)\Rightarrow P(n+1)\right)$	
3.	$P(1)\Rightarrow P(2)$	konkretizácia 2 pre $n = 1$
4.	$P(2)\Rightarrow P(3)$	konkretizácia 2 pre $n = 2$
...	....	
5.	$P(n)\Rightarrow P(n+1)$	konkretizácia 2 pre $n = n$
...	....	
6.	$P(2)$	modus ponens na 1 a 3
7.	$P(3)$	modus ponens na 6 a 4
...	....	
8.	$P(n+1)$	modus ponens na predchádzajúci riadok a 5
...	....	
9.	$\forall n\, P(n)$	zovšeobecnenie pomocou $\forall$

Tento výsledok môže byť prezentovaný ako schéma usudzovania matematickej indukcie

$$\begin{array}{|l} P(1) \\ \forall n\left(P(n)\Rightarrow P(n+1)\right) \\ \hline \forall n\, P(n) \end{array} \tag{1.27}$$

Metóda matematickej indukcie bola známa už počiatkom novoveku talianskemu matematikovi F. Maurolico (1494 – 1575), ktorý ju používal k dôkazu niektorých vlastností celých čísel (napr. dokázal, že suma kvadrátov prvých n prirodzených nepárnych čísel sa rovná n^2). V modernej matematike a logike matematická indukcia bola využitá talianskym matematikom a logikom G. Peanom (1858 - 1932) pri formulácii jeho axiomatického systému aritmetiky celých čísel.

Príklad 1.15. Dokážte, že suma prvých n nepárnych prirodzených čísel sa rovná n^2.

---

[2] Veľká Fermatova veta tvrdí, že rovnica $x^n + y^n = z^n$ nemá celočíselné riešenie pre x, y a z, pričom $xyz \neq 0$ a n je celé číslo, pričom $n > 2$. Wilesov článok, v ktorom podal dôkaz tejto vety, "Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem" bol publikovaný v r. 1995 v časopise *Annals of Mathematics.* Článok je doprevádzaný vysoko technickou publikáciou jeho doktoranda Richarda Taylora, v ktorom boli enumeratívnym spôsobom preštudované na počítači vlastnosti špeciálnej Heckeho algebry, ktorej použitie hrá kľúčovú úlohu v celom dôkaze.

Položíme

$$P\left(n=2k-1\right)=1+3+5+\ldots+\left(2k-1\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(2i-1\right)=k^2$$

Ľahko sa presvedčíme, že platí P(1) = 1. Budeme študovať $P(n+1)$

$$P\left(n=2k+1\right)=1+3+5+\ldots+\left(2k+1\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\left(2i-1\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(2i-1\right)+\left(2k+1\right)$$

$$=k^2+\left(2k+1\right)=\left(k+1\right)^2$$

Týmto sme dokázali, že platnosť formule $P(n)$ implikuje formulu $P(n+1)$, pre každé prirodzené číslo n, potom použitím zovšeobecnenia pomocou univerzálneho kvantifikátora dostaneme $\forall n\left(P\left(n\right)\Rightarrow P\left(n+1\right)\right)$. Použitím schémy matematickej indukcie dostaneme

$$\forall n\; P\left(n=2k-1\right)=k^2$$

čím sme zavŕšili dôkaz vety špecifikujúcej sumu prvých n nepárnych prirodzených čísel.

Príklad 1.16. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $n<2^n$.

Nech $P(n)$ je predikát ´ $n<2^n$ ´, potom $P(1)$ je pravdivý predikát. Budeme študovať $P(n+1)$

$$\left(n+1\right)<2^{n+1}\Rightarrow\left(n\right)<\left(2^n\cdot 2\right)-1\Rightarrow\left(n\right)<2^n\cdot 2$$

kde sme použili indukčný predpoklad $n<2^n$ a ktorá evidentne platí už pre $n\geq 2$. Týmto sme dokázali, že pre každé prirodzené číslo n platí implikácia $P\left(n\right)\Rightarrow P\left(n+1\right)$, alebo $\forall n\left(P\left(n\right)\Rightarrow P\left(n+1\right)\right)$. Týmto sme vlastne dokázali platnosť $\forall n\left(n<2^n\right)$

Príklad 1.17. Pomocou matematickej indukcie dokážte platnosť zovšeobecneného De Morganovho vzťahu z teórie množín

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

pre $n\geq 2$.

Položme

$$P\left(n\right)=\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

Pre n = 2 dostaneme

$$P\left(2\right)=\overline{A_1\cap A_2}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2$$

čo je štandardná verzia De Morganovho zákona pre negáciu prieniku dvoch množín. Študujme

$$P\left(n+1\right)=\overline{\bigcap_{i=1}^{n+1}A_i}=\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i\cap A_{n+1}}=\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}\cup\overline{A_{n+1}}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\cup\overline{A_{n+1}}=\bigcup_{i=1}^{n+1}\overline{A_i}$$

Týmto sme dokázali implikáciu zovšeobecnenú pomocou univerzálneho kvantifikátora

$$\forall\left(n\geq 2\right)\left(P\left(n\right)\Rightarrow P\left(n+1\right)\right)$$

čím sme dokázali pomocou matematickej indukcie zovšeobecnenie De Morganovho vzťahu pre negáciu prieniku dvoch a viac množín.

Cvičenie

Cvičenie 1.1. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

(a) Mária je študentom informatiky. Preto, je Mária študentom informatiky alebo študentom telekomunikácií.
(b) Jaroslav študuje informatiku a elektrotechnológiu. Preto, Jaroslav študuje informatiku.
(c) Ak prší, potom plaváreň je zatvorená. Preto, ak plaváreň je otvorená, potom neprší.
(d) Ak dnes sneží, kino bude uzavreté. Kino dnes nie je uzavreté. Preto, dnes nesneží.
(e) Ak dnes pôjdem plávať, potom ráno skoro vstanem. Ak ráno skoro vstanem, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo. Preto, ak dnes pôjdem plávať, potom pôjdem do obchodu kúpiť čerstvé pečivo.

Cvičenie 1.2. Aké pravidlo usudzovania bolo použité pri dôkaze záverov?

(a) Dnes bude teplo alebo bude smog v ovzduší. Dnes nebolo teplo. Preto, dnes bude smog v ovzduší.
(b) Eva vynikajúco pláva. Ak Eva je vynikajúci plavec, potom môže pracovať ako plavčík. Preto, Eva môže pracovať ako plavčík.
(c) Stano bude pracovať v počítačovej firme ABC. Ak Stano dokončí štúdium na FIIT, potom nebude pracovať v počítačovej firme ABC. Preto, Stano nedokončil štúdium na FIIT.
(d) Ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom zvládnem teóriu logických obvodov. Ak zvládnem teóriu logických obvodov, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium. Preto, ak budem intenzívne pracovať na projekte, potom úspešne dokončím bakalárske štúdium.

Cvičenie 1.3. Aké závery vyplývajú z množiny výrokov?

(a) „Ak jem korenenú stravu, potom mám hrozné sny“, „ak hrmí keď spím, potom mám hrozné sny“, „nemám hrozné sny“.
(b) „Ja som chytrý alebo mám šťastie“, „nemám šťastie“, „ak mám šťastie, potom zvíťazím v lotérii“.
(c) „Každý študent informatiky vlastní notebook“, „Rudo nevlastní notebook“, „Ana vlastní notebook“.
(d) „Čo je dobré pre našu firmu, je dobré aj pre Slovensko“, „čo je dobré pre Slovensko, je dobré aj pre teba“, „ak si nemôžeš kúpiť auto, potom to nie je pre teba dobré“.
(e) „Všetci hlodavce hryzú potravu“, „myš je hlodavec“, „pes nehryzie potravu“, „netopier nie je hlodavec“.

Cvičenie 1.4. Vysvetlite, ktorá schéma usudzovania bola použitá v ktorom kroku.

(a) „Eva je študentka nášho krúžku a vlastní červené auto“, „každý, kto vlastní červené auto dostal aspoň jednu pokutu za prekročenie rýchlosti“, „preto, niekto z nášho krúžku dostal pokutu za prekročenie rýchlosti“.
(b) „Všetci moji priatelia Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol, si zapísali do indexu prednášku z diskrétnej matematiky“, „každý študent, ktorý si zapísal do indexu prednášku z diskrétnej matematiky, môže si nasledujúci akademický rok zapísať aj prednášku z algoritmov“, „preto, všetci moji priatelia Mária, Adolf, Rudolf, Viera a Karol, môžu si nasledujúci akademický rok zapísať do indexu prednášku z algoritmov“.
(c) „Všetky filmy s Charlie Chaplinom sú vynikajúce“, „Charlie Chaplin hral v nemých filmoch“, „preto, niektoré vynikajúce filmy sú nemé“.

Cvičenie 1.5. Vysvetlite prečo uvedené závery sú korektné alebo nekorektné.

(a) „Všetci študenti v tomto krúžku ovládajú logiku“, „Jano je študentom tohto krúžku“, „preto, Jano ovláda logiku“.

(b) „Každý študent informatiky má zapísanú v indexe prednášku z diskrétnej matematiky“, „Viera má zapísanú prednášku z diskrétnej matematiky“, „preto, Viera je študentom informatiky“.

(c) „Každý kôň má rád ovocie“, „môj pes nie je kôň“, „preto, môj pes nemá rád ovocie“.

(d) „Každý, kto má rád ovsené vločky je zdravý“, „Lenka nie je zdravá“, „preto, Lenka nemá rada ovsené vločky“.

Cvičenie 1.6. Určite, ktorá veta je pravdivá. Ak je uvedený záver korektný, určite, ktorá schéma usudzovania bola použitá pri jeho dôkaze.

(a) Ak x je reálne číslo také, že $x>1$, potom $x^2>1$. Predpokladajte, že $x^2>1$, potom $x>1$.

(b) Číslo $log_2 3$ je iracionálne vtedy, ak sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch celých nesúdeliteľných čísel. Pretože číslo $log_2 3$ nie je vyjadriteľné ako p/q, kde p a q sú celé nesúdeliteľné čísla, potom je číslo $log_2 3$ iracionálne.

(c) Ak *x* je reálne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x>3$, potom $x^2>9$. Nech $x^2\leq 9$, potom $x\leq 3$.

(d) Ak *x* je reál ne číslo, ktoré spĺňa podmienku $x>2$, potom $x^2>4$. Nech $x\leq 2$, potom $x^2\leq 4$.

Cvičenie 1.7. Určite, či uvedené výroky sú korektné, ak nie, prečo?

(a) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Preto, ak *x* je iracionálne, potom x^2 je iracionálne.

(b) Ak x^2 je iracionálne, potom x je iracionálne. Číslo $x=\pi^2$ je iracionálne. Preto, číslo $x=\pi$ je iracionálne.

Cvičenie 1.8. Prečo tieto výroky sú nekorektné?

(a) Nech *H*(*x*) je predikát s významom „*x* je štastný“. Nech platí $\exists x\, H(x)$. Preto, Eva je šťastná.

(b) Nech *S*(x,y) je predikát s významom „*x* je menší ako *y*“. Nech platí implikácia $\exists s\, S(s,Max)\Rightarrow S(Max,Max)$.

Cvičenie 1.9. Dokážte, keď sa dajú dokázať, tieto výroky:

(a) Dokážte výrok *P*(0), kde *P*(*n*) je výrok „ak *n* je kladné celé číslo väčšie ako 1, potom $n^2>n$. Ktorú schému usudzovania sme použili?

(b) Dokáže výrok *P*(1), kde *P*(*n*) je výrok „Ak *n* je kladné celé číslo, potom $n^2>n$. Ktorú schému usudzovania sme použili?

(c) Nech *P*(*n*) je výrok „ak a a b sú kladné reálne čísla, potom $(a+b)^n\geq a^n+b^n$“. Dokážte, že P(1) je pravdivý výrok.

(d) Dokážte, že kvadrát párneho čísla je párne číslo použitím priameho dôkazu.

(e) Dokážte, že ak *n* je celé číslo a n^3+5 je nepárne číslo, potom *n* je párne číslo použitím nepriameho dôkazu.

(f) Dokážte, že suma dvoch nepárnych čísel je párne číslo.

(g) Dokážte, že súčin dvoch nepárnych čísel je nepárne číslo.

(h) Dokáže, že ak x je iracionálne nenulové číslo, potom $1/x$ je iracionálne číslo.

Cvičenie 1.10. Dokážte metódou vymenovaním prípadov tieto vlastnosti:

(a) $max\{x,y\}+min\{x,y\}=x+y$, kde x, y sú reálne čísla.

