1. prednáška

Lineárna algebra I - *pole skalárov, lineárny priestor, lineárna závislosť, dimenzia, podpriestor, suma podpriestorov, izomorfizmus*

Matematickým základom kvantovej mechaniky je teória Hilbertových priestorov, ktorá však pre potreby kvantového počítania môže byť prezentovaná v zjednodušenej podobe konečno-rozmerného lineárneho priestoru so skalárnym súčinom. V tejto prednáške naformulujeme základy teórie konečnorozmerných lineárnych priestorov nad komplexnými číslami.

1.1 Pole skalárov

Prv než pristúpime k formulácii pojmu lineárny priestor, musíme si presne špecifikovať pojem „skalár“ a „pole skalárov“. Pod skalárom budeme rozumieť ľubovolné (1) racionálne číslo, (2) iracionálne číslo, alebo (3) komplexné číslo. Nech $\mathcal{C}=\{a,b,c,...\}$ je množina skalárov, ktoré vyhovujú trom sadám axióm:

A. Ku každej dvojici $a,b\in\mathcal{C}$ je priradený skalár $a+b\in\mathcal{C}$ nazývaný *súčet*, pričom
   (1) $a+b=b+a$ (komutatívny zákon),
   (2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (asociatívny zákon)
   (3) existuje $0\in\mathcal{C}$ (nula), pričom $a+0=a$,
   (4) ku každému $a\in\mathcal{C}$ existuje skalár $(-a)\in\mathcal{C}$ taký, že $a+(-a)=0$.

B. Ku každej dvojici $a,b\in\mathcal{C}$ je priradený skalár $a\cdot b\in\mathcal{C}$ nazývaný *súčin*, pričom
   (1) $a\cdot b=b\cdot a$ (komutatívny zákon),
   (2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (asociatívny zákon),
   (3) existuje $1\in\mathcal{C}$ (jednotka, pričom $a\cdot 1=a$,
   (4) ku každému skaláru $a\neq 0$ existuje skalár $a^{-1}\in\mathcal{C}$ taký, že $a\cdot a^{-1}=1$.

C. Súčin je distributívny vzhľadom k súčtu
   (1) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Definícia 1.1. Množinou skalárov $\mathcal{C}$ nazýva ***pole skalárov*** (alebo jednoducho len ***pole***) vtedy a len vtedy, ak nad touto množinou sú definované dve binárne operácia súčtu a súčinu, pričom sú splnené sady axióm A – C.

Ďalšie vlastnosti skalárov z pola $\mathcal{C}$ a ilustračné príklady sú uvedené v príkladoch 1.2-4.

1.2 Lineárny priestor

Predpokladajme, že máme definované pole skalárov $\mathcal{C}$. Nech $H = \{\alpha, \beta, \ldots, \varphi, \psi, \ldots\}$ je množina *vektorov*. Nech elementy – vektory tejto množiny vyhovujú týmto trom sadám axióm:

A. Ku každej dvojici $\alpha, \beta \in H$ je priradený vektor $\alpha + \beta \in H$ nazývaný *súčet*, pričom

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (komutatívny zákon),

(2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (asociatívny zákon)

(3) existuje nulový vektor $o \in H$ (nula), pričom $\alpha + 0 = \alpha$,

(5) ku každému $\alpha \in H$ existuje vektor $(-\alpha) \in H$ taký, že $\alpha + (-\alpha) = o$.

B. Ku každej dvojici $a \in \mathcal{C}$ a $\alpha \in H$ je priradený vektor $a\alpha \in H$, ktorý sa nazýva súčin skalára a s vektorom α, pričom

(1) $a(b\alpha) = (ab)\alpha$ (asociatívny zákon),

(2) $1\alpha = \alpha$, kde $1 \in \mathcal{C}$ je skalárna jednotka.

C. Distributívne zákony pre súčin skalár a vektor

(1) $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$,

(2) $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$.

