Záverečná písomka z Matematiky pre kog. vedu konaná dňa 23. 1. 2008

Príklad 1. Odpovedzte na otázky z výrokovej logiky:
(a) Ako je definovaná formula?
(b) Aký je rozdiel medzi tautológiou a splniteľnou formulou?
(c) Čo je dôkaz formuly φ ?

Príklad 2. Doplňte výsledok v týchto schémach usudzovania.

$$\frac{r \Rightarrow s \quad r}{?}, \quad \frac{p \Rightarrow q \quad q}{?}, \quad \frac{u \Rightarrow v \quad \neg u}{?}, \quad \frac{u \Rightarrow w \quad \neg w}{?}, \quad \frac{\neg p \Rightarrow q \quad p}{?}, \quad \frac{\neg t \Rightarrow r \quad r}{?}, \quad \frac{\neg r \Rightarrow t \quad \neg r}{?}, \quad \frac{\neg t \Rightarrow u \quad \neg u}{?}.$$

Príklad 3. Prepíšte tvrdenie prirodzeného jazyka do formuly predikátovej logiky, vytvorte negáciu tejto formuly a prepíšte spätne formulu do tvrdenia prirodzeného jazyka.
(a) Existujú ryby, ktoré sa nemnožia ikrami.
(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.
(c) Každé párne číslo väčšie ako 2 nie je prvočíslo.
(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.
(e) Každý dym je s ohňom.

Príklad 4. Riešte tieto sylogizmy:

(a)
Každý študent je maturant
Niektorí nematuranti sú analfabeti
―――
?

(b)
niektorí študenti sú kominári
niektorí kominári sú maturanti
―――
?

(c)
niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik
―――
?

(c)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári
―――
?

Príklad 5
Pre matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)
(a) $2\boldsymbol{A}$,
(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$,
(d) $\boldsymbol{AC}$,
(e) $\boldsymbol{CB}$,

Príklad 6

Pre maticu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ riešte rovnicu $2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

Príklad 7

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & -z & = & 2 \\ 3x & +y & -2z & = & -2 \end{array}$$

Príklad 8

Vypočítajte determinant matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Príklad 9.

Zostrojte definičné obory a obory funkčných hodnôt týchto funkcií

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Príklad 10. Zostrojte zložené funkcie $F(x) = f[g(x)]$ a $G(x) = g[f(x)]$

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = x^2$

Príklad 11. Vypočítajte neurčitý integrál

$\int \left(sin\, x + x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$

Riešenie

Príklad 1

(a) Formula je reťazec, ktorý obsahuje znaky výrokových premenných z množiny $\{p,q,r,\ldots\}$ a znaky logických spojok $\{\Rightarrow,\wedge,\vee,\neg\}$. Štruktúra reťazcov je definovaná rekurentne postupom

premenná::=p | q | r ...

formula::=premenná | (formula) | (formula $\wedge$ formula) | (formula $\vee$ formula) | (formula $\Rightarrow$ formula) | ($\neg$formula)

(b) Pre tautológiu každá interpretácia (špecifikácia) premenných poskytuje pravdivostnú hodnotu formule ´pravda´, pre splniteľnú formulu existuje aspoň jedna interpretácia premenných, ktoré poskytujú hodnotu ´pravdu´. Môžeme povedať, že tautológia je špeciálny prípad splniteľnej formuly.

(c) Dôkaz formuly φ v rámci teórie $\boldsymbol{T}=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ je postupnosť formúl (ψ_1, ψ_2, …, ψ_k), kde $\varphi=\psi_k$, pričom každá formula ψ_i tejto postupnosti je buď bezprostredným logickým dôsledkom niektorých formúl z $\boldsymbol{T}$ alebo formúl $\boldsymbol{T}\cup\{\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{i-1}\}$.

Príklad 2.

$$\frac{\begin{matrix} r\Rightarrow s \\ r \end{matrix}}{s},\quad \frac{\begin{matrix} p\Rightarrow q \\ q \end{matrix}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{matrix} u\Rightarrow v \\ \neg u \end{matrix}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{matrix} u\Rightarrow w \\ \neg w \end{matrix}}{\neg u},\quad \frac{\begin{matrix} \neg p\Rightarrow q \\ p \end{matrix}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{matrix} \neg t\Rightarrow r \\ r \end{matrix}}{\text{nemá}},\quad \frac{\begin{matrix} \neg r\Rightarrow t \\ \neg r \end{matrix}}{t},\quad \frac{\begin{matrix} \neg t\Rightarrow u \\ \neg u \end{matrix}}{t}.$$

Príklad 3.

(a) Existujú ryby, ktoré sa nemnožia ikrami.

$\exists x\left(ryba(x)\wedge\neg mnoz\_ikr(x)\right)$

$\forall x\left(\neg ryba(x)\vee mnoz\_ikr(x)\right)$

$\forall x\left(ryba(x)\Rightarrow mnoz\_ikr(x)\right)$

Každá ryba sa množí ikrami.

(b) Niektorí športovci majú dobrú fyzickú kondíciu.

$\exists x\left(sport(x)\wedge fyz\_kond(x)\right)$

$\forall x\left(\neg sport(x)\vee\neg fyz\_kond(x)\right)\equiv\forall x\left(sport(x)\Rightarrow\neg fyz\_kond(x)\right)$

Každý športovec nemá dobrú fyzickú kondíciu.

(c) Každé párne číslo väčšie ako 2 nie je prvočíslo.

$\forall x\left(parne(x)\Rightarrow\neg prime(x)\right)\equiv\forall x\left(\neg parne(x)\vee\neg prime(x)\right)$

$\exists x\left(parne(x)\wedge prime(x)\right)$

Existuje párne číslo väčšie ako 2, ktoré je prvočíslo.