(b) $min\{a,min\{b,c\}\}=min\{min\{a,b\},c\}$

(c) Kvadráty celých čísel sú reprezentované dekadickými číslicami, ktoré končia 0, 1, 4, 5, 6, alebo 9.

(d) Štvrté mocniny celých čísel sú reprezentované dekadickými číslami, ktoré končia 0, 1, 5, alebo 6.

Cvičenie 1.11. Dokážte tieto vlastnosti:

(a) Ak n je kladné celé číslo, potom n je párne vtedy a len vtedy, ak $7n+4$ je párne.

(b) Ak n je kladné celé číslo, potom n je nepárne vtedy a len vtedy, ak $5n+6$ je nepárne.

(c) $m^2=n^2$ platí vtedy a len vtedy, ak $m = n$, alebo $m = -n$.

(d) Dokážte, že tieto tri výroky sú ekvivalentné: (1) $a\le b$, (2) priemer a a b je väčší ako a, $(a+b)/2>a$, (3) priemer a a b je menší ako b, $(a+b)/2<b$.

Cvičenie 1.12. Pomocou matematickej indukcie dokážte:

(a) Suma prvých n prirodzených čísel je

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Dokážte formulu

$$3+3\cdot 5+3\cdot 5^2+...+3\cdot 5^n=\frac{1}{4}3\left(5^{n+1}-1\right)$$

(c) Nájdite formulu pre

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$$

(d) Dokážte formulu

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(e) Dokážte formulu

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(f) Dokážte formulu $n!<n^n$, pre $n > 1$.

(g) Dokážte formulu pre prvú deriváciu funkcie $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$.

(h) Nech $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú štvorcové matice, ktoré komutujú, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, dokážte $\boldsymbol{AB}^n = \boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A}$.

(i) Dokážte

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

(j) Dokážte zovšeobecnené distributívne formuly z výrokovej logiky

$$(p_1\vee p_2\vee...\vee p_n)\wedge q\equiv(p_1\wedge q)\vee(p_2\wedge q)\vee...\vee(p_n\wedge q)$$

$$(p_1\wedge p_2\wedge...\wedge p_n)\vee q\equiv(p_1\vee q)\wedge(p_2\vee q)\wedge...\wedge(p_n\vee q)$$

8 kapitola

Reálne funkcie dvoch premenných

8.1 Číselné množiny

V druhej kapitole tejto knihy sme špecifikovali pojem množiny, ktorý patrí medzi základné koncepty matematiky. V rámci karteziánskeho súčinu množín sme definovali ***n*-rozmerný priestor** R^n ako množinu, ktorá obsahuje všetky možné n-tice nad množinou reálnych čísel R, potom bod z tohto priestoru je je vyjadrený pomocou usporiadanej n-tice reálnych čísel

$$A \in R^n \Rightarrow A = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \tag{8.1}$$

Vzdialenosť medzi dvoma bodmi $A = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ a $B = \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$ je určená vzťahom

$$d\left(A, B\right) = \sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2 + ... + \left(b_n - a_n\right)^2} \tag{8.2}$$

Vzdialenosť vo všeobecnosti musí vyhovovať týmto trom podmienkam

1. $d\left(A, B\right) \geq 0 \left(d\left(A, B\right) = 0\right.$, len pre $\left.A = B\right)$
2. $d\left(A, B\right) = d\left(B, A\right)$ (symetričnosť)
3. $d\left(A, C\right) \leq d\left(A, B\right) + d\left(B, C\right)$ (trojuholníková nerovnosť, rovnosť platí len, ak body A,B a C ležia na priamke)

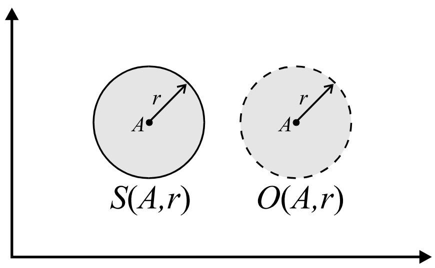
8.2 Okolie bodov

Guľa so stredom v bode A a polomerom r je množina

$$S\left(A, r\right) = \left\{X \in R^n; d\left(A, R\right) \leq r\right\} \tag{8.3}$$

Otvorená guľa so stredom v bode A a polomerom r je množina (pozri obr. 8.1)

$$O\left(A, r\right) = \left\{X \in R^n; d\left(A, R\right) < r\right\} \tag{8.4}$$



Obrázok 8.1. Ilustratívne príklady číselných množín „guľa“ a „otvorená guľa“.

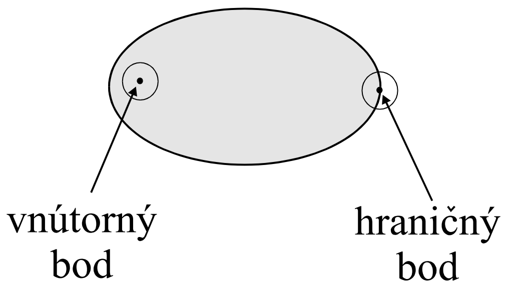
Body v číselnej množine M delíme na:

1. **vnútorný bod,** je to taký bod A, pre ktorý existuje guľa $S(A,r)$, ktorá celá leží v množine M

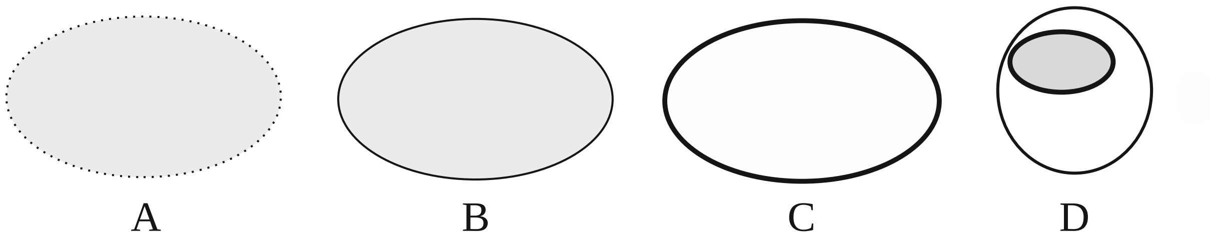
$$S(A,r) \subset M$$

2. **hraničný bod,** je to taký bod A, pre ktorý každá guľa $S(A,r)$ obsahuje tak aspoň jeden bod z množiny M a aspoň jeden bod mimo nej

$$S(A,r) \cap M \neq \emptyset \text{a} S(A,r) - M \neq \emptyset$$



Obrázok 8.2. Ilustratívne príklady „vnútorného!.bodu a „hraničného“ bodu.



Obrázok 8.3. (A) Množina sa nazýva **otvorenou množinou**, ak každý jej bod je vnútorný bod. (B) Množina sa nazýva **uzavretou množinou**, ak obsahuje všetky svoje hraničné body, pričom (C) tieto hraničné body množiny tvoria jej **hranicu**. (D) Množina sa nazýva **ohraničenou**, ak je podmnožinou nejakej gule

8.3. Limita postupnosti

Nech $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov v R^n. Hovoríme, že táto postupnosť konverguje k bodu A (alebo bod A je limitou postupnosti), ak číselná postupnosť $\{d(A, X_m)\}_{m=1}^{\infty}$ konverguje k nule

$$\lim_{n\to\infty} d(A, X_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = A \tag{8.5}$$

Príklad. Nájdite limitu postupnosti

$$\left\{X_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{2n}{3n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Limitu tejto postupnosti, bod $A=(a_1,a_2)$, nájdeme jednoducho tak, že spočítame limity prvej a druhej komponenty postupnosti

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$a_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

alebo

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A = \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

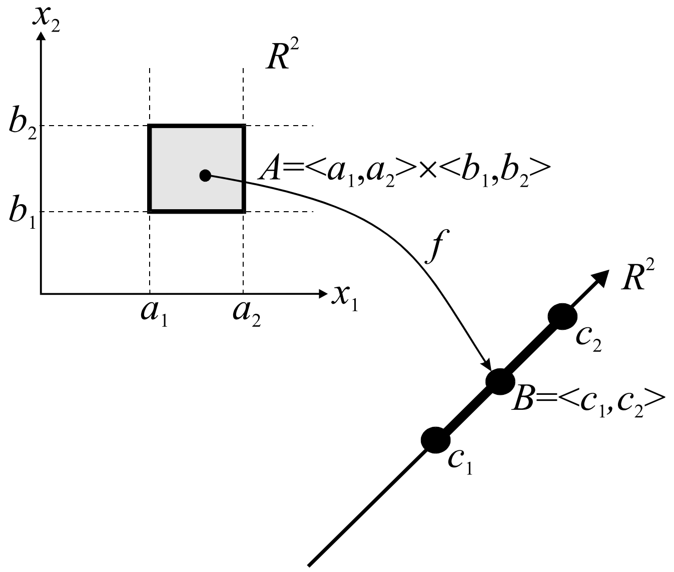
8.4. Reálna funkcia 2 premenných

Reálna funkcia *n* premenných je zobrazenia takto

$$f : A \subset R^2 \to B \subset R \qquad (8.6a)$$

kde *A* je definičný obor funkcie a *B* je obor funkčných hodnôt. Funkciu zapisujeme

$$y = f\left(x_1, x_2\right) \qquad (8.6b)$$



Obrázok. 8.4. Ilustračný diagram definície funkcie s definičným oborom A, pričom obor funkčných hnodnôt je u uzuvretej úsečky

Príklad 8.1. Nájdite definičný obor funkcie

$$f\left(x, y\right) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

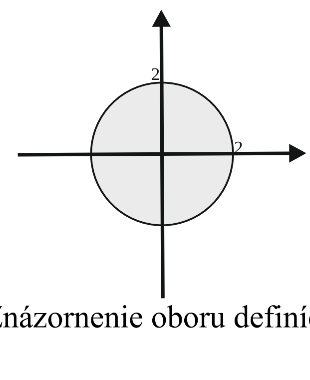
Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

Riešením tejto nerovnice dostaneme, že obor definície funkcie f je číselná množina

$$A = \left\{X = \left(x, y\right); x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Táto množina je uzavretá a obsahuje všetky body ležiace v kruhu so stredom v bode (0,0) a s polomerom 2, pozri obr. 8.5.



Obrázok . 8.5. Znázornenie oboru definície z príkladu 8.1.

Grafom funkcie $f : A \subset R^n \to B \subset R$ nazývame množinu bodov

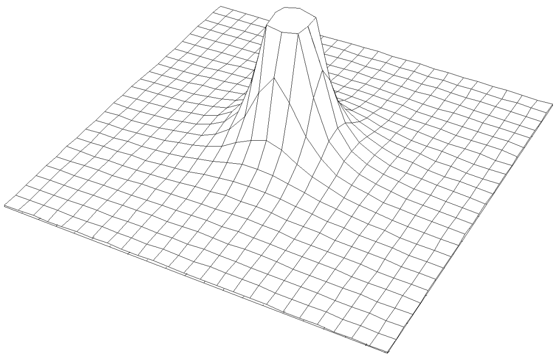
$$G_f = \left\{ X = \left(x_1, x_2, y = f\left(X \right) \right); X \in A \right\} \tag{8.7}$$

Príklad 8.2.. Nakreslite graf funkcie

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Obor definície tejto funkcie je celá "rovina" R^2 okrem počiatku (0,0), funkčné hodnoty sú nezáporné

$$A = R^2 - \left(0, 0\right)$$
$$B = \left(0, \infty\right)$$



Obrázok. 8.6. Graf funkcie $f\left(x, y\right) = 1 \big/ \left(x^2 + y^2\right)$

8.5. Limita funkcie

Definícia. Nech funkcia $z = f\left(X\right)$ je definovaná v nejakom okolí bodu *A*. Potom hovoríme, že funkcia $f\left(X\right)$ má v bode *A* limitu rovnú *b*,

$$\lim_{X \to A} f\left(X\right) = b\,, \tag{8.8a}$$

ak pre každú postupnosť $\left\{X_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde $X_n \in D_f$ a $X_n \neq A$, ktorá konverguje k bodu *A*, $\lim_{n \to \infty} X_n = A$, platí