Definícia 1.2. Množinou vektorov H spolu s polom skalárov $\mathcal{C}$ sa nazýva ***lineárny priestor nad polom skalárov*** (alebo ***vektorový priestor nad polom skalárov***) vtedy a len vtedy, ak nad množinou H a polom $\mathcal{C}$ sú definované dve binárne operácia súčtu a súčinu, pričom sú splnené sady axióm A – C.

Ďalšie vlastnosti vektorov z lineárneho priestoru H a ilustračný príklad jeho možnej realizácie sú ukázané v príkladoch 1.5 a 1.6.

1.3 Lineárna závislosť

Nech množina $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \subset H$ obsahuje n vektorov a množina $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset \mathcal{C}$ obsahuje n skalárov, potom výraz

$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_n\beta_n \tag{1.1}$$

sa nazýva ***lineárna kombinácia*** vektorov $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in H$ s koeficientmi a $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathcal{C}$.

Definícia 1.3. Hovoríme, že množina vektorov $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \subset H$ je ***lineárne nezávislá*** vtedy a len vtedy, ak jej lineárna kombinácia sa rovná nulovému vektoru

$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_n\beta_n = o \tag{1.2}$$

len pre nulové koeficienty $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = o$.

Jednoduchou negáciou tejto definície dostaneme pojem ***lineárnej závislosti***, potom lineárna kombinácia je nulová, $b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_n\beta_n = o$, pre nenulové koeficienty. Pre jednoduchosť predpokladajme, že týmto nenulovým koeficientom je $b_1 \neq 0$, potom z (1.2) dostaneme špecifikáciu vektora β_1 ako lineárnej kombinácie ostatných vektorov

$$\beta_1 = -\frac{b_2}{b_1}\beta_2 - \dots - \frac{b_n}{b_1}\beta_n \tag{1.3}$$

Veta 1.1. Nech $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset H$ je množina lineárne nezávislých vektorov, potom vektor φ je určený ***jednoznačne*** pomocou lineárnej kombinácie vektorov z B

$$\varphi = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \dots + b_n\beta_n$$

Dôkaz tejto vety je vykonaný v príklade 1.7.

Definícia 1.4.
(1) Hovoríme, že lineárny priestor H je ***n-rozmerny*** vtedy a len vtedy, ak v ňom existuje maximálne práve n lineárne nezávislých vektorov, čo zapisujeme $dim(H) = n$.
(2) Hovoríme, že množina n vektorov $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset H$ tvorí ***bázu*** n-rozmerného priestoru H vtedy a len vtedy, ak sú tieto vektory lineárne nezávislé, čo zapisujeme $báza(H) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.

Veta 1.2. V n-rozmernom priestore H s bázou $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset H$, každý vektor φ je určený *jednoznačne* ako lineárna kombinácia vektorov báze

$$\varphi = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \dots + b_n\beta_n$$

Koeficienty $b_1, b_2, \dots, b_n$ nazývame ***súradnice*** vektora φ v báze B.

Dôkaz tejto vety je uskutočnený v príklade 1.8.

1.4 Podpriestor

Nech $H' \subseteq H$ je podmnožina lineárneho priestoru H nad polom skalárov $\mathcal{C}$.

Definícia 1.5. Hovoríme, že podmnožina $H' \subseteq H$ je ***lineárny podpriestor*** (vzhľadom k lineárnemu priestoru H) vtedy a len vtedy, ak H' je lineárny priestor nad polom skalárov $\mathcal{C}$, pričom binárne operácie súčtu a súčinu sú rovnaké ako v pôvodnom priestore H.

Dimenzia podpriestoru H' je určená vzťahom (dôkaz je uvedený v príklade 1.9)

$$dim(H') \leq dim(H) \tag{1.4}$$

rovnosť platí len vtedy, keď $H = H'$. To znamená, že dimenzia priestoru patrí medzi najdôležitejšie charakteristiky lineárnych priestorov. Táto skutočnosť bude ešte potvrdená v ďalšej časti tejto kapitoly (pozri kapitolu 1.X) , keď budeme špecifikovať izomorfizmus (niečo ako rovnocennosť alebo podobnosť) medzi lineárnymi priestormi. Bude ukázané, že ak dva priestory majú rovnakú dimenziu, potom sú aj izomorfné.

