Kontrolná písomka z Matematiky konaná dňa 3. 11. 2016

Príklad 1.

(a) Napíšte tabuľky pravdivostných hodnôt logických spojok: konjunkcie ($\wedge$), disjunkcie ($\vee$), implikácie ($\Rightarrow$), ekvivalencie ($\equiv$) a negácie ($\neg$). (4body)

(b) Dokáže pomocou (6 bodov)

(α) priameho dôkazu vetu: *Ak x je nepárne číslo, potom x^2 je nepárne číslo*,

(β) nepriameho dôkazu vetu: *Ak x^2+5 je nepárne číslo, potom x je párne číslo*.

Príklad 2.

(a) Ako je definovaná množina, čo je kardinalita množiny, ako je definovaná charakteristická funkcia množiny. (4 body)

(b) Ako sú definované elementárne množinové operácie a znázornite ich pomocou Vennových diagramov (6 body)

(α) zjednotenia ($\cup$)

(β) prieniku ($\cap$)

(γ) doplnku ($-$)

Príklad 3.

(a) Vypočítajte $(i)^{2n}$, $(i)^{2n+1}$ a $\dfrac{1}{i^n}$ pre n=1, 2, 3. (5 body)

(b) Pre $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$ vypočítajte $z_1 * z_2$, z_1/z_2 , $|z_1|$, $|z_2|$. (5 body)

Príklad 4.

(a) Ako sú definované matice (1) stĺpcový vektor, (2) riadkový vektor, (3) štvorcová matica a (4) obdĺžniková matica. Ako sa transformujú tieto matice aplikáciou operácie transpozície? (4 body)

(c) Pre ktoré dvojice matice je definovaný súčet dvoch matíc a/alebo súčin dvoch matíc. (6 bodov)

Príklad 5.

(a) Riešte systém lineárnych rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy. (5 body)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Riešte homogénny systém lineárnych rovníc (5 body)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Poznámky:

(1) Písomka trvá 45 min.

(2) Každý príklad je hodnotený max. 10 bodmi, t. j. max. počet bodov za písomku je 50.

(3) Na prvú stranu linajkového papiera napíšte svoje meno a čas cvičenia (pondelok o 10 hod alebo 12 hod / piatok o 12 hod.).

Riešenie

Príklad 1.

(a) Zostrojte tabuľky pravdivostných hodnôt logických spojok: konjunkcie ($\wedge$), disjunkcie ($\vee$), implikácie ($\Rightarrow$), ekvivalencie ($\equiv$) a negácie ($\neg$).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

(b) Dokáže pomocou

(α) priameho dôkazu vetu: *Ak x je nepárne číslo, potom x^2 je nepárne číslo*,

Veta. *Ak x je nepárne číslo, potom x^2 je nepárne číslo*

Dôkaz. Zavedieme dva elementárne výroky:

p=´x je nepárne číslo´

q=´x^2 je nepárne číslo´

Potom dokazovaný teorém má tvar $p \Rightarrow q$. Priamy dôkaz spočíva v tom, že vychádzame z predpokladu výroku p, pomocou jednoduchých manipulácií dokážeme výrok q, t.j. x^2 je nepárne číslo:

$$x = 2k+1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{\left(2k^2+2\right)}_{l} + 1 = 2l + 1$$

QED.

(β) nepriameho dôkazu vetu: *Ak x^2+5 je nepárne číslo, potom x je nepárne číslo*.

Veta. *Ak x^2+5 je nepárne číslo potom x je párne číslo*

Zavedieme dva elementárne výroky

p=´ x^2+5 je nepárne číslo´

q=´x je párne číslo´

Potom dokazovaná veta má tvar implikácie $p \Rightarrow q$. Nepriamy dôkaz spočíva v tom, že implikáciu $p \Rightarrow q$ prepíšeme do ekvivalentného tvaru $\neg q \Rightarrow \neg p$, budeme dokazovať vetu: *Ak x je nepárne číslo, potom x^2+5 je párne číslo.* Nech $x = 2k+1$, potom

$$x^2 + 5 = (2k+1)^2 + 5 = 4k^2 + 4k + 6 = 2\underbrace{\left(2k^2+2k+3\right)}_{l} = 2l$$

Čím sme dokázali, že x^2+5 je párne číslo. QED..