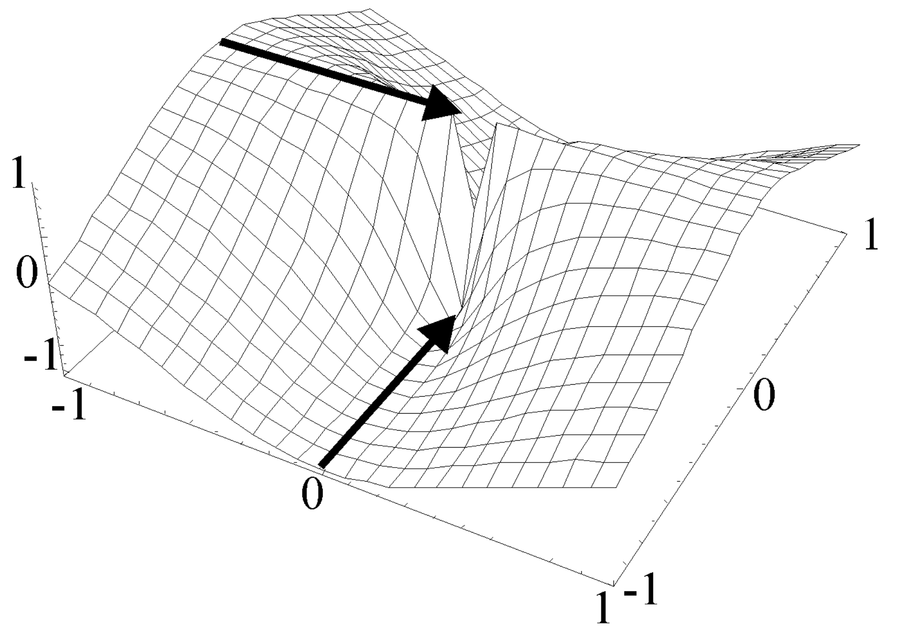
$$\lim_{n \to \infty} f\left(X_n\right) = b\,. \tag{8.8b}$$

Poznámky.
(1) V definícii je použitý pojem *okolie* bodu *A*, pod týmto pojmom rozumieme tvorenú guľu so stredom v bode *A* a s nejakým polomerom *r*.
(2) V prípade, že existujú také dve postupnosti, že funkcia má pre ne rôzne limity, potom hovoríme, že funkcia nemá limitu v bode *A*.

Príklad 8.3. Zistite, či funkcia

$$f\left(x, y\right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

má v bode *A*=(0,0) limitu.

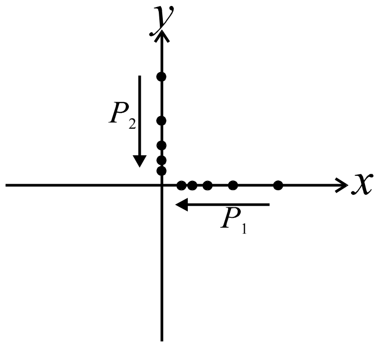


Obrázok 8.8. Znázornenie nespojitosti funkcie $f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)/\left(x^2+y^2\right)$ v bode (0,0).

Definujme si nasledujúce dve postupnosti

$$P_1=\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ a} P_2=\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ktoré majú rovnakú limitu A=(0,0), líšia sa len spôsobom približovania k tomuto bodu, pozri nasledujúci obrázok.



Obrázok 8. Znázornenie postupnosti bodov pri výpočte limity funkcie z obr. 8.8.

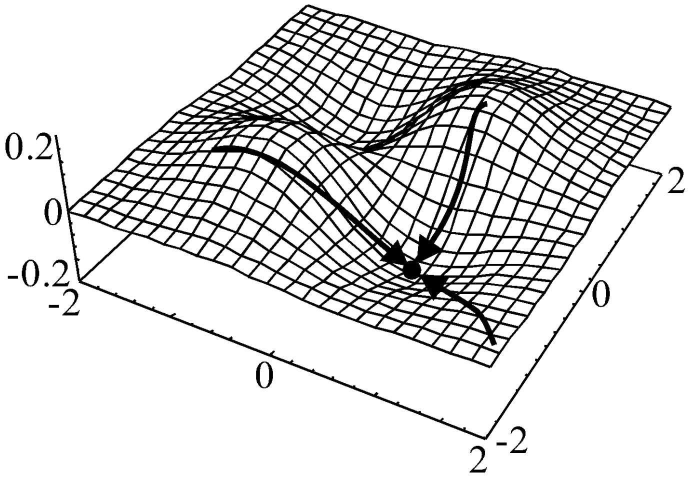
$$P_1: \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1/n\right)^2}{\left(1/n\right)^2+0}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

$$P_2: \lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-\left(1/n\right)^2}{0+\left(1/n\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(-1\right)=-1$$

To znamená, že funkcia nemá v bode A=(0,0) limitu.

Funkcia $z=f(X)$ je **spojitá** v bode A, ak je v tomto bode definovaná a platí

$$\lim_{X\to A} f(X)=f(A) \tag{8.9}$$



Obrázok. 8.9. Znázornenie rôznych trajektórii spojitej funkcie, ktoré sa vždy blížia k rovnakému bodu A.

Poznámka. Pre funkciu $z = f(X)$, ktorá je spojitú v bode *A*, jej limita v bode *A* nezávisí od spôsobu blíženia sa k tomuto bodu a jej hodnota sa rovná funkčnej hodnote v tomto bode.

8.6. Parciálne derivácie

Majme funkciu dvoch premenných $z = f(x, y)$, predpokla-dajme, že druhá premenná je zafixovaná, $y = y_0$, potom dostaneme funkciu jednej premennej

$$z = g(x) = f(x, y_0)$$

Ak táto funkcia má deriváciu $g'(x_0)$, potom hovoríme, že funkcia $z = f(x, y)$ má deriváciu v bode $A = (x_0, y_0)$.

Nech funkcia $z = f(x, y)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $A = (x_0, y_0)$. Ak existuje limita

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}} \tag{8.10}$$

nazývame ju **parciálnou deriváciou** podľa *x* v bode $A = (x_0, y_0)$ a zapisujeme

$$f_x'(A) \text{ alebo } f_x'(x_0, y_0) \text{ alebo } \frac{\partial f(A)}{\partial x} \text{ alebo } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \tag{8.11}$$

Analogickým spôsobom sa definuje parciálna derivácia funkcie $z = f(x, y)$ podľa *y* v bode $A = (x_0, y_0)$

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{8.12}$$

Poznámky

1. Z definície parciálnych derivácií vyplýva, že ich výpočet sa realizuje podobne ako výpočet obyčajných derivácií tak, že sa **predpokladá konštantnosť druhej premennej**.

2. Zovšeobecnenie parciálnych derivácií pre viac ako dve premenné je priamočiare. Tak napríklad, parciálna derivácia funkcie $u = f(x, y, z)$ v bode $A = (x_0, y_0, z_0)$ podľa premennej x je definovaná takto

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \tag{8.13}$$

3. Vo všeobecnosti možno povedať, že parciálna derivácia funkcie 2-premenných $y = f(x_1, x_2)$ v bode $A = (x_1^0, x_2^0)$ podľa premennej x_2 sa počíta tak, že druhá premenná x_1 sa zafixujú v bode x_1^0 a daná parciálna derivácia sa počíta ako obyčajná parciálna derivácia podľa premennej x_i.

Príklad 8.4. Vypočítajte parciálne derivácie funkcie

$$f(x, y) = xy - x^2 + y^3$$

v bode $A = (x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = y_0 - 2x_0, f'_y(x_0, y_0) = x_0 - 3y_0^2$$

Parciálne derivácie funkcie $f(x, y)$ môžeme formálne chápať, ako nové funkcie

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f'_x(x, y) \\ G(x, y) &= f'_y(x, y) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Parciálne derivácie týchto dvoch funkcií sa interpretujú ako druhé parciálne derivácie funkcie $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ f''_{yx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ f''_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{8.15}$$

Veta. Ak funkcia $f(x, y)$ má v bode $A = (x_0, y_0)$ zmiešané druhé parciálne derivácie $f''_{xy}(x_0, y_0)$ a $f''_{yx}(x_0, y_0)$, pričom sú v bode $A = (x_0, y_0)$ spojité, potom tieto zmiešané parciálne derivácie sú si rovné

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}} \tag{8.16}$$

Príklad 8.5. Vypočítajte prvé a druhé parciálne derivácie funkcie

$$f(x, y) = \sin(x - 2y) + x^2 y^3$$

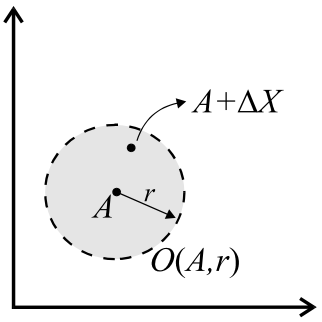
Prvé parciálne derivácie majú tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x-2y) + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\cos(x-2y) + 3x^2y^2$$
Druhé parciálne derivácie spočítame tak, že budeme parciálne derivovať 1. parciálne derivácie
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x-2y) + 2xy^3\right) = -\sin(x-2y) + 2y^3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x-2y) + 2xy^3\right) = 2\sin(x-2y) + 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\cos(x-2y) + 3x^2y^2\right) = 2\sin(x-2y) + 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2\cos(x-2y) + 3x^2y^2\right) = 4\sin(x-2y) + 6x^2y$$

Zmiešané druhé parciálne derivácie sú si rovné, čo potvrdzuje predchádzajúcu vetu.

8.7. Totálny diferenciál

Nech funkcia $y = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ je definovaná v nejakom okolí bodu $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Predpokladajme, že bod $A + \Delta X = A + (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$ leží v tomto okolí, pozri obr. 8.10..



Obrázok. 8.10. Otvorená množina okolia bodu A, kde $y = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Rozdiel
$$\Delta f(A) = f(A + \Delta X) - f(A) \tag{8.17}$$
nazývame **diferenciou** funkcie *f* v bode *A* pre prírastok ΔX.

Funkciu $f(X)$ definovanú v okolí bodu *A* nazývame **diferencovateľnou** v bode *A* ak diferenciu $\Delta f(A)$ môžeme vyjadriť v tvare
$$\Delta f(A) = \underbrace{\frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\Delta x_n}_{df(A)} + \omega(\Delta X)\cdot|\Delta X| \tag{8.18}$$

kde $\omega(\Delta X)$ je spojitá funkcia vyhovujúca podmienke

$$\lim_{(\Delta X(\to 0} \omega(\Delta X) = 0 \tag{8.19}$$

pre $\Delta X = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Výraz $\Delta f(A)$ sa nazýva **totálny diferenciál** funkcie f v bode A pre prírastok ΔX.

$$\boxed{\Delta f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\Delta x_n} \tag{8.20}$$

8.8 Dotyková rovina ku grafu funkcie

Pre funkciu dvoch premenných $z = f(x, y)$ predpoklad diferencovateľnosti v bode $A = (x_0, y_0)$ znamená, že v tomto bode existuje dotyková rovina σ ku grafu funkcie

$$z = f(x, y) + d_1 \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + d_2 \underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} \tag{8.20}$$

ktorá po jednoduchých úpravách má tvar

$$\boxed{\sigma : d_1 x + d_2 y + (-1) z + (-d_1 x_0 - d_2 y_0 + f(x_0, y_0)) = 0} \tag{8.21}$$

Týmto sme dokázali, že ak $z = f(x, y)$ je diferencovateľná v bode $A = (x_0, y_0)$, potom v tomto bode má dotykovú rovinu σ ku grafu funkcie.