(d) Každý, kto navštívil Anglicko hovorí po anglicky.

$\forall x\left(navst\_UK(x) \Rightarrow hovori\_angl(x)\right)$

$\exists x\left(navst\_UK(x) \wedge \neg hovori\_angl(x)\right)$

Existuje taký, čo navštívil Anglicko a nehovorí po anglicky.

(e) Každý dym je s ohňom.

$\forall x\left(dym(x) \Rightarrow ohen(x)\right) \equiv \forall x\left(\neg dym(x) \vee ohen(x)\right)$

$\exists x\left(dym(x) \wedge \neg ohen(x)\right)$

Existuje dym bez ohňa.

Príklad 47.

(a)

Každý študent je maturant

Niektorí nematuranti sú analfabeti

?

Vykonáme prepis sylogizmu do formálneho tvaru

$\varphi_1: \forall x\left(st(x) \Rightarrow mat(x)\right) \Rightarrow \left(st(t) \Rightarrow mat(t)\right)$

$\varphi_2: \exists x\left(\neg mat(x) \wedge analf(x)\right) \Rightarrow \left(\neg mat(t) \wedge analf(t)\right)$

$\left(st(t) \Rightarrow mat(t)\right)$

$\left(\neg mat(t) \wedge analf(t)\right)$

$\neg mat(t)$

$analf(t)$

$\neg st(t)$

$\neg st(t) \wedge analf(t)$

$\exists x\left(\neg st(x) \wedge analf(x)\right)$

$\exists x\left(\neg st(x) \wedge analf(x)\right)$

Záver zo sylogizmu je: „existuje analfabet, ktorý nie je študent“

(b)

niektorí študenti sú kominári

niektorí kominári sú maturanti

?

$\varphi_1: \exists x\left(st(x) \wedge kom(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \wedge kom(a)\right)$

$\varphi_2: \exists x\left(kom(x) \wedge mat(x)\right) \Rightarrow \left(kom(b) \wedge mat(b)\right)$

Vo všeobecnosti platí $a \neq b$, z týchto dvoch implikácií nič nevyplýva, sylogizmus nemá platný záver.

(c)

niektorí fyzici sú astronómovia
každý chemik nie je fyzik

?

$\varphi_1: \exists x\left(fyz(x) \wedge astr(x)\right) \Rightarrow \left(fyz(a) \wedge astr(a)\right)$
$\varphi_2: \forall x\left(chem(x) \Rightarrow \neg fyz(x)\right) \Rightarrow \left(chem(a) \Rightarrow \neg fyz(a)\right)$

Z premisy φ_1 vyplýva, že súčasne platí *fyz*(a) a *astr*(a). Použitím *fyz*(a) a predpokladu φ_2 spolu s pravidlom modus tollens dostaneme $\neg$*chem*(a). To znamená, že záver sylogizmu má tvar

$$astr(a) \wedge \neg chem(a) \Rightarrow \exists x\, astr(x) \wedge \neg chem(x)$$

alebo, „niektorí astronómovia nie sú chemici“.

(d)
Každý študent nie je analfabet
niektorí analfabeti sú včelári

?

$\varphi_1: \forall x\left(st(x) \Rightarrow \neg analf(x)\right) \Rightarrow \left(st(a) \Rightarrow \neg analf(a)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \Rightarrow \neg st(a)\right)$
$\varphi_2: \exists x\left(analf(x) \wedge vce(x)\right) \Rightarrow \left(analf(a) \wedge vce(a)\right)$

Z druhej premisy vyplýva, že *analf*(a) a *vce*(a) . Použitím *analf*(a) s prvou premisou dostaneme $\neg$*st*(a) , spojením s *vce*(a) dostaneme

$$vce(a) \wedge \neg st(a) \Rightarrow \exists x\, vce(x) \wedge \neg st(x)$$

Záver zo sylogizmu je: „niektorý včelár nie je študent“

Príklad 5
(a) Pre matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočítajte matice (ak existujú)
(a) $2\boldsymbol{A}$,
(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,
(c) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$,
(d) $\boldsymbol{AC}$,
(e) $\boldsymbol{CB}$,

Riešenie:

(a) $2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, (b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, (c) neexistuje

(d) $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$, (e) neexistuje

Príklad 6

Pre maticu $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ riešte rovnicu $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{X}$ je matica typu (2,2) a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica typu (2,2).

Riešenie: $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}$

Príklad 7

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2\\ 2x & -2y & -z & = & 2\\ 3x & +y & -2z & = & -2\end{array}$$

Riešenie:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ \boxed{2} & -2 & -1 & 2\\ \boxed{3} & 1 & -2 & -2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -4 & -3 & -2\\ 0 & \boxed{-2} & -5 & -8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -4 & -3 & -2\\ 0 & \boxed{4} & 10 & 16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -4 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 7 & 14\end{array}\right)$$

$7z=14\Rightarrow z=2$, $-4y-3z=-2\Rightarrow y=-1$, $x+y+z=2\Rightarrow x=1$, $x=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

Príklad 8

Vypočítajte determinant matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Riešenie: $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 3\end{matrix}=(1+8+27)-(6+6+6)=36-18=18$

Príklad 9.
Zostrojte definičné obory a obory funkčných hodnôt týchto funkcií

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad D_f = \langle -1,1 \rangle$$

Príklad 10. Zostrojte zložené funkcie $F(x) = f[g(x)]$ a $G(x) = g[f(x)]$

$$f(x) = \sqrt{1+x}\,,\ g(x) = x^2 \qquad f[g(x)] = \sqrt{1+x^2}\,,\ g[f(x)] = |1+x|$$

Príklad 11. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \left(sin\,x + x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = -cos\,x + \frac{x^3}{x} + ln\,x + c$$