Príklad 2.

(a) Ako je definovaná množina, čo je kardinalita množiny, ako je definovaná charakteristická funkcia množiny.

Definícia. Množina je súbor odlíšiteľných elementov. Každý element množiny je dobre odlíšiteľný od ostatných elementov, množina nemá dva rovnaké elementy. Výrok „element a patrí do množiny A“ zapisujeme symbolicky takto: $a \in A$, negácia tohto výroku je $a \notin A$. Množina môže byť dvoma alternatívnymi spôsobmi:

(1) taxatívne ako $A=\{a,b,....,c\}$, t. j. vymenovaním všetkých elementov patriacich do množiny *A*. .
(2) pomocou predikátu *P*(*x*), potom $A=\{x\in U; P(x)\}$, kde *U* je univerzum, ktorý obsahuje všetky možné elementy, napr. všetky celé čísla, všetkých obyvateľov Zeme, a pod. Predikát *P*(*x*) priradí každému $x\in U$ pravdivostnú hodnotu, t.j. *P*(*x*)=1, pre $x\in A$, alebo *P*(*x*)=0, pre $x\notin A$, alebo $P: U\rightarrow\{0,1\}$.

Kardinalita množiny *A* je označená $|A|$, je určená počtom elementov množiny .

Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je binárna funkcia, ktorá špecifikuje, či element *x* patrí alebo nepatrí do množiny A

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & (pre\ x\in A)\\ 0 & (pre\ x\notin A)\end{cases}$$

Použitím charakteristickej funkcie môžeme množinu *A* definovať pomocou predikátu takto

$$A=\{x\in U;\mu_A(x)=1\}$$

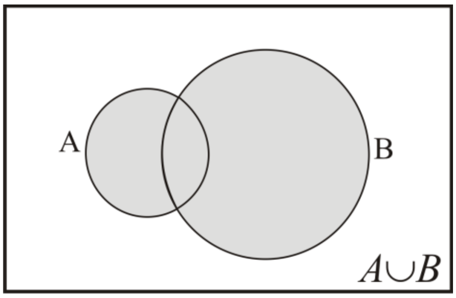
(b) Ako sú definované elementárne množinové operácie a znázornite ich pomocou Vennových diagramov

(α) zjednotenia ($\cup$)

$$A\cup B=\{x; x\in A\ \vee\ x\in B\},\ A\cup B=\{x\in U;\mu_{A\cup B}(x)=1\}$$

kde

$$\mu_{A\cup B}(x)=max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

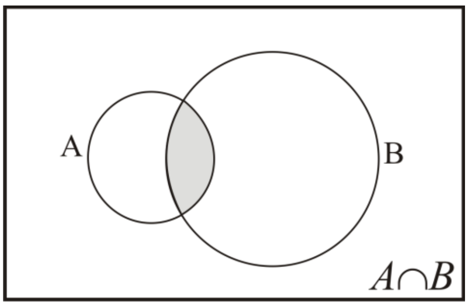


(β) prieniku ($\cap$)

$$A\cap B=\{x; x\in A\ \wedge\ x\in B\},\ A\cap B=\{x\in U;\mu_{A\cap B}(x)=1\}$$

kde

$$\mu_{A\cap B}(x)=min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

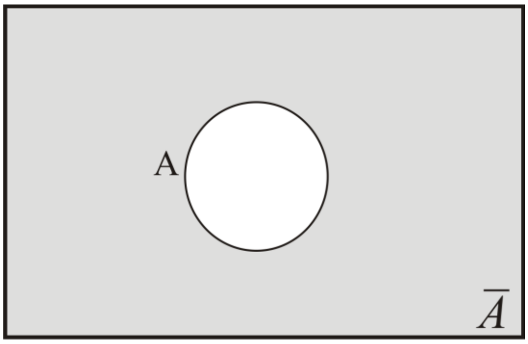


(γ) doplnku (–)