8.9. Diferenciál druhého rádu

Zovšeobecnenie totálne diferenciálu je diferenciál druhého rádu definovaný takto

$$d^2 f(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

Pre funkciu dvoch premenných $z = f(x, y)$ diferenciál druhého rádu v bode $A = (x_0, y_0)$ má tento tvar

$$d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}(\Delta y)^2$$

Definícia. Funkciu $f(X)$ definovanú v okolí bodu A nazývame *dvakrát diferencovateľnou* v bode A ak diferenciu $\Delta f(A)$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\Delta f(A) = df(A) + \frac{1}{2} d^2 f(A) + \sum_{k,l=1}^{n} \omega_{kl}(\Delta X) \Delta x_k \Delta x_l$$

kde $\omega_{kl}(\Delta X)$ sú spojité funkcie vyhovujúce podmienke $\lim\limits_{(\Delta X(\to 0} \omega_{kl}(\Delta X) = 0$

8.10. Približný výpočet funkčných hodnôt pomocou totálneho diferenciálu

Príklad 8.6. Pomocou totálneho diferenciálu spočítajte približne výraz $\sqrt{(3.02)^2+(3.98)^2}$.
Výraz prepíšeme do tvaru

$$\sqrt{(3+0.02)^2+(4-0.02)^2}=4.9960784621540923...$$

Jeho približný výpočet uskutočníme pomocou totálneho diferenciálu funkcie

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

v bode $A=(x_0,y_0)=(3,4)$ a pre diferencie $\Delta x_1=0.02$ a $\Delta x_2=-0.02$. Pre parciálne derivácie funkcie f v bode A platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f(A)}{\partial x}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f(A)}{\partial y}=\frac{4}{5}$$

Použijeme všeobecnú formulu, ktorá aproximuje prírastok funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Pre študovaný konkrétny prípad platí

$$\sqrt{(3+0.02)^2+(4-0.02)^2}\approx\sqrt{(3)^2+(4)^2}+\frac{3}{5}0.02+\frac{4}{5}(-0.02)$$

$$=5+\frac{0.06-0.08}{5}=5-\frac{0.02}{5}=$$

$$=5-0.004=4.996$$

Príklad 8.8. Pomocou totálneho diferenciálu zostrojte formulu pre odhad chyby pri výpočte nejakej veličiny, ktorá je funkciou dvoch nezávislých merateľných veličín určených s určitou chybou. Nech počítaná veličina je určená funkciou $z=f(x,y)$. Budeme počítať veličinu z pre

$$x=x_0\pm\Delta x,y=y_0+\Delta y$$

kde Δx a Δy sú chyby pri určení (meraní) nezávislých veličín x a y. Použijeme všeobecnú formulu pre približné vyjadrenie prírastku funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

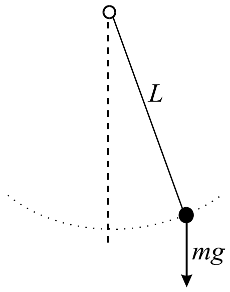
Použijeme všeobecnú formulu, ktorá aproximuje prírastok funkcie pomocou totálneho diferenciálu

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)\pm\Delta f$$

kde Δf je tzv. maximálna chyba výpočtu veličiny z, ktorá je spôsobená chybami pri určení nezávislých veličín x a y

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \right|$$

Príklad 8.. Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m , ktorý je zavesený na tuhom vlákne dĺžky L, pričom jeho hmotnosť je zanedbateľná.



Obrázok . 8.11. Znázornenie matematického kyvadla.

Perióda matematického kyvadla je určená vzťahom

$$T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{1/2}$$

kde g je gravitačné zrýchlenie. Riešením tohto vzťahu vzhľadom ku gravitačnému zrýchleniu g dostaneme

$$g = g(L, T) = L \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Predpokladajme, že chceme gravitačné zrýchlenie chceme určiť experimentálne pomocou matematického kyvadla, ktorého parametre sú $L = 4m \pm 1cm$ a $T = 4.01\sec \pm 0.01\sec$. S akou presnosťou sme schopní určiť gravitačné zrýchlenie?

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial L} \right)_{\substack{T=1 \\ L=4}} = \left(\frac{6.28}{4} \right)^2 = 2.46$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3} \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_{\substack{T=1 \\ L=4}} = \frac{8 \cdot (3.14)^2 \cdot 4}{(4)^3} = 4.93$$

Chyby merania nezávislých veličín sú

$$\Delta L = 0.01 m a \Delta T = 0.01 \sec$$

Potom maximálna chyba gravitačného zrýchlenia má hodnotu

$$\Delta g = |2.46 \cdot 0.01| + |4.93 \cdot 0.01| = 0.07$$

Experimentálne gravitačné zrýchlenie určíme pomocou vzťahu

$$g = L \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow g = 4 \left(\frac{6.28}{4.01} \right)^2 = 9.81$$

To znamená, že gravitačné zrýchlenie je experimentálne určené s chybou 9.81±0.07

8.11. Lokálne extrémy funkcií dvoch premenných

Predpokladajme, že funkcia $f(X)$ má v bode A *lokálne minimum* (*maximum*), potom existuje také okolie bodu A, že pre každý bod X z tohto okolia platí

$$f(X) \geq f(A)\ \left(f(X) \leq f(A)\right)$$

Ak rovnosť platí len pre $X=A$, potom hovoríme o *ostrom lokálnom minime* (*maxime*)

Lokálne extrémy (maximá a minimá) funkcií, ktoré majú prvé a druhé derivácie, môžeme nájsť pomocou nasledujúcich dvoch viet.

Veta (nutná podmienka). Ak funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A=(x_0,y_0)$ lokálny extrém a má v tomto bode prvé parciálne derivácie, potom

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \text{ a } \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

Bod $A=(x_0,y_0)$ v ktorom má funkcia $z = f(x,y)$ nulové parciálne derivácie

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

sa nazýva *stacionárny bod*.

Hessián funkcie $z = f(x,y)$ bode $A=(x_0,y_0)$ je matica obsahujúca druhé parciálne derivácie

$$H(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Symetrickú maticu

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

nazývame ***pozitívne definitnú*** (***negatívne definitnú***) ak pre ľubovolné čísla ξ_1 a ξ_2 platí

$$\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \left(\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j \leq 0\right)$$

pričom rovnosť platí len pre nulové čísla $\xi_1 = 0$ a $\xi_2 = 0$.

Príklad 8. Dokážte, že matica

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j &= m_{11}\xi_1^2 + 2m_{12}\xi_1\xi_2 + m_{22}\xi_2^2 \\ &= 4\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 \\ &= \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 \\ &= (\xi_1 + \xi_2)^2 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Veta (Sylvestrova). Symetrická matica

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná (negatívne definitná) vtedy a len vtedy, ak

$$m_{11}>0,\ \left(m_{11}<0\right),\ \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{vmatrix}=m_{11}m_{22}-m_{12}^2>0$$

Výraz z definície pozítvnej definitnosti môžeme písať v tvare (ze predpokladu, že $m_{11}\neq 0$)

$$\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\xi_i\xi_j=m_{11}\xi_1^2+2m_{12}\xi_1\xi_2+m_{22}\xi_2^2$$

$$=\frac{m_{11}^2\xi_1^2+2m_{11}m_{12}\xi_1\xi_2+m_{11}m_{22}\xi_2^2}{m_{11}}$$

$$=\frac{m_{11}^2\xi_1^2+2m_{11}m_{12}\xi_1\xi_2+m_{12}^2\xi_2^2+m_{11}m_{22}\xi_2^2-m_{12}^2\xi_2^2}{m_{11}}$$

$$=\frac{\left(m_{11}\xi_1+m_{12}\xi_2\right)^2+\left(m_{11}m_{22}-m_{12}^2\right)\xi_2^2}{m_{11}}$$

Pravá strane je kladná (záporná) pre $m_{11}>0$ ($m_{11}<0$) a $m_{11}m_{22}-\left(m_{12}\right)^2>0$

Veta (postačujúca podmienka). Ak funkcia $z=f\left(x,y\right)$ má v bode $A=\left(x_0,y_0\right)$ prvé a druhé parciálne derivácie, pričom tento bod je stacionárny a Hessián $H(A)$ je pozitívne (negatívne) definitný, potom funkcia má v bode A minimum (maximum).

K dôkazu tejto vety použijeme nasledujúci rozpis:

A. Funkcia $z=f\left(x,y\right)$ má v bode $A=\left(x_0,y_0\right)$ **minimum**, ak platí

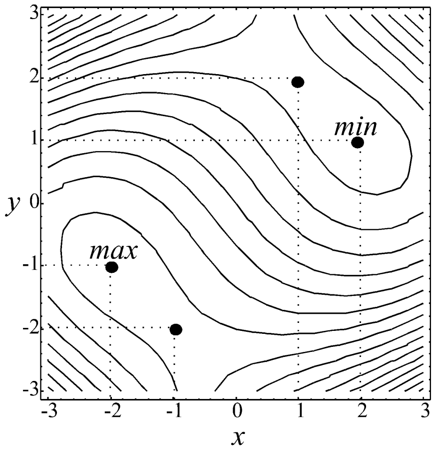
1. $\dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}=0$
2. $\dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial x^2}>0,\ \dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$

B. Funkcia $z=f\left(x,y\right)$ má v bode $A=\left(x_0,y_0\right)$ **maximum**, ak platí1.

1. $\dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}=0$
2. $\dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial x^2}<0,\ \dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f\left(A\right)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$

Príklad 8.10. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z=f\left(x,y\right)=x^3+3xy^2-15x-12y+1$$



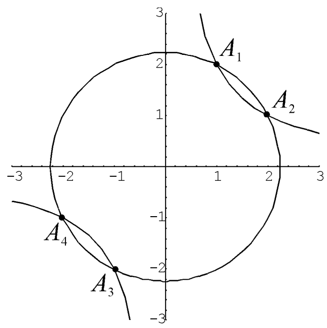
Obrázok 8.12. Znázornenie hyperplochy funkcia *f*(*x*,*y*) z príkladu 8.10.

1. krok - stacionárne body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

Tieto rovnice prepíšeme do tvaru

$$x^2 + y^2 = 5, y = \frac{2}{x}$$



Obrázok 8.13. Znázornenie stac. bodov funkcie *f*(*x*,*y*) z príkladu 8.10

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Funkcia má štyri stacionárne body

$$A_1 = (1,2), A_2 = (2,1), A_3 = (-1,-2), A_4 = (-2,-1)$$

2. krok - špecifikácia stacionárnych bodov

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$$H(A_1) = H(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, H(A_2) = H(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$H(A_3) = H(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, H(A_4) = H(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Hessián $H(A_2)$ je pozitívne definitný a $H(A_4)$ je negatívne definitný. Potom dva stacionárne body sú klasifikované podľa Vety 2 takto: A_2 je minimum a A_4 je maximum, zostávajúce body A_1 a A_3 nie sú podľa vety 2 klasifikované.

8.12. Gradient funkcie

Študujme funkciu

$$f{:}R^n \to R$$

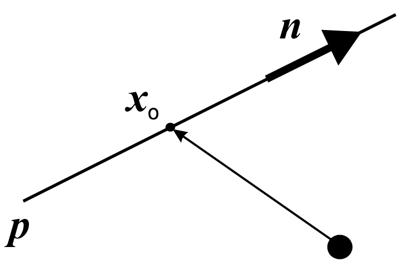
kde

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f\left(\mathbf{x}\right)$$

Definujme si funkciu 1-premennej

$$F\left(\lambda\right) = f\left(\mathbf{x}_o + \lambda \mathbf{n}\right)$$

kde $\boldsymbol{x}_0 = \left(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o\right) \in R^n$ je daný bod (vektor) a $\boldsymbol{n} = \left(n_1, n_2, ..., n_n\right) \in R^n$ je normalizovaný smerový vektor ($|\boldsymbol{n}|=1$), premenná λ je reálny parameter. Funkcia $F(\lambda)$ popisuje "zúženie" funkcie $f(\boldsymbol{x})$ na priamku p definovanú bodom $\boldsymbol{x}_0$ a smerom $\boldsymbol{n}$.



Obrázok 8.14. Parametre funkcie $F(\lambda)$

Derivácie tejto funkcie podľa premennej λ je určená pomocou formule pre výpočet derivácie zloženej funkcie

$$F'\left(\lambda\right) = \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{n}\right)}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{n}\right)}{\partial x_2} n_2 + ... + \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{n}\right)}{\partial x_n} n_n$$

Zavedieme symbol – gradient funcie $f(x_0)$ v bode x_0

$$\mathrm{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right) = \left(\frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x_n}\right)$$

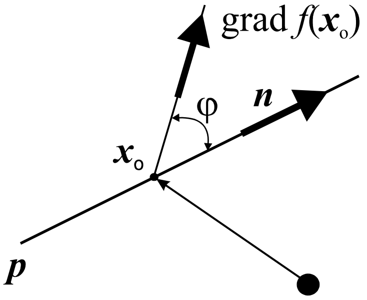
Ak v tomto výraze položíme $\lambda=0$, potom dostaneme tzv. deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{x}_0$ a v smere $\boldsymbol{n}$

$$F'\left(0\right) = \mathrm{grad} f\left(\mathbf{x}_0\right) \cdot \mathbf{n}$$

ktorý budeme nazývať gradient funkcie f v bode $\boldsymbol{x}_0$, ktorého komponenty sú 1. parciálne derivácie vzhľadom k premenným x_1, x_2,...,x_n. Deriváciu v smere prepíšeme pomocou skalárneho súčinu takto

$$F'\left(0\right) = \mathrm{grad} f\left(\mathbf{x}_o\right) \cdot \mathbf{n} = \left(\mathrm{grad} f\left(\mathbf{x}_o\right)\right(\cos\left(\varphi\right)$$

kde φ je uhol, ktorý medzi smerom $\boldsymbol{n}$ a grad $f(\boldsymbol{x}_0)$



Obrázok 8.15. Parametre z definície derivácie v smere.