Najjednoduchšia špecifikácia podpriestoru je pomocou množiny vektorov. Nech $B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}\subset H$ je množina n vektorov (nepredpokladáme, že sú lineárne nezávislé, potom podpriestor $H'\subseteq H$ môže byť špecifikovaný tak, že obsahuje všetky možné lineárne kombinácie vektorov z B (dôkaz tohto tvrdenia je uvedený v príklade 1.10)

$$H'=\{b_1\beta_1+b_2\beta_2+...+b_n\beta_n;\, b_1,b_2,...,b_n\in\mathcal{C}\} \tag{1.5}$$

Hovoríme, že podpriestor H' je ***lineárny obal*** vektorov z $B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}\subset H$

$$H'=span(B) \tag{1.6}$$

Pre dimenziu podpriestora H' platí (dôkaz je uvedený v príklade 1.11)

$$dim(H')\leq n \tag{1.7}$$

kde rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak množina $B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}\subset H$ obsahuje len lineárne nezávislé vektory.

Nech $H_1,H_2\subseteq H$ sú dva podpriestory priestoru H, suma týchto podpriestorov, označená H_1+H_2, je množina, ktorá obsahuje všetky lineárne kombinácie vektorov z H_1 a H_2

$$H_1+H_2=\{a\alpha+b\beta;\, a,b\in\mathcal{C};\alpha\in H_1;\beta\in H_2\} \tag{1.8}$$

Veta 1.3. Množina H_1+H_2 je lineárnym priestorom, t. j. podpriestorom H.

Dôkaz tejto vety je uskutočnený v príklade 1.12.

Nech podpriestory H_1,H_2 majú spoločný prienik tvorený len nulovým vektorom

$$H_1\cap H_2=\{o\} \tag{1.9a}$$

Potom suma týchto podpriestorov prechádza na ***priamu sumua***

$$H_1\oplus H_2=H_1+H_2\quad (H_1\cap H_2=\{o\}) \tag{1.9b}$$

Veta 1.4. Každý vektor $z\in H_1\oplus H_2$ je vyjadrený jednoznačne suma dvoch vektorov

$$z=x_1+x_2$$

kde $x_1\in H_1$ a $x_2\in H_2$.

Dôkaz tejto vety je uskutočnený v príklade 1.12.

Veta 1.5. Dimenzia priamej sumy podpriestorov je určená sumou dimenzií jednotlivých podpriestorov

$$dim(H_1\oplus H_2)=dim(H_1)+dim(H_2)$$

Táto veta je dokázaná v príklade 1.13.

1.5 Izomorfizmus

Dva lineárne priestory H a G sú izomorfné vtedy, ak existuje také zobrazenie H na G, ktoré zachováva súčet a súčin vektorov. Dva izomorfné priestory sú „skoro identické“, ich matematické vlastnosti sú „skoro“ totožné, odlišujú sa len v realizácii vektorov.

Definícia 1.6. Lineárne priestory H a G sa nazývajú izomorfné ($H \sim G$) vtedy a len vtedy, ak existuje také 1-1 značné zobrazenie $f: H \to G$, ktoré zachováva lineárnu kombináciu vektorov

$$f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) \tag{1.10}$$

,

Veta 1.6. Lineárne priestory H a G sú izomorfné vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú dimenziu

$$H \sim G \Leftrightarrow dim(H) = dim(G)$$

Veta 1.6. je dokázaná v príklade 1.14.

Ako dôsledok tejto vlastnosti je, že každý lineárny n-rozmerný priestor definovaný nad polom skalárov $\mathcal{C}$, je izomorfný s priestorom $\mathcal{C}^n$, ktorý bol špecifikovaný v príklade 1.6. To znamená, že ilustračné príklady lineárnej algebry, ktoré sú založené na tomto vektorov priestore, nie sú obmedzím všeobecnosti ilustračných príkladov.

Pojem izomorfizmu medzi lineárnymi priestormi je veľmi dôležitý. Ukazuje, že nie je dôležité, akým spôsobom je priestor realizovaný, ale podstatným znakom je ich dimenzia. Všetky vlastnosti špeciálneho priestoru H automaticky platia aj pre ostatné lineárne priestory, ktoré majú rovnakú dimenziu ako H.