$$\bar{A}=\{x;x\notin A\},\ \bar{A}=\{x\in U;\mu_{\bar{A}}(x)=1\}$$

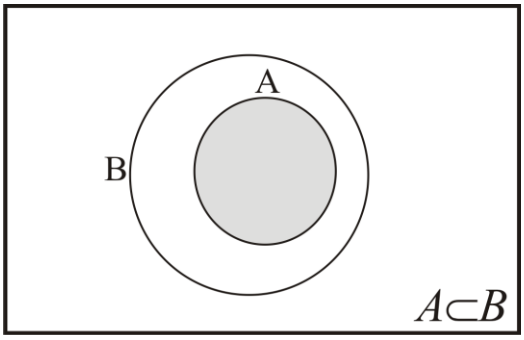
kde

$$\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$$



(δ) reláciu podmnožiny (⊆)

$$A\subseteq B=_{def}(\forall x\in U)(x\in A\Rightarrow x\in b)$$



Príklad 3.

(a) Ako je definované komplexné číslo. Znázornite ho v komplexnej rovine.
Komplexné číslo z je sumou reálnej a imaginárnej časti $z=x+iy$, kde i je *imaginárna jednotka*, ktorá vyhovuje vlastnosti $i^2=i*i=-1$, alebo $\sqrt{-1}=i$

(b) Vypočítajte $(i)^{2n}$, $(i)^{2n+1}$ a $\frac{1}{i^n}$ pre n=1, 2, 3.

$(i)^{2n}=\left((i)^2\right)^n=(-1)^n$, $(i)^{2n+1}=(i)^{2n}*i=(-1)^n i$,

$\frac{1}{i^n}=\frac{i^n}{i^n\bullet i^n}=\frac{i^n}{(-1)^n}=(-i)^n$, potom $\frac{1}{i^1}=\frac{i}{i\bullet i}=-i$, $\frac{1}{i^2}=-1$,

$\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i^2\bullet i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i\bullet i}=i$

(c) Pre $z_1=1+i$, $z_2=2-i$ vypočítajte z_1*z_2, z_1/z_2, $|z_1|$, $|z_2|$,..

$z_1*z_2=(1+i)*(2-i)=2-i+2i+1=3+i$

$$z_1/z_2=\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)*(2+i)}{(2-i)*(2+i)}=\frac{2+i+2i-1}{4+2i-2i+1}=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

$$|z_1|=\sqrt{z_1*\overline{z}_1}=\sqrt{(1+i)*(1-i)}=\sqrt{2}$$

$$|z_2|=\sqrt{z_2*\overline{z}_2}=\sqrt{(2-i)*(2+i)}=\sqrt{5}$$

Príklad 4.

(a) Ako sú definované matice (1) stĺpcový vektor, (2) riadkový vektor, (3) štvorcová matica a (4). Ako sa transformujú tieto matice aplikáciou operácie transpozície? (4 body)

(1) stĺpcový vektor,

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(2) riadkový vektor

$$\vec{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Operáciou transpozície sa riadkový vektor transformuje na stĺpcový vektor

(3) štvorcová matica

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Operáciou transpozície sa štvorcová matica transformuje na štvorcovú maticu

(4) obdĺžniková matica

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{kde } m\neq n)$$

Operáciou transpozície sa obdĺžniková matica typu (m,n) transformuje na obdĺžniková matica typu (n,m), pričom $m\neq n$.

(b) Pre ktoré dvojice matíc je definovaný súčet dvoch matíc a/alebo súčin dvoch matíc. (6 body)

Príklad 5.

(a) Riešte systém lineárnych rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy. (5 bodov)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Riešte homogénny systém lineárnych rovníc (5 bodov)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie (a):

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Kde sme k 2. riadku pripočítali (-2)-násobok 1. riadku a k 3. riadku sme pripočítali (-1)-násobok 1. riadku. Z tretieho riadku novej matice dostaneme $x_2 = 2$. Dosadením tohto výsledku do druhého riadku novej matice dostaneme $x_3 = 9$. Dosadením týchto dvoch výsledkov do 1. riadku upravenej matice dostaneme $x_1 = -5$, potom vektor riešení daného systému má tvar

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Riešenie homogénneho systému (b)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Alebo v explicitnom tvare pomocou neznámych x_i dostaneme jednoduchý system lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Kde sme posledný tretí riadok v matici vynechali ako redundantný. Potom riešenie má tvar

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/3)x_3 \\ (2/3)x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

kde x_3 je ľubovolné reálne číslo.