Budeme študovať nasledujúce dva limitné prípady pre deriváciu v smere, a to (1) smer je paralelný s gradientom (φ=0) a (2) smer je antiparalelný s gradientom (φ=π)

$$F(0)\Big|_{\varphi=0} = +\left|\text{grad}f\left(\mathbf{x}_o\right)\right| > 0$$

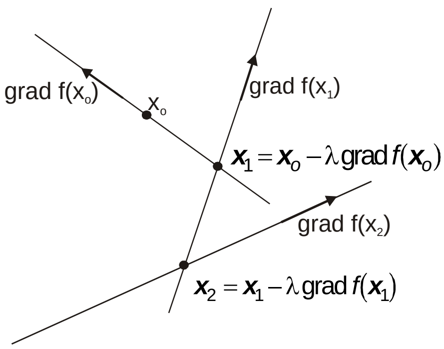
$$F(0)\Big|_{\varphi=\pi} = -\left|\text{grad}f\left(\mathbf{x}_o\right)\right| < 0$$

V smere gradientu grad $f(\boldsymbol{x}_o)$ funkcia $f(\boldsymbol{x})$ **najrýchlejšie rastie**, podobne, v opačnom smere - grad $f(\boldsymbol{x}_o)$ funkcia $f(\boldsymbol{x})$ **najrýchlejšie klesá**.

Ukážeme jednoduchú aplikáciu vlastnosti gradientu ako smeru v ktorom funkcia najrýchlejšie rastie (v opačnom smere najrýchlejšie klesá) k zostrojeniu jednoduchej numerickej metódy hľadania minima funkcie. Táto metóda je založená na geometrickej interpretácii gradientu, ako smeru v ktorom funkcia najrýchlejšie rastie. Budeme hľadať minimum funkcie $f(\boldsymbol{x})$, metóda najprudšieho spádu je založená na nasledujúcej rekurentnej formule

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda \text{grad}f\left(\mathbf{x}_k\right)$$

kde kladný parameter λ>0 je určený tak, aby platilo $f(\boldsymbol{x}_{k+1})<f(\boldsymbol{x}_k)$. To znamená, že tento parameter je určený dvoma protichodnými podmienkami, a to dostatočne malý, aby platila predchádzajúca nerovnosť a súčasne dostatočne veľký, aby bola zabezpečená dostatočná rýchlosť konvergencie metódy.



Obrázok 8.16. Ilustratívny príklad gradientovej metódy hľadania minima. Metóda je zahájená bodom x_o, v ktorom sa spočíta gradient grad $f(x_0)$, z bodu x_0 postupujeme v opačnom smere gradientu a zostrojíme bod x_1. Tento proces opakujeme tak dlho, až sa dostaneme do lokálneho minima.

8.13 Cvičenie

Cvičenie 8.1. Nájdite obor definície, obor funkčných hodnôt a nakreslite graf funkcie

(a) $f(x,y) = ln(xy)$

(b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$

(d) $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$

Cvičenia 8.2. Vypočítajte parciálne derivácie funkcií

(a) $f(x,y) = x + xy + y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + x$

(b) $f(x,y) = \sqrt{xy},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{2\sqrt{xy}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2y}\sqrt{\dfrac{y}{x}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x}{2y^2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

(d) $f(x,y) = sin\dfrac{x}{y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}cos\dfrac{x}{y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}cos\dfrac{x}{y}$

(e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{x}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{y}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{x}{y}},$

(f) $f(x,y) = sin\dfrac{y}{x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}cos\dfrac{y}{x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}cos\dfrac{y}{x}$

(g) $f(x,y) = ln(x+y),\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y}$

(h) $f(x,y) = ln(x \cdot y),\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$

(i) $f(x,y) = e^{xy},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$

(j) $f(x,y) = e^{x+y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}$

(k) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(l) $f(x,y) = ln\dfrac{x+y}{x-y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = \dfrac{-2y}{(x+y)(x-y)},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2x}{(x+y)(x-y)}$

(m) $f(x,y) = x^y = e^{y\,ln\,x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{y\,ln\,x}\dfrac{y}{x} = yx^{y-1},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{y\,ln\,x}\,ln\,x = ln\,x \cdot x^y$

(n) $f(x,y) = y^x = e^{x\,ln\,y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x\,ln\,y}\,ln\,y = ln\,y \cdot y^x,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x\,ln\,y}\dfrac{x}{y} = xy^{x-1}$

(o) $f(x,y) = x^m y^n,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$

(p) $f\left(x,y\right)=sin\left(ln\left(xy\right)\right),\quad \frac{\partial f}{\partial x}=cos\left(\frac{1}{x}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=cos\left(\frac{1}{y}\right)$

(q) $f\left(x,y\right)=\sqrt{sin^2 x+cos^2 y},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(sin^2 x+cos^2 y\right)^{-1/2} 2\,sin\,x\cdot cos\,x=\frac{sin\,x\cdot cos\,x}{\sqrt{sin^2 x+cos^2 y}},$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(sin^2 x+cos^2 y\right)^{-1/2} 2\,cos\,y\cdot\left(-sin\,y\right)=\frac{-sin\,y\cdot cos\,y}{\sqrt{sin^2 x+cos^2 y}}$$

Príklad 2. Vypočítajte prvé a druhé parciálne derivácie funkcií

(a) Všetkých príkladov (a-d) z príkladu 1

(b) $sin(x+y)$

(c) $\cos\left(\frac{x}{y}\right)$

Príklad 3. Vypočítajte diferenciál funkcie

(a) $f\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bode $A=\left(1,1\right)$ pre výchylky Δx a Δy.

(b) $f\left(x,y\right)=e^x\cos y$ v bode $A=\left(0,0\right)$ pre výchylky $\Delta x=0.1$ a $\Delta y=0.1$

Príklad 4. Nájdite extrémy pre funkciu

(a) $f\left(x,y\right)=5x^2+y^2+xy+x-y$

.

Riešenie. Stacionárny bod (v ktorom 1. parciálne derivácie sú nulové) je určený rovnicami

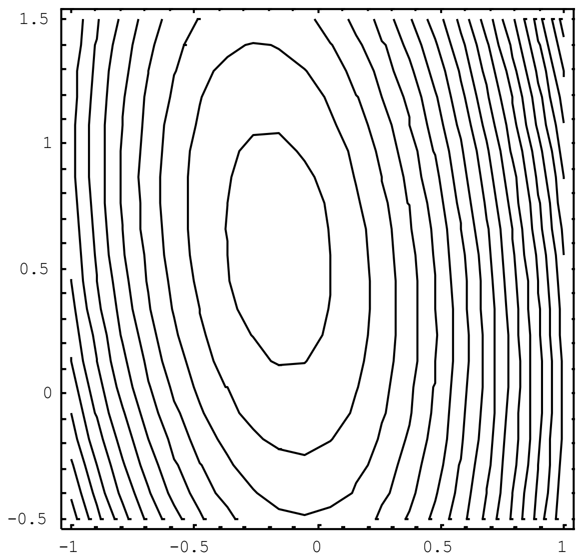
$$\frac{\partial f}{\partial x}=10x+y+1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+x-1=0$$

Riešením týchto dvoch lineárnych rovníc dostaneme $A=\left(-\frac{3}{19},\frac{11}{19}\right)$. Tento stacionárny bod je charakterizovaný vlastnosťami Hessiánu

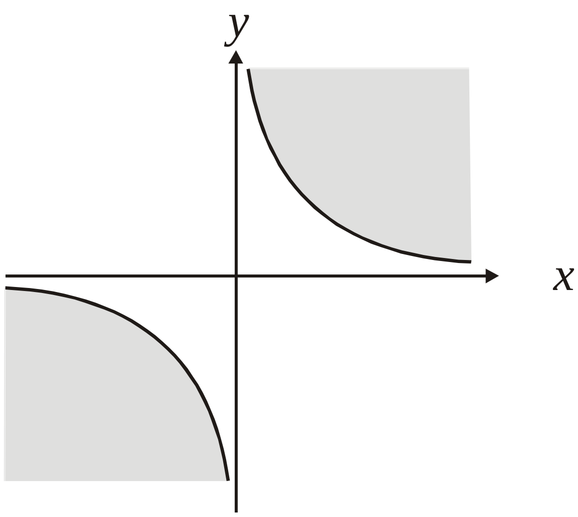
$$H\left(A\right)=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ktorého determinant je kladný a element $h_{11}=10>0$, čiže bod A je minimum. Priebeh funkcie je znázornenený vrstevnicovým grafom, pričom oblasť v strede grafu odpovedá minimu funkcie

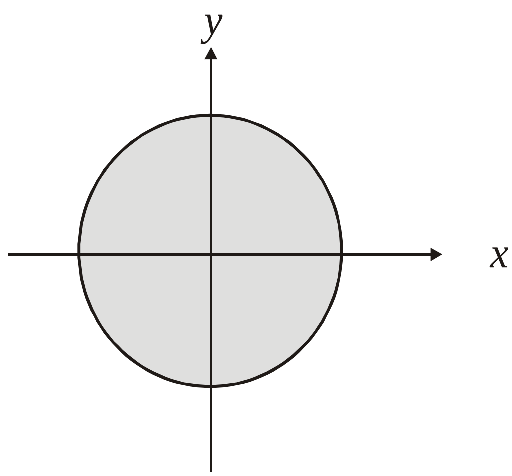


Riešenie.
(a) Základná podmienka pre definičný obor funkcie je $xy > 1$, riešením tejto nerovnice dostaneme

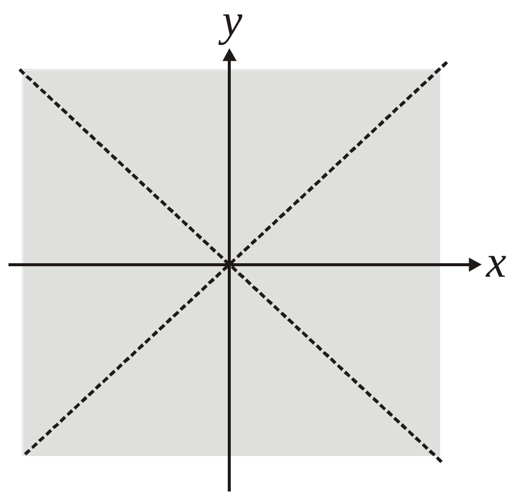
$$y > \frac{1}{x} \text{ (pre } x > 0\text{) alebo } y < \frac{1}{x} \text{ (pre } x < 0\text{)}$$



(b) Argument pod odmocninou musí byť nezáporný, čiže $x^2 + y^2 \leq 2^2$, potom obor definície funkcie je určený oblasťou uzavretou kružnicou o polomere 2 so stredom v počiatku súradnicového systému



(c) Definičný obor funkcie je určený podmienkou $x^2 - y^2 \neq 0$, riešením tejto nerovnice dostaneme $x^2 \neq y^2$, alebo $|x| \neq |y|$, potom definičný obor funkcie je celá rovina okrem priamok $y = x$ a $y = -x$.



Riešenie. Parciálne derivácie funkcie sú určené takto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}} \Rightarrow \frac{\partial f\left(A\right)}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}} \Rightarrow \frac{\partial f\left(A\right)}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Potom diferenciál $df(A)$ má tvar

$$df\left(A\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Delta x + \Delta y\right)$$

Príklad 3. Vypočítajte približne pomocou diferenciálu výraz $e^{0.1} cos\, 0.1$. Potom, $x_0 = 0, \Delta x = 0.1$, $y_0 = 0, \Delta y = 0.1$, A=(0,0). Parciálne derivácie funkcie f sú určené takto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial f\left(A\right)}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial f\left(A\right)}{\partial x} = 0$$

Pre totálny diferenciál $df\left(A\right)$ v bode $A = \left(0,0\right)$ platí $df\left(A\right) = \Delta x = 0.1$, čiže približná hodnota výrazu $e^{0.1} \cos 0.1$ je určená vzťahom

$e^{0.1} \cos 0.1 \doteq f\left(A\right) + df\left(A\right) = 1 + 0.1 = 1.1$

11. kapitola

Číselné postupnosti, nekonečné rady a Taylorov rad

11.1 Číselná postupnosť

Číselná postupnosť je špecifikovaná nekonečnou číselnou množinou $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, alternatívny zápis tejto postupnosti je

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ alebo len } \{a_n\} \tag{11.1b}$$

Formálne ju môžeme špecifikovať pomocou funkcie $f : N \to R$, ktorá zobrazuje množinu prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, ...\}$ na množinu reálnych čísel $R = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} a_1 &= f(1) \\ a_2 &= f(2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= f(n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11.1b}$$

Príklad 11.1. Napíšte prvých 5 členov postupnosti s

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = \frac{5}{6}$$

Príklad 11.2. Majme postupnosť

$$\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

Všeobecný tvar *n*-tého člena je $a_n = 2n$.

Iný, alternatívny zápis číselnej postupnosti je tzv. rekurentný prístup:

(1) *n*-tý člen a_n je určený pomocou predchádzajúcich členov a
(2) poznáme hodnoty prvých členov postupnosti.

Príklad 11.3. Zostrojte postupnosť, ktorá je rekurentne zadaná vzťahom

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

kde a_1=1 a a_2=2. Jednotlivé členy postupnosti sú zadané takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 3 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 8 \end{aligned}$$

Postupnosť $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 5, 8, ...\}$ sa nazýva Fibonaciho postupnosť.

11.2. Aritmetická postupnosť

je rekurentne zadaná postupnosť, nový člen postupnosti zostrojíme z predchádzajúceho tak, že k nemu pripočítame konštantný člen

$$a_{n+1} = a_n + d \tag{11.2a}$$

kde a_1 je zadané a d sa nazýva diferencia. Jednoduchými úvahami dostaneme

$$a_n = a_1 + (n-1) \tag{11.2b}$$

Sumáciu prvých n členov tejto postupnosti označíme

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{11.2b}$$

kde

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(a_1 + (i-1)d\right) = na_1 + d\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= na_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\left(2a_1 + d\,(n-1)\right) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned} \tag{11.3b}$$

Príklad 11.4. Vypočítajte súčet prvých desiatich členov aritmetickej postupnosti, ktorá je zadaná a_5=8 a a_8=17.

$$a_8 = a_5 + 3d \Rightarrow 17 = 8 + 3d \Rightarrow d = 3$$

$$a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow a_1 = a_8 - 7d \Rightarrow a_1 = 17 - 21 = -4$$

$$a_{10} = a_8 + 2d \Rightarrow a_{10} = 17 + 6 \Rightarrow a_{10} = 23$$

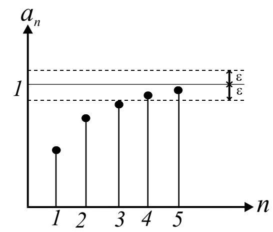
$$s_{10} = \frac{10}{2}(-4 + 23) = 95$$

11.3. Limita postupnosti

Študujme postupnosť

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ...\right\}$$

ktorá je znázornená na obr. 11.1



Obázok 11.1. Znázornenie limity postupnosti

Na základe tohto ilustračného príkladu môžeme pristúpiť k nasledujúcej definícii limity. Postupnosť $\{a_n\}$ má limitu číslo a, ak pre každé ε > 0 existuje také n_0, že pre každé $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Túto vlastnosť zapisujeme vzťahom $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall(\varepsilon>0)\exists(n_o>0)\forall(n>n_0) : |a_n - a| < \varepsilon \tag{11.7}$$

Budeme používať túto terminológiu: ak postupnosť $\{a_n\}$ má limitu, potom hovoríme, že postupnosť je **konvergentná**, v opačnom prípade je **divergentná**.

V špeciálnych prípadoch môže existovať nevlastná limita postupnosti: Ak pre postupnosť $\{a_n\}$ platí, že pre ľubovolné K>0 existuje také n_0, že pre každé $n>n_0$ platí $a_n>K$ ($a_n<-K$) , hovoríme, že postupnosť má nevlastnú limitu ∞ (-∞)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall(K>0)\exists(n_0>0)\forall(n>n_0) : a_n > K$$

$$alebo \tag{11.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall(K>0)\exists(n_0>0)\forall(n>n_0) : a_n < -K$$

Potom hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}$ je divergentná vtedy, ak jej limita je nevlastná alebo neexistuje.

Príklad 11.6. Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ má limitu číslo a=1. Riešme nerovnosť

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

kde ε je malé kladné číslo. Položme

$$n_0 = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$$

Potom, pre každé malé kladné číslo ε existuje prirodzené číslo n_0 také, že každé $n>n_0$ platí $|a_n - 1| < \varepsilon$, t.j. platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Príklad 11.7. Dokážte, že postupnosť $\{2^n\}$ je divergentná a má nevlastnú limitu ∞. Nech K je ľubovolné kladné číslo, riešme nerovnosť

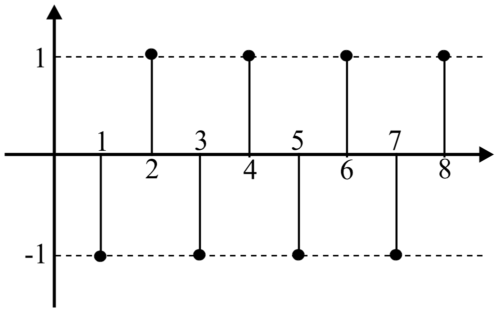
$$2^n > K \Rightarrow n > \frac{\ln K}{\ln 2}$$

Položme

$$n_0 = \left\lceil \frac{\ln K}{\ln 2} \right\rceil$$

Potom, pre ľubovolne veľké číslo K>0 existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé $n>n_0$ platí $a_n>K$.

Príklad 11.8. Ukážte, že postupnosť $\{(-1)^n\}$ je divergentná, nemá limitu. Postupnosť má tvar $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$. Z obr. 11.2 jasne vyplýva, že táto postupnosť nemá limitu, t.j. je divergentná.



Obrázok 11.2. Znázornenie oscilujúcej postupnosti, ktorá nemá limitu (je divergentná)

11.4 Nekonečné rady

Pod nekonečným radom rozumieme nekonečnú sumáciu jej členov z postupnosti $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$,

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11.9}$$

Z tohto nekonečného radu vytvoríme posupnosť tzv. parciálnych súčtov

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n$$

Túto postupnosť označíme $\{s_1, s_2, ..., s_n, ...\}$, kde

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_1$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$
$$......................................$$
$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = s_{n-1} + a_n$$
$$..$$

To znamená, že z nekonečného radu $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sme vytvorili alternatívny pojem nekonečnú postupnosť čiastočných súčtov. Ak táto postupnosť má vlastnú limitu, hovoríme, že **číselný rad je konvergentný**, v opačnom prípade, ak postupnosť nemá limitu, potom hovoríme, že **číselný rad je divergentný**.

11.5. Geometrický rad

Geometrická rad je vytvorený pomocou číselnej postupnosti špecifikovanej rekurentne takto

$$a_{n+1} = q a_n \tag{11.10}$$

kde a_1 je zadané a q sa nazýva **kvocient**. Ak použijeme jednoduchú algebraickú identitu

$$\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right)\left(1 - q\right) = 1 - q^n \tag{11.11}$$

jednoduchými úvahami dokážeme, že parciálna suma prvých n členov postupnosti je jednoducho špecifikovaná takto

$$a_n = q^{n-1}a_1, \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1-q^n}{1-q}a_1 \tag{11.12}$$

Príklad 11.9. Do banky vložíme sumu a_0 peňazí na α% úrok. Koľko peňazí budeme mať v banke po n rokoch. Jedná sa o jednoduchú aplikáciu geometrickej postupnosti. Kvocient q je určený takto

$$q = 1 + \frac{\alpha}{100}$$

Po prvom roku v banke bude uložená suma

$$a_1 = a_0 + \frac{\alpha}{100}a_0 = qa_0$$

Po druhom roku v banke bude uložená suma $a_2 = qa_1 = q^2 a_0$. Zovšeobecnením tejto rekurzie dostaneme, že po n rokoch v banke bude uložená suma

$$a_n = q^n a_0$$

Aplikáciou tohto vzorca môžeme riešiť jednoduchú úlohu, akú sumu a_0 musíme uložiť do banky na α% úrok, aby sme po n rokoch mali v banke a_n peňazí?

$$a_0 = \frac{a_n}{\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^n} = \frac{a_n}{q^n}$$

Príklad 11.10. Prepíšte reálne číslo 1.212121... do racionálneho tvaru a/b, kde a, b sú celé nesúdeliteľné čísla. ***Poučenie z teórie čísel***: Nutná a postačujúca podmienka, aby reálne číslo bolo racionálne číslo je konečná perióda reálneho čísla.

$$\begin{aligned} 1.2121\ldots &= 1 + 0.21 + 0.0021 + \ldots \\ &= 1 + \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \ldots \\ &= 1 + \frac{21}{10^2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right)}_{geometrický\ rad} = \\ &= 1 + \frac{21}{10^2}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{120}{99} \end{aligned}$$

To znamená, že reálne číslo 1.212121... s konečnou periódou .21. môžeme prepísať do tvaru racionálneho čísla 120/99.

Z definície konvergencie číselného radu vyplýva jednoduchá nutná podmienka:. Ak rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Jednoduchými úvahami dostaneme

$$s_n = s_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_n - s_{n-1}\right) = s - s = 0$$

t. j., ak platí $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potom rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverguje.

11.6. Kritéria konvergencie radov

11.6.1 D´Alambertovo kritérium

Toto kritérium konvergencie má tento tvar

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q\begin{cases} <1 \Rightarrow \text{rad konverguje} \\ =1 \Rightarrow ? \\ >1 \Rightarrow \text{rad diverguje}\end{cases} \tag{11.13}$$

Jeho aplikácia spočíva vo výpočte limity $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = q$, ak $\underset{n\to\infty}{q<1}$, potom rad konverguje; ak $\underset{n\to\infty}{q>1}$, potom rad divergueje; v prípade $\underset{n\to\infty}{q=1}$, nevieme sa rozhodnúť, rad môže konvergovať alebo divergovať (použijeme iné kritérium konvergencie, ktoré je v tomto prípade jednoznačné).

Príklad 11.11. Zistite, či konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$. Použijeme D´Alambertovo kritérium, dostaneme (11.13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

rad je konvergentný.

Príklad 11.12. Zistite, či konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$. Použijeme D´Alambertovo kritérium, dostaneme (11.13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n!} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

rad je divergentný.

11.6.2. Cauchyho kritérium

Toto kritérium konvergencie má tento tvar

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q\begin{cases} <1 \Rightarrow \text{rad konverguje} \\ =1 \Rightarrow ? \\ >1 \Rightarrow \text{rad diverguje}\end{cases} \tag{11.14}$$

S podobnou interpretáciou výsledku q z D´Alambertovho kritéria

Príklad 11.13. Zistite, či konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{n+2}\right)^n$, použijeme Cauchyho kritérium (11.14) , dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1} = 2 > 1$$

rad diverguje.

Príklad 11.14. Zistite, či konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ln(n+1)}\right)^n$, použijeme Cauchyho kritérium (11.14) , dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{ln(n+1)}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{ln(n+1)}=\frac{1}{\infty}=0<1$$

Rad konverguje.

11.6.3. Leibnizovo kritérium

Toto kritérium konvergencie má tento tvar: nech Rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je alternujúci, t. j. má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|$$

Podľa Leibnizovho kritéria, tento rad je konvergentný práve vtedy, ak $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

Príklad 11.15. Zistite, či je konvergentný alternujúci harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentný . Použitím Leibnizovho kritéria dostaneme,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

že rad je konvergentný.

11.7. Funkcionálne rady

Funkcionálny rad je nekonečný rad, ktorého členy sú funkcie

$$a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+...+a_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x) \qquad (11.15)$$

Obor konvergencie daného funkcionálneho radu nech je označený M, potom

$$(\forall x\in M)(\text{funkcionálny rad konverguje}) \qquad (11.15)$$

Príklad 11.16. Zistite obor konvergencie funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$. Daný funkcionálny rad je geometrický rad, preto jeho obor konvergencie je $M=(-1,1)$

Príklad 11.17. Zistite obor konvergencie funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty}(ln\,x)^n$. Tento rad je geometrický s kvocientom $q=ln\,x$, podmienka konvergencie geometrického radu je $|q|<1$, z čoho vyplýva $|ln\,x|<1$, táto nerovnica má riešenie, ktoré určuje obor konvergencie takto

$$M=\left(e^{-1},e\right)$$

Príklad 11.18. . Zistite obor konvergencie funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(x-4)^n}$. Použijeme D´Alambertovo kritérium, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}(x-4)^{n+1}}}{\frac{n}{2^n(x-4)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}(x-4)^{n+1}}\frac{2^n(x-4)^n}{n}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{|x-4|}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}_{1} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{|x-4|}<1\Rightarrow\frac{1}{|x-4|}<2\Rightarrow|x-4|>\frac{1}{2}$$

Táto nerovnice má riešenie pre každé x z intrervalu $M=\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{9}{2},\infty\right)$. Na záver ešte budeme vyšetrovať hraničné body intervalu.

(1) $x=\frac{7}{2}$, potom $a\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{n+1}{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=(-1)^n(1+n)$, rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ diverguje.

(2) $x=\frac{9}{2}$, potom $a\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{n+1}{2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}=(1+n)$, rad $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$ diverguje.

Z toho vyplýva, že okrajové body nemôžu byť v obore konvergencie, konečný tvar oboru konvergencie je

$$M=\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{9}{2},\infty\right)$$

11.8. Rozvoj funkcie do mocninového radu (Taylorov rozvoj)

Úvodom k tejto kapitole budeme študovať ilustračný príklad sumácie geometrického radu

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)}\qquad\left(\forall x\in(-1,1)\right)\tag{11.16}$$

Tento príklad zovšeobecníme tak, že pre danú funkciu $f(x)$ hľadáme taký mocninový rad, aby jeho suma bola rovná danej funkcii

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\qquad(\forall x\in M)\tag{11.17}$$

Požadovaná zovšeobecnenie vykonáme takto: Majme funkciu $f(x)$, ktorá je v bode $a\in D_f$ ľubovoľný počet-krát diferencovateľná (t.j. má deriváciu ľubovoľného poriadku). Budeme hľadať taký polynóm n-tého rádu $T_n(x)$, aby jeho derivácie v bode a boli totožné s deriváciami funkcie $f(x)$

$$T_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n \tag{11.18a}$$

kde

$$T_n^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \qquad (i = 0,1,\ldots,n) \tag{11.18b}$$

Pomocou tejto identity môžeme určiť koeficienty $A_i = ?\quad (i = 0,1,\ldots,n)$. Riešením týchto podmienok dostaneme

$$A_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \qquad (i = 0,1,\ldots,n)$$

Taylorov polynóm má tento tvar

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i} \tag{11.19}$$

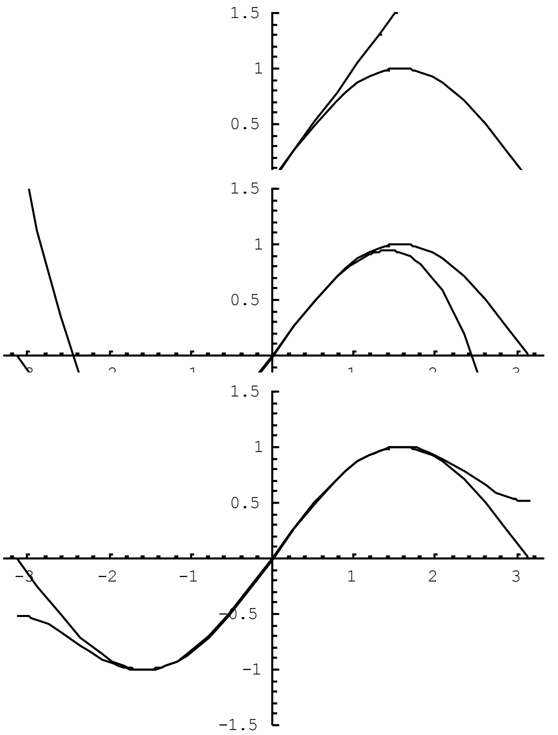
Príklad 11.19. Zostrojte Taylorove polynómy $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$ a $T_5(x)$ pre funkciu $f(x) = \sin x$, pre okolie bodu a=0.

$$f^{(0)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0 \Rightarrow A_0 = 0$$
$$f^{(1)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1 \Rightarrow A_1 = 1$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1 \Rightarrow A_3 = -1/3! = -1/6$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \Rightarrow A_4 = 0$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1 \Rightarrow A_5 = 1/5! = 1/120$$

$$T_1(x) = T_2(x) = x$$

$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

$$T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$



Zvyšok Taylorovho polynómu $Z_n(x) = f(x)$
v okolí bodu a=0 konverguje k nule, preto v u
prvými členmi Taylorovho rozvoja.

11.9. Taylorov rad

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v nejakom okolí bodu a a nech má každú deriváciu v tomto bode. Potom mocninový rad

$$\boxed{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \quad (11.20)$$

sa nazýva ***Taylorov rad funkcie*** f v bode a.

11. 9. 1. Taylorov rozvoj funkcie $f(x)=e^x$ v bode a=0

Pre n-tú deriváciu funkcie $f(x)=e^x$ platí

$$f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(0)=1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$$

Potom Taylorov rozvoj funkcie $f(x)=e^x$

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (\forall x\in R)} \quad (11.21)$$

Príklad 11.20. Vypočítajte číslo e.

Pomocou Taylorovho rozvoja funkcie e^x pre x=1 dostaneme tento rozvoj pre číslo e

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Jednotlivé členy z tohto rozvoja sú špecifikované v nasledujúcej tabuľke.

n	*n-tý člen*
0	1.000000
1	1.000000
2	0.500000
3	0.166667
4	0.041667
5	0.008333
6	0.001389
7	0.000198
8	0.000025
9	0.000003
Σ	2.718282

Vidíme, že jednotlivé členy pomerne rýchlo konvergujú k nule, čiže pre danú presnosť (určenú napr. počtom na výstupe kaukulačky) stačí len výpočet prvých 9 členov, ostatné už môžu byť ignorované ako nezobraziteľné na kalkulačke. Pre porovnanie tohto výsledku s presnou hodnotou e je uvedená jeho hodnota na 17 miest, presná hodnota e je ***e*=2.7182818284590452....**

11.9.2. Taylorov rozvoj funkcie *f*(*x*)=sin x v okolí bodu *a*=0

Pre *n*-tú deriváciu funkcie $f(x) = sin\,x$ platí

$$f^{(2n)}(x) \quad = (-1)^n sin\,x \Rightarrow f^{(2n)}(0) \quad = 0$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n cos\,x \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

V okolí bodu *a*=0 dostaneme

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Použitím rozvoja (11.20) dostaneme Taylorov rad pre funkciu *sin x* v okolí bodu *a*=0

n	*n-tý člen*
1	1.000000
3	-0.166667
5	0.008333
7	-0.000198
9	0.000003
Σ	0.841471

$$\boxed{sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \qquad (\forall x \in R)} \tag{11.22}$$

Príklad 11.21. Použitím Taylorovho rozvoja (11.22) spočítajte *sin* 1, dosadením do (11.22) hodnoty x=1 dostaneme tento rozvoj pre *sin* 1

$$sin1 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + ...$$

Jednotlivé členy z tohto rozvoja sú špecifikované v nasledujúcej tabuľke

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, z tabuľky plynie, že jednotlivé členy pomerne rýchlo konvergujú k nule, približne od 10. člena sú už príspevky menšie ako 10^{-6} , pre porovnanie s presnou hodnotou na 17 miest, sin 1=0.841470984807896..., vidíme, že približný výsledok získaný prvými 9. členmi Taylorovho rozvoja súhlasia s týmto presným výsledkom

11.10 Cvičenie

12. kapitola

Diferenciálne rovnice

12.1. Úvodné poznámky

Diferenciálne rovnice patria medzi dôležitú aplikačnú časť matematickej analýzy. Možno konštatovať, že bez ich existencie by nemohol existovať prudký rozvoj vedy a techniky v 18. a 19. storočí. Stali sa univerzálnym prostriedkom štúdia dynamických vlastností fyzikálnych, chemických a technologických systémov, použitím formálnych prostriedkov diferenciálnych rovníc umožnilo študovať a pochopiť vlastností rôznych dynamických systémov, čo v mnohých prípadoch umožnilo ich konštrukciu a technologické využitie. Jeden z najkrajších ilustratívnych príkladov je jeden z tvorcov matematickej analýzy anglický matematik a fyzik Isaac Newton (1642–1727), ktorý ju použil na vytvorenie dynamiky pohybu planét okolo Slnka, pričom jeho teoretické výsledky vykazovali presný súhlas s experimentálnymi astronomickými pozorovaniami, čo bolo na prelome 17. a 18. priamo nepredstaviteľná skutočnosť.

Diferenciálna rovnica je definovaná vzťahom

$$F\left(x,y,y',y'',...\right)=0 \tag{12.1}$$

kde nezávislá premenná *x*, závisle premenná *y* a jej derivácie sú vo funkčnom vzťahu *F*. Rád najvyššej derivácie určuje rád diferenciálnej rovnice. V prírodných vedách táto funkcia obvykle vyjadruje daný prírodný zákon. Príklady diferenciálnych rovníc sú

$$xy'+y^2=x \text{ ...diferenciálna rovnica 1. rádu} \tag{12.2a}$$

$$y'''+e^x y'=xe^{-x} \text{ ...diferenciálna rovnica 2. rádu} \tag{12.2b}$$

$$y^{(n)}+y=0 \text{ ...diferenciálna rovnica n-tého rádu} \tag{12.2c}$$

Diferenciálna rovnica 1. rádu má tvar

$$F\left(y,y',x\right)=0 \Rightarrow y'=f\left(x,y\right)$$

t. j. vystupuje v nej len 1. derivácia závislej premennej *y*.

Funkcia $\varphi(x)$ je ***riešením*** diferenciálnej rovnice $y'=f\left(x,y\right)$ na intervale $I=\langle a,b\rangle$ vtedy ak na tomto intervale platí

$$\varphi'(x)=f\left[x,\varphi(x)\right] \qquad \forall x\in I \tag{12.3}$$

Príklad 12.1. Dokážte, že funkcia $\varphi(x)=xe^x$ je riešením diferenciálnej rovnice druhého rádu

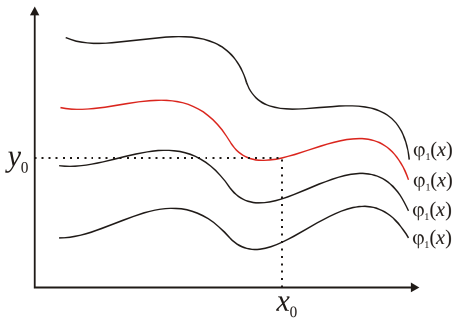
$$y''=\frac{2+x}{x}y$$

na intervale $I=R=(-\infty,\infty)$. Druhá derivácia funkcie $\varphi(x)=xe^x$ má tvar $\varphi''(x)=e^x\left(2+x\right)$, dosadením tohto vzťahu do diferenciálnej rovnice dostaneme

$$\varphi''(x)=e^x\left(2+x\right)=\frac{2+x}{x}xe^x$$

čo je identita pre každé $x\in R$, čo bolo treba dokázať.

Hovoríme, že riešenie $y = \varphi(x)$ diferenciálnej rovnice ***vyhovuje okrajovej podmienke*** v bode x_0 ak platí $y_0 = \varphi(x_0)$, kde y_0 je daná hodnota riešenia v bode x_0. Geometrická interpretácia okrajov podmienky jed znázornená na obr. 12.1.:



Obrázok 12.1. Okrajová podmienka vyselektuje z rôznych riešení to riešenie, ktoré spĺňa okrajovú podmienku.

12.2. Prečo študujeme diferenciálne rovnice?

Ako už bolo poznamená v úvodnej časti tejto kapitoly, dynamika procesov prebiehajúcich v prírode je obvykle popísaná diferenciálnymi rovniciami.

Príklad 12.2. Monomolekulárny rozpad látky A ($A \xrightarrow{k} \varnothing$, schematický vyjadrený reakciou, kde látka A sa rozpadá na látku $\varnothing$)

$$\dot{x}_A = -kx_A \quad \left(x_A(0) = x_A^0\right)$$

Príklad 12.3. Bimolekulárna reakcia dvoch látok A a B (vyjadrená reakciou: $A + B \xrightarrow{k} C$)

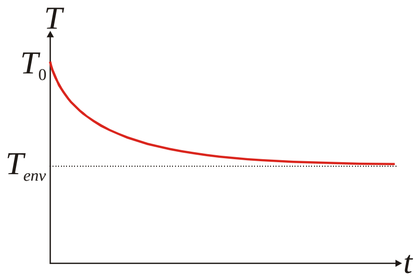
$$\dot{x}_A = -kx_A x_B \quad \left(x_A(0) = x_A^0\right)$$

$$\dot{x}_B = -kx_A x_B \quad \left(x_B(0) = x_B^0\right)$$

$$\dot{x}_C = kx_A x_B \quad \left(x_C(0) = 0\right)$$

Príklad 12.4. Nech teplota telesa v čase t je $T(t)$, pričom teleso sa nachádza v prostredí o teplote T_{env}. Z fyziky vieme, že rýchlosť ochladzovania je úmerná rozdielu teploty telesa a prostredia (pozri obr. 12.2).

$$\dot{T} = -k\left(T - T_{env}\right) \qquad \left(T(0) = T_0 > T_{env}\right)$$



Obrázok 12.2. Priebeh ochladzhovania telesa nachádzajúceho sa v prostredí o teplote T_{env}.

12.3. Diferenciálna rovnica 1. rádu so separovateľnými premennými

Diferenciálna rovnica tohto jednoduchého typu má tvar

$$y' = f(x,y) = h(x)g(y) \tag{12.4}$$

Táto jedna z najjednoduchších diferenciálnych rovníc je riešiteľná priamou integráciou.

$$y' = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx \tag{12.5}$$

Príklad 12.5. Riešte diferenciálnu rovnicu pre monomolekulárny rozpad (pozri príklad 12.2)

$$\dot{x}_A = -kx_A \quad \left(x_A(0) = x_A^0\right)$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice má tvar

$$\dot{x}_A = -kx_A \Rightarrow \frac{dx_A}{dt} = -kx_A \Rightarrow \frac{dx_A}{x_A} = -kdt \Rightarrow \int \frac{dx_A}{x_A} = \int -kdt \Rightarrow ln\, x_A = -kt + a$$

$$x_A = e^{-kt+a} \Rightarrow x_A = \underbrace{e^a}_{c} e^{-kt} \Rightarrow x_A = ce^{-kt} \Rightarrow \boxed{x_A = x_A^0 e^{-kt}}$$

Príklad 12.6. Riešte diferenciálnu rovnicu ochladzovania telesa, ktoré je popísané diferenciálnou rovnicou (pozri príklad 12.3)

$$\dot{T} = -k\left(T - T_{env}\right) \qquad \left(T(0) = T_0 > T_{env}\right)$$

Riešenie tejto rovnice má tvar

$$\dot{T} = -k\left(T - T_{env}\right) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_{env}\right) \Rightarrow \frac{dT}{\left(T - T_{env}\right)} = -kdt \Rightarrow \int \frac{dT}{\left(T - T_{env}\right)} = -k\int dt$$

$$ln\left(T - T_{env}\right) = -kt + a \Rightarrow T - T_{env} = e^{-kt+a} \Rightarrow T = T_{env} + ce^{-kt} \Rightarrow T = T_{env} + \left(T_0 - T_{env}\right)e^{-kt}$$

$$\boxed{T = T_0 e^{-kt} + T_{env}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Príklad 12.7. Riešte diferenciálnu rovnicu $y' = x(y-1)$.

$$y' = x(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{y-1} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int xdx \Rightarrow ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + a$$

$$|y-1| = exp\left(\frac{x^2}{2} + a\right) \Rightarrow |y-1| = k\, exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = 1 + ce^{x^2/2}}$$

Príklad 12.8. Riešte diferenciálnu rovnicu $\left(1+s^2\right)y'+s\left(1+2y\right)=0$; kde $y\left(1\right)=-1/4$

Postupnými jednoduchými krokmi získame riešenie

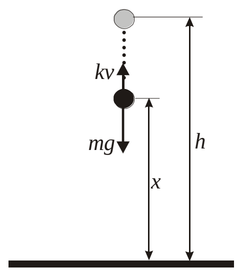
$$\left(1+s^2\right)\frac{dy}{ds}=-s\left(1+2y\right)\Rightarrow\frac{dy}{1+2y}=-\frac{s}{1+s^2}ds\Rightarrow\int\frac{dy}{1+2y}=-\int\frac{s}{1+s^2}ds$$

$$\frac{1}{2}ln\left|1+2y\right|=-\frac{1}{2}ln\left(1+s^2\right)+\frac{1}{2}ln\,a\Rightarrow ln\left|1+2y\right|=ln\frac{a}{1+s^2}\Rightarrow\left|1+2y\right|=\frac{a}{1+s^2}$$

$$1+2y=\frac{c}{1+s^2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{c}{1+s^2}\right)\overset{s=1}{\Rightarrow}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{c}{2}\right)\Rightarrow c=1$$

$$y=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{1+s^2}\right)\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{2}\frac{s^2}{1+s^2}}$$

Príklad 12.9. Nech teleso o hmotnosti *m* padá v prostredí z výšky *h*, pričom odpor prostredia je úmerný rýchlosti padajúceho telesa. Aký je časový priebeh rýchlosti padajúceho telesa?



Obrázok 12.3. Na padajúci hmotný bod pôsobí gravotačná sila a odpor prostredia.

Podľa 2. Newtonovho zákona platí

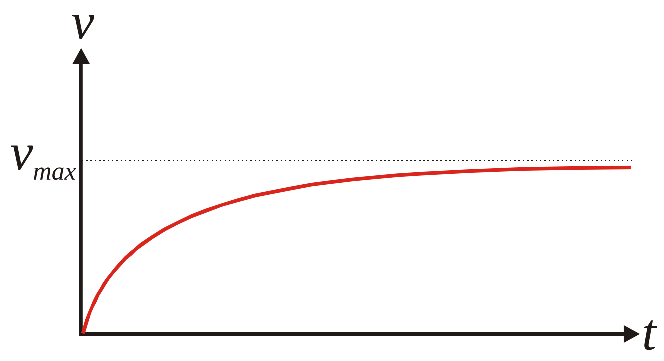
$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv\qquad\left(v\left(0\right)=0\right)$$

Postupným riešením tejto jednoduchej diferenciálnej rovnice dostaneme

$$\frac{dv}{dt}=g-\underbrace{\frac{k}{m}}_{k'}v\Rightarrow\frac{dv}{g-k'v}=dt\Rightarrow\int\frac{dv}{g-k'v}=\int dt\Rightarrow-\frac{1}{k'}ln\left|g-k'v\right|=t+a$$

$$ln\left|g-k'v\right|=-k't+a'\Rightarrow g-k'v=be^{-k't}\Rightarrow v=\frac{g}{k'}-ce^{-k't}\overset{t=0}{\Rightarrow}c=\frac{g}{k'}$$

$$\boxed{v=\frac{g}{k'}\left(1-e^{-k't}\right)}$$



Obrázok 12.4. Grafické znázornenie rýchlosti padajúceho hmotného telesa v prostredí. Vidíme, že rýchlosť rasti do určitej maximálnej hodnoty, pre ktorú odpor prostredia sa vyrovná gravitácii.

12.4. Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu

12.4.1. Bez pravej strany

Lineárna diferenciálna rovnica bez pravej strany

$$a(x)y' + b(y) = 0 \tag{12.6}$$

Patrí medzi najjednoduchšie diferenciálne rovnice, ktorú môžeme ľahko vyriešiť tzv. separáciou premenných

$$\begin{gathered} a(x)y' + b(x)y = 0 \Rightarrow a(x)\frac{dy}{dx} = -b(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{b(x)}{a(x)}dx \Rightarrow \\ ln|y| = -\int\frac{b(x)}{a(x)}dx + a \Rightarrow \boxed{y = c\,exp\left(-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)} \end{gathered} \tag{12.7}$$

Kde v rámčeku je uvedené riešenie tejto jednoduchej diferenciálnej rovnice.

12.4.2. S pravou stranou (metóda variácie konštánt)

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{12.8}$$

Riešenie tejto rovnice budeme hľadať v dvoch krokoch. V prvom kroku ju vyriešime bez pravej stray a druhom kroku zovšeobecníme riešenie z prvého kroku tak, aby dávalo riešenie rovnice s pravou stranou

1. krok. Riešime rovnicu bez pravej strany $a(x)y' + b(x)y = 0$, dostaneme

$$y = c(x)exp\left(\underbrace{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}_{F(x)}\right) = c(x)exp(-F(x)) \tag{12.9}$$

2. krok. Určenie „konštanty-funkcie“ $c(x)$ tak, aby funkcia (12.9) bola riešením diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$y = {\color{red}c(x)}exp(-F(x)) \Rightarrow y' = c'(x)exp(-F(x)) - c(x)exp(-F(x)dx)\underbrace{\frac{b(x)}{a(x)}}_{F'(x)} \tag{12.10a}$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice s pravou stranou dostaneme novú diferenciálnu rovnicu pre funkciu $c(x)$, ktorá je separovateľná

$$c'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}exp(F(x)) \Rightarrow c(x) = \int\frac{f(x)}{a(x)}exp(F(x))dx + a \tag{12.10b}$$

Príklad 12.10. Riešte diferenciálnu rovnicu $y'x + yx^2 = x^2$ s pravou stranou metódou variácie konštánt.

1. krok. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice bez pravej strany má tvar $y = c\,exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

2. krok. Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou budeme hľadať v tvare

$$y = c(x)exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$y = c(x)exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow y' = c'\,exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - c\,exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)x$$

$$c' = -x\,exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Integráciou poslednej diferenciálnej rovnice pre *c*' dostaneme

$$c(x) = -\int x\,exp\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$c(x) = -\int x\,exp\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \left|\begin{array}{l}\frac{x^2}{2} = t\\ dx = \frac{dt}{x}\end{array}\right| = -\int x\,exp(t)\frac{dt}{x} = exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + a$$

Potom konečné riešenie má tvar

$$y = c(x)exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \left(exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + a\right)exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1 + a\,exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Príklad 12.11. Riešte diferenciálne rovnice, ktoré popisujú dve následné monomolekulárne reakcie

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

Dynamika monomolekulárnej reakcie je popísaná diferenciálnymi rovnicami

$$\dot{x}_A = -k_1 x_A \qquad (x_A(0) = 1)$$

$$\dot{x}_B = k_1 x_A - k_2 x_B \qquad (x_B(0) = 0)$$

$$\dot{x}_C = k_2 x_B \qquad (x_C(0) = 0)$$

Tieto diferenciálne rovnice vyhovujú podmienke zachovania koncentrácií

$$\dot{x}_A + \dot{x}_B + \dot{x}_C = 0 \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 1$$

Riešením 1. rovnice pre rozpad látky *A* dostaneme

$$\frac{dx_A}{dt} = -k_1 x_A \Rightarrow \frac{dx_A}{x_A} = -k_1 dt \Rightarrow \int \frac{dx_A}{x_A} = -k_1 \int dt \Rightarrow x_A = ce^{-k_1 t} \Rightarrow \boxed{x_A = e^{-k_1 t}}$$

Dosadením tohto výsledku do druhej rovnice dostaneme rovnicu 1. rádu s pravou stranou

$$\dot{x}_B + k_2 x_B = k_1 e^{-k_1 t}$$

Riešením tejto rovnice bez pravej strany (úplne anologický postup, ako pri riešeni prvej rovnice) dostaneme $x_B = ce^{-k_2 t}$, potom v druhom kroku hľadáme riešenie v tvare

$$x_B = c(t)e^{-k_2 t} \Rightarrow \dot{x}_B = \dot{c}e^{-k_2 t} - k_1 ce^{-k_2 t}$$

Potom konečné riešenie pre koncentráciu x_B má tvar

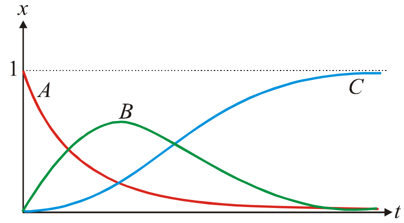
$$x_B = c(t)e^{-k_2 t} \Rightarrow x_B = \left(\frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{(k_2-k_1)t} + a\right)e^{-k_2 t} \Rightarrow x_B = \frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{-k_1 t} + ae^{-k_2 t}$$

Použitím počiatočnej podmienky $x_B(0)=0$ dostaneme konečné riešenie

$$a = -\frac{k_1}{k_2 - k_1} \Rightarrow \boxed{x_B = \frac{k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)}$$

Tretie posledné riešenie zostrojíme pomocou zákona zachovania $x_A + x_B + x_C = 1$

$$x_C = 1 - x_A - x_B \Rightarrow x_C = 1 - e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) \Rightarrow \boxed{x_C = 1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1}e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{-k_2 t}}$$



Obrázok 12.5. Znázornenie časového priebehu koncentrácií látok A, B a C, medzi ktorými prebieha následný monomolekulárny rozpad.