Druhá kontrolná písomka konaná dňa 21.11. 2007

Príklad 1
(a) Koľko hrán ma graf, keď má vrcholy stupňa 4,3,3,2,2? Nakreslite taký graf.
(b) Zistite, či grafy zadané maticami susednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sú izomorfné?

Príklad 2
Pre matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)
(a) $2\boldsymbol{A}$,
(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$,
(d) $\boldsymbol{AC}$,
(e) $\boldsymbol{CB}$,

Príklad 3
Pre maticu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ riešte rovnicu $2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

Príklad 4
Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & -2z & = & -2 \end{array}$$

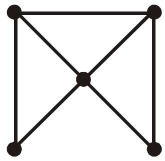
Príklad 5
Vypočítajte determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie

Príklad 1
(a) Koľko hrán ma graf, keď má vrcholy stupňa 4,3,3,2,2? Nakreslite taký graf.

Riešenie: Graf má (4+3+3+2+2)/2=7 hrán, možnou realizáciou je napr.



(b) Zistite, či grafy zadané maticami susednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sú izomorfné?

Riešenie: Sú izomorfné, stačí prehodiť riadky a stĺpce permutáciou (3,4,1,2).

Príklad 2
(a) Pre matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)
(a) $2\boldsymbol{A}$,
(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$,
(d) $\boldsymbol{AC}$,
(e) $\boldsymbol{CB}$,

Riešenie:
(a) $2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, (c) neexistuje
(d) $\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, (e) neexistuje

Príklad 3
Pre maticu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ riešte rovnicu $2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

Riešenie: $\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Príklad 4

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & -2z & = & -2 \end{array}$$

Riešenie:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & -2 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & -5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{4} & 10 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

$7z = 14 \Rightarrow z = 2$, $-4y - 3z = -2 \Rightarrow y = -1$, $x + y + z = 2 \Rightarrow x = 1$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Príklad 5

Vypočítajte determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie: $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = (1+8+27) - (6+6+6) = 36 - 18 = 18$