Riešenie príkladov

Príklad 1.1. Dokáže pomocou axióm poľa skalárov tieto vlastnosti:

(1) $0 + a = a$

(2) $x + a = b \Rightarrow x = b - a$

(3) $(a + b = a + c) \Rightarrow (b = c)$

(3) $a + (b - a) = b$

(4) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(5) $(-1)a = (-a)$

(6) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(7) $(a \cdot b = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$

(8) $xa = b \Rightarrow x = a^{-1}b$ (pre $a \neq 0$)

(9) $ab = ac \Rightarrow b = c$ $($pre $a \neq 0)$

Príklad 1.2. Nech $\mathcal{C} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ je množina celých čísel, pričom nad touto množinou sú definované obvyklým spôsobom operácie súčtu a súčinu. Je $\mathcal{C}$ pole skalárov?

Príklad 1.3. Nech $\mathcal{C} = \{p/q\}$ (množina racionálnych čísel, kde p a q sú celé a nesúdeliteľné čísla. Je $\mathcal{C}$ pole skalárov?

Príklad 1.4. Nech $\mathcal{C}=\{0,1,2,...,x,1+x,...,1+x+x^2,...\}$ je množina všetkých polynómov s celočíselnými koeficient, pričom nad polom $\mathcal{C}$ je definovaný súčet a súčin obvyklým spôsobom. Je $\mathcal{C}$ pole skalárov?

Príklad 1.5. Dokáže pomocou axióm lineárneho priestoru tieto vlastnosti:
(1) $0+\alpha=\alpha$,
(2) $(-o)=o$,
(3) $ao=o$,
(4) $(-1)\alpha=(-\alpha)$,
(5) $0\alpha=o$,
(6) vektorová rovnica $\alpha+\beta=\gamma$, kde α je neznáma, má riešenie $\alpha=\gamma-\beta$,
(7) $(\alpha+\beta=\alpha+\gamma)\Rightarrow(\beta=\gamma)$
(7) $(a\cdot\alpha=o)\Rightarrow(a=0)\vee(\alpha=o)$.

Príklad 1.6. Najznámejším príkladom lineárneho priestoru je množina usporiadaných n-tic komplexných čísel

$$H=\{(z_1,z_2,...,z_n);z_1,z_2,...,z_n\in\mathcal{C}\}=\underbrace{\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times...\times\mathcal{C}}_{n-krát}=\mathcal{C}^n$$

kde $\mathcal{C}$ je pole komplexných čísel. Operácie súčtu a súčinu sú definované obvyklým spôsobom. Nech $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ a $\beta=(b_1,b_2,...,b_n)$, potom

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$$

$$a\alpha=a(aa_1,aa_2,...,aa_n)$$

$$(-\alpha)=(-a_1,-a_2,...,-a_n)$$

$$o=(0,0,...,0)$$

Dokážte, že takto špecifikovaná množina H vektorov a pole komplexných čísel $\mathcal{C}$ je lineárny priestor, t. j. axiómy lineárneho priestoru sú splnené.

Príklad 1.7. Dokážte vetu 1.1.

Príklad 1.8. Dokážte, že v n-rozmernom priestore H s bázou $B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}\subset H$, každý vektor φ je vyjadritený *jednoznačne* ako lineárna kombinácia vektorov báze

$$\varphi=b_1\beta_1+b_2\beta_2+...+b_n\beta_n$$

Príklad 1.9. Dokážte vzťah (1.4).

Príklad 1.10. Dokážte, že množina H' (1.5) je lineárnym priestorom.

Príklad 1.11. Dokážte reláciu (1.7).

Príklad 1.12. Dokáže pomocou (1.8a), že rozklad (1.8c) špecifikuje vektor z jednoznačne.

Príklad 1.13. Dokážte rovnosť (1.9).

Príklad 1.14. Dokážte nutnú podnienku (implikácia zľava do prava v (1.11)) izormfizmu medzi vektormi H